

## Modulația GMSK (Gaussian Minimum Shift Keying)

- este folosită în sistemul GSM pentru comunicații mobile

### Aspecte generale

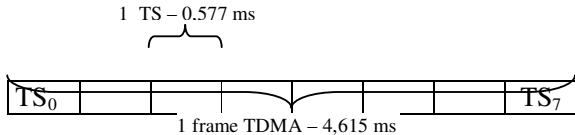
- în sistemul GSM, în banda de 900 MHz, transmisia este de tip duplex cu divizare în frecvență (FDD):

- *pe sensul uplink* (MS→BTS) se folosesc 124 (126) de purtătoare cu o separație de 0.2 MHz, plasate în banda (890 – 915) MHz; purtătoarele de la marginea benzii se folosesc doar cu acordul autorității de reglementare națională;  $f_{cu} = 890 + n \cdot 0,2$  MHz;  $n = (0), 1, \dots, 124, (125)$ .

- *pe sensul downlink* (BTS→MS) se folosesc alte 124 (126) de purtătoare cu o separație de 0.2 MHz, plasate în banda (935 – 960) MHz; o conexiune are întotdeauna o separație de 45 MHz între purtătoarele alocate sensurilor UL și DL;  $f_{cd} = 935 + n \cdot 0,2$  MHz;  $n = (0), 1, \dots, 124, (125)$ .

- metoda de acces (a MS) este de tip FDMA-TDMA:

- fiecărui utilizator  $i$  se atribuie o pereche de frecvențe purtătoare (FDMA), iar pe fiecare frecvență  $i$  se atribuie unul din 8 sloturi temporale, TS (TDMA), care compun un cadru TDMA, vezi fig. 1;



**Temă: calculați viteza maximă a MS la care canalul mai poate fi considerat aproximativ constant pe durata unui frame TDMA**

- succesiunea de sloturi temporale  $TS_i$  formează un canal fizic pe care se transmit canalele logice;
- în banda de 900 MHz sunt disponibile  $124 \cdot 8 = 992$  canale fizice; *acestea nu pot fi alocate toate traficului vocal sau de date!* (sunt necesare canale fizice pentru semnalizări și controlul traficului);
- în benzile de 1800 și, respectiv 1900 MHz sunt disponibile 374 și respectiv 299 canale fizice.

### Parametrii care afectează transmisia pe canale radio mobile

- *propagarea multicanală*, care introduce variații semnificative ale amplitudinii semnalului recepționat, în funcție de frecvența purtătoare și de poziția utilizatorului;
- *viteza MS*, care introduce *deviația Doppler în frecvență* și care influențează semnificativ *variabilitatea în timp* a nivelului recepționat
- amplificatorul de radiofrecvență al MS:
  - datorită dimensiunilor reduse a acumulatorului, și implicit a tensiunii și capacității reduse de stocare ale acestuia, amplificatorul de radiofrecvență trebuie să fie un amplificator eficient în clasă C;
  - acest tip de amplificator are o caracteristică  $V_0(V_i)$  neliniară, ceea ce introduce fenomenul de „refacere spectrală” a componentelor exterioare și distorsionări ale semnalului modulat emis în banda utilă.

### Cerințe impuse modulației folosite în GSM

- sensibilitate redusă la deviațiile de frecvență ale semnalului recepționat;
- sensibilitate redusă la variațiile de amplitudine ale semnalului recepționat;
- componente spectrale cât mai reduse în afara benzii utile, pentru a diminua efectul „refacerii spectrale”;
- un factor PAPR de valoare cât mai apropiată de 1 (0 dB);
- probabilitate de eroare cât mai redusă;
- implementare cât mai simplă.
- banda de frecvență cât mai îngustă

### Modulații candidate – QPSK (sau 2-PSK) și modulații de tip FSK:

- **QPSK:**

- factor PAPR destul de mare (după filtrarea RC)
- componente spectrale în afara benzii destul de mari
- sensibilitate mare la deviații de frecvență
- probabilitate de eroare redusă
- implementare simplă

- la dezvoltarea tehnologică a anilor '85-'90 primele trei aspecte nu puteau fi compensate cu soluții tehnologice relativ simple

- **modulații de tip FSK:**

- factor PAPR mai mic decât QPSK
- componente spectrale mai reduse în afara benzii utile (după filtrare, care nu mai e de tip RC)
- sensibilitate redusă la deviații de frecvență
- probabilitate de eroare mai mare decât QPSK
- implementare mai complicată

- banda de frecvență posibil mai mare decât QPSK (depinde de factorul  $\alpha$  al filtrării RC)
- pentru a micșora probabilitatea de eroare s-a ales MSK, o modulație de tip FSK, cu indice de modulație  $h=0.5$ , care are o lărgime de bandă a spectrului util mai mare decât modulația FSK cu indice  $h = 0,65$
- pentru a atenua mai puternic componentele exterioare benzii utile s-a ales caracteristica de filtrare de tip Gauss, care nu asigură ISI=0 în momentele de sondare (deci crește valoarea BER). Astfel rezultă GMSK.

#### Modulația MSK (Minimum Shift Keying)

- este o modulație de tip FSK cu indice de modulație cu indicele  $h = 0,5$ , ale cărei frecvențe alocate celor două nivele logice sunt astfel calculate încât semnalele purtătoare transmise pe duratele celor două nivele logice să fie ortogonale.

#### Calculul frecvențelor asociate celor două nivele logice

- pentru calculul frecvențelor  $f_1$  (asociată lui „1”) și  $f_0$  (asociată lui „0”) se aplică metoda descrisă în cursul de TM, cap.FSK, cu mențiunea că  $h = 0,5$  și că  $f_1 > f_0$  și rezultă:

$$f_1 = f_c + 0,5 \cdot \frac{f_b}{2} = f_c + \frac{f_b}{4} = f_c + f_d; \quad f_0 = f_c - 0,5 \cdot \frac{f_b}{2} = f_c - \frac{f_b}{4} = f_c - f_d; \quad (1)$$

- dacă impunem acum condiția ca semnalele cu frecvențele  $f_1$  și  $f_0$  să fie ortogonale, rezultă:

$$\frac{A^2}{T_b \cdot V_r} \int_0^{T_b} \cos[2\pi(f_c + \frac{f_b}{4})t] \cdot \cos[2\pi(f_c - \frac{f_b}{4})t] dt = \frac{A^2}{2 \cdot T_b \cdot V_r} \cdot \frac{\sin 4\pi f_c T_b}{4\pi f_c} = 0 \Leftrightarrow f_c = \frac{p}{4} f_b; \quad p \in \mathbb{N}^* \quad (2)$$

- pentru a face ca variația de fază, pe o perioadă de bit, a argumentelor din (2) să depindă numai de deviația de frecvență  $f_d$ , trebuie ca variația de fază introdusă de  $f_c$  pe o perioadă de bit să fie multiplu întreg de  $2\pi$ , de unde rezultă valoarea că frecvența centrală trebuie să fie multiplu întreg de  $f_b$ :

$$2\pi \cdot f_c \cdot T_b = p \cdot 2\pi \Rightarrow f_c = p \cdot f_b; \quad p \in \mathbb{N} \quad (3)$$

Combinând (2) și (3) trebuie ca  $p$  să fie întreg și mai mare ca 1.

#### Expresia semnalului modulat MSK

- considerând că cele două nivele logice sunt reprezentate bipolar  $a_k = +/-1$ , variația fazei introdusă de semnalului modulator pe o perioadă de bit, având index  $k$ , este  $+/-\pi/2$ :

$$a_k \cdot \frac{f_b}{4} \cdot 2\pi \cdot T_b = a_k \cdot \frac{\pi}{2} = \Delta\Theta_k \quad (4)$$

- expresia semnalului MSK (pe o perioadă de simbol), considerând nivele modulatorie  $+/-1$  se poate scrie notând cu  $t'$  intervalul  $[(k-1)T_b, kT_b)$ :

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + a_k \cdot 2\pi \cdot \frac{f_b}{4} t' + \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{k-1} a_j) \cdot u_T(t - kT) = A \cos(\omega_c t + \Delta\Theta_k(t') + \Theta_k) \cdot u_T(t - kT) \quad (5)$$

- în relația (5) ultima sumă,  $\Theta_k$ , reprezintă faza introdusă de toate simbolurile anterioare simbolului curent.  
- expresia (5) a semnalului modulat MSK poate fi descompusă, rezultând expresia (6) care reprezintă expresia semnalului MSK sub formă de semnal QAM:

$$s(t) = A \cos(\omega_c t + \Delta\Theta_k(t') + \Theta_k) \cdot u_T(t - kT) \\ = A \cos(\Delta\Theta_k(t') + \Theta_k) \cdot u_T(t - kT) \cdot \cos \omega_c t - A \sin(\Delta\Theta_k(t') + \Theta_k) \cdot u_T(t - kT) \cdot \sin \omega_c t \quad (6)$$

- variația de fază a semnalului modulat pe o perioadă de simbol se obține sumând variațiile introduse de semnalul purtător,  $p \cdot 2\pi$  (3), și de cel modulator,  $+/- \pi/2$  (4); datorită periodicității purtătorului cosinusoidal, variația de fază este doar  $+/- \pi/2$ , în funcție de valoarea bitului modulator.

#### Trellisul de faze al semnalului modulat MSK

- datorită variației de fază de  $+/- \pi/2$ , pe fiecare perioadă de simbol, modulația MSK permite construirea unui trellis de faze, prezentat în figura 2.a în care pentru a păstra defazajele în intervalul  $(0, 2\pi)$ , s-au folosit egalitățile:  $-\pi/2 = -2\pi + 3\pi/2$  și  $\pi/2 = 2\pi - 3\pi/2$ .

- variațiile în timp posibile ale fazei cumulate  $\Theta_k$  a semnalului MSK sunt reprezentate în fig.2.b, pentru faze cuprinse între  $[-\pi, +\pi]$ .

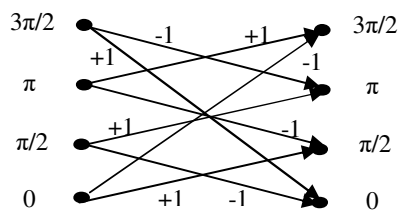


Fig.2.a Trellisul de faze al MSK

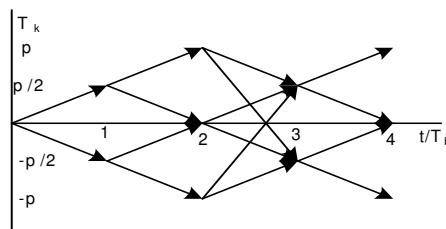


Fig. 2.b Variațiile posibile ale fazei cumulate a semnalului MSK

### Spectrul de frecvență al semnalului MSK

- densitatea spectrală de putere a semnalului MSK este exprimată de (7) și este reprezentată în fig.3.a.

$$S_{\text{MSK}}(f) = \frac{16A^2}{\pi^2 f_b} \left[ \frac{\cos \frac{2\pi(f-f_c)}{f_b}}{1 - \left( \frac{(f-f_c)}{f_b} \right)^2} \right]^2 \left[ \frac{V^2}{\text{Hz}} \right]; \quad (7)$$

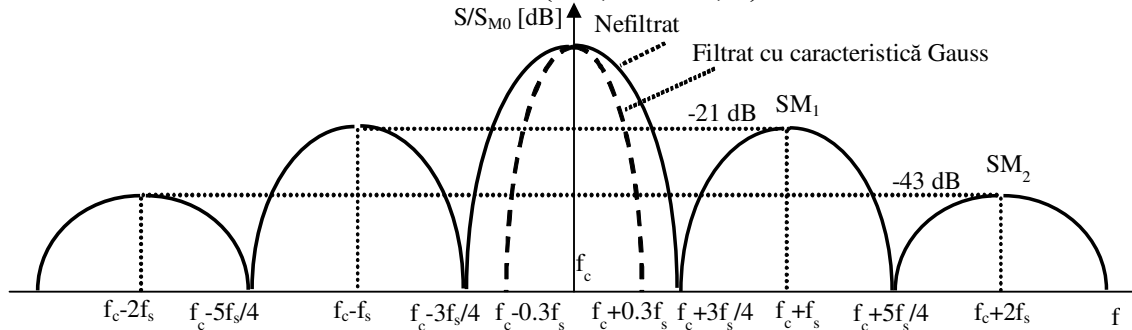


Figura 3.a. Distribuția densității spectrale de putere a semnalelor MSK

- primul nul spectral apare la  $f = f_c \pm 3 \cdot f_b/4$ , ceea ce face ca lărgimea de bandă a lobului principal să fie:

$$LB_{\text{MSK}} = 1,5 \cdot f_b; \quad (8)$$

- valorile frecvențelor nulurilor spectrale,  $f_m$ , ale frecvențelor la care lobi spectrali exteriori benzii au valori maxime,  $f_M$ , și ale acestor valori maxime,  $S_M$  sunt:

$$f_m(n) = f_c \pm (2n+1) \cdot \frac{f_b}{4}; \quad \text{a. } f_M(n) = f_c \pm n \cdot f_b; \quad \text{b. } S_M(n) = \frac{16}{\pi^2 \cdot f_b} \cdot \frac{1}{(1-4n^2)^2}; \quad \text{c. } n \in \mathbb{N}^* \quad (9)$$

- raportând valoarea  $S_M(1)$  a primului lob exterior la cea a lobului principal  $S_M(0)$ , rezultă  $S_M(1)$  are o atenuare de 21 dB față de lobul principal, iar al doilea lob exterior de 43 dB.

- dacă se consideră un debit binar  $D = 270,833$  kbps, atunci lărgimea de bandă a lobului principal nefiltrat va fi de  $1,5 f_b = 406,25$  kHz, ceea ce ar face ca frecvențele purtătoare alăturate, două în fiecare parte, să nu poată fi folosite decât în celule îndepărtate ca poziție.

- de aceea semnalul modulat este filtrat *TB la ieșire*, cu o caracteristică de tip Gauss, care are produsul bandă x perioadă de simbol,  $\beta = B_{-3\text{dB}} \cdot T_b = 0,3$  (în BB), care este echivalent cu o lărgime de bandă a semnalului filtrat, (conține aprox. 99% din putere) pe frecvența purtătoare,  $LB_f \approx 1,4 \cdot f_b$ , banda fiind, vezi și fig. 3a și 3b:

$$FB_{\text{GMSK}} \approx (f_c - 0,7 \cdot f_b, f_c + 0,7 \cdot f_b) \quad (10)$$

- pentru  $D = 270,833$  kbps lărgime de bandă la -3dB a semnalului GMSK este:  $LB_{\text{GMSK}} \approx 380$  kHz.

- de aici rezultă că în urma filtrării cu caracteristica Gauss și a atenuării în spațiul liber, al doilea lob spectral exterior va putea fi neglijat, el neafectând celulele învecinate. Cât privește primul lob spectral exterior, în urma filtrării Gauss și a atenuării în spațiul liber, acesta va avea un nivel suficient de redus pentru a nu afecta al doilea rând de celule învecinate, ceea ce conduce la creșterea factorului de reutilizare a frecvențelor purtătoare pentru a mări capacitatea sistemului.

- frecvențele purtătoare învecinate nu se folosesc în aceeași celulă

- pentru a face o comparație cu spectrul modulației QPSK, vom relua caracteristicile spectrale ale acestuia prezentate în cursul de TM. Expresia densității spectrale de putere este dată de relația (11), iar pozițiile nulurilor spectrale și ale maximelor lobilor exteriori sunt date de relația (12).

$$S_{\text{QPSK}}(f) = \frac{A^2}{f_s} \cdot \left( \frac{\sin \frac{\pi(f-f_c)}{f_s}}{\frac{\pi(f-f_c)}{f_s}} \right)^2 \left[ \frac{V^2}{\text{Hz}} \right]; \quad (11)$$

$$f_m(n) = f_c \pm n f_s \quad n \neq 0; \quad f_M(n) = f_c \pm (n f_s + f_s/2) \quad n \neq 0; \quad S_M(0) = A^2/f_s; \quad S_M(n) = S_M(0) \cdot 4/[(2n+1)\pi]^2; \quad (12)$$

- pentru comparație fig. 3.b prezintă distribuțiile spectrale de putere (PSD) ale semnalelor MSK, QPSK, 2-PSK

- din (11) și (12) rezultă că lobul principal are o lărgime de bandă  $LB = 2f_s$ , care în urma filtrării cu carac-

teristica RC se reduce la  $LB_f = f_s(1+\alpha)$ , iar primii doi lobi exteriori sunt atenuați cu 13 dB și respectiv 18 dB, datorită pantei de cădere a modulațiilor PSK care e proporțională doar cu  $[(f-f_c)/f_b]^{-2}$ ; nivelele lor mai pot fi reduse de filtrarea RC, dar nu suficient. Aceasta face ca pentru modulația QPSK să mai fie necesară o filtrare suplimentară “puternică” pentru a putea utiliza frecvențele purtătoare învecinate în al doilea rând de celule învecinate, și pentru a nu afecta, prin al doilea lob exterior, celulele alăturate.

- comparativ, componentele spectrale ale MSK scad cu o pantă proporțională cu  $[(f-f_c)/f_b]^{-4}$ ,

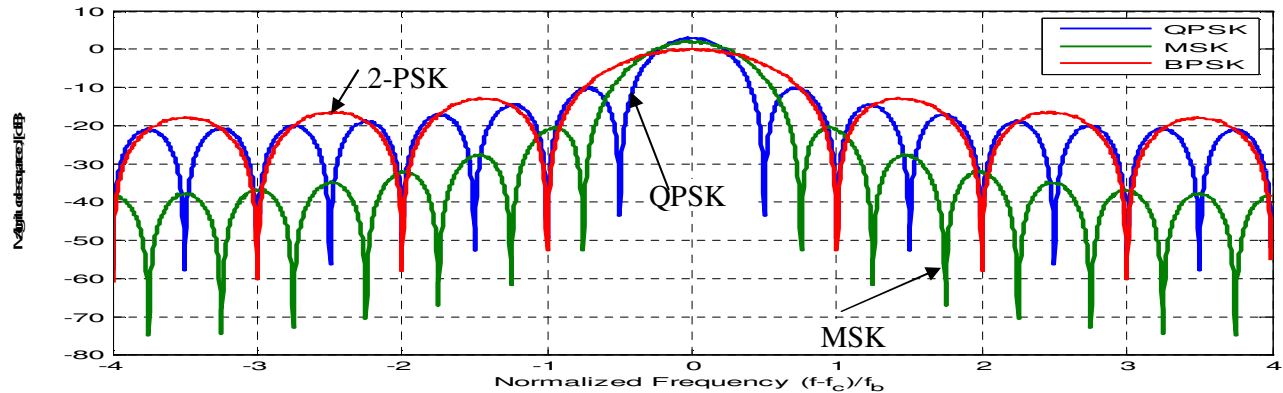


Figura 3.b. PSD ale semnalelor MSK, 2-PSK, QPSK

- pentru a asigura același debit binar modulația QPSK va utiliza  $f_s = f_b/2$ , iar lărgimea de bandă a semnalului filtrat,  $LB_{f_{QPSK}} = f_s(1+\alpha)$ , nu va depăși valoarea  $f_b$  oricare ar fi  $\alpha \leq 1$ .

#### Probabilitatea de eroare de bit a modulației MSK

- vom analiza probabilitatea de eroare de bit a modulației MSK și vom face o comparație cu cea asigurată de QPSK, ambele modulații nefiltrate, urmând ca probabilitatea de eroare de bit a modulației GMSK să fie analizată în paragraful destinat efectelor filtrării Gauss, unde se va face și comparația cu cea asigurată de modulația QPSK filtrată RC.

- probabilitatea de eroare de bit BER a modulației MSK, în varianta de implementare cu precodare diferențială la emisie (vezi paragrafele dedicate producerii și demodulării) este dată de relația (13.a) în care prin  $E_b/N_0$  s-a notat raportul între energia medie/bit și densitatea spectrală de putere a zgomotului; relația mai conține și exprimarea acestei probabilități în funcție de raportul semnal/zgomot, precum și aproximarea acestei probabilități printr-o exponențială, utilizând metoda descrisă în capitolul DPSK al cursului de TM.

- relația (13.b) prezintă legătura între rapoartele  $E_b/N_0$  și  $P_s/\sigma^2$ .

$$P_{bMSK-prec} = P_{eMSK-prec} = Q\left(\sqrt{\frac{1,7 \cdot E_b}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{2,55 \cdot P_s}{\sigma^2}}\right) \approx \frac{0,25}{\sqrt{\rho}} \cdot e^{-\frac{1,275 \cdot P_s}{\sigma^2}}; \quad a. \quad (13)$$

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{P_b \cdot T_b \cdot LB}{\sigma^2} = \frac{P_b \cdot T_b \cdot 1,5f_b}{\sigma^2} = \frac{1,5 \cdot P_s}{\sigma^2}; \quad b.$$

- modulația MSK fără precodare asigură o probabilitate de eroare de bit dublă față de cea a variantei precodate, datorită introducerii decodului diferențial la ieșirea demodulatorului, *vezi relația (33) în paragraful destinat demodulării semnalelor MSK*

- modulația QPSK are 2 biți/simbol și ocupă o lărgime de bandă de frecvență diferită de cea a MSK; de aceea, comparația probabilităților de eroare în funcție de SNR nu este relevantă. Această comparație trebuie făcută în funcție de raportul  $E_b/N_0$ .

- impunând același debit binar celor două modulații, rezultă că  $f_{s_{QPSK}} = f_b/2$  și  $T_s = 2T_b$ .

- legătura între rapoartele  $P_s/P_z$  și  $E_b/N_0$  în cazul modulației QPSK este dată de relația:

$$\frac{P_s}{P_z} = \frac{E_s}{N_0 \cdot T_s \cdot f_s} = \frac{2 \cdot E_b}{N_0}; \quad (14)$$

- probabilitatea de eroare de bit a modulației QPSK este, *vezi cursul de TC (cap. DPSK) și relația (14)*:

$$P_{bQPSK} = \frac{P_{eQPSK}}{2} = \frac{2Q\left(\sqrt{\frac{P_s}{P_z}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{P_s}{P_z}}\right)}{2} \approx Q\left(\sqrt{\frac{2 \cdot E_b}{N_0}}\right); \quad (15)$$

- egalând argumentele funcției Q din relațiile (13.a) și (15), obținem relația dintre valorile  $E_b/N_0$  pentru care cele două modulații asigură aceeași BER:

$$\left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{MSK}} \approx \frac{2}{1,7} \cdot \left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{QPSK}} ; \quad (16)$$

- relația (16) arată că valoarea  $E_b/N_0$ , necesară MSK pentru a asigura o valoare dată a BER este mai mare cu aproximativ 0,7 dB decât cea necesară QPSK. La o valoare dată a raportului  $E_b/N_0$ , argumentului funcției  $Q$  pentru MSK este mai mic decât cel al funcției  $Q$  pentru QPSK și, datorită monotoniei descrescătoare a funcției compuse  $Q(\sqrt{t})$ ,  $BER_{\text{MSK}} > BER_{\text{QPSK}}$ . Deci, probabilitatea de eroare de bit a MSK este mai mare decât cea a QPSK. - dacă se consideră și termenul  $Q^2$  din (15) rezultă de diferența de SNR e ceva mai mare

Recapitulând, putem spune că:

- modulația MSK are o probabilitate de eroare mai mare decât QPSK;
- modulația MSK ocupă o bandă de frecvență mai mare decât QPSK pentru a transmite același debit binar;
- modulația MSK are lobi spectrali laterali cu amplitudini sensibil mai mici decât QPSK;
- modulația MSK are variații ale anvelopei mai mici decât QPSK, adică PAPR mai mic;
- modulația MSK este mai puțin sensibilă la deviațiile de frecvență și variațiile de amplitudine introduse de canalul radio mobil.

#### Producerea modulației MSK

- modulația MSK se poate produce prin două tipuri de metode:

##### a. metoda directă

- implică modularea de tip FSK cu indice de modulație  $h = 0,5$  urmată de o filtrare TB cu o caracteristică Gauss; schema bloc a acestei metode este prezentată în figura 4.

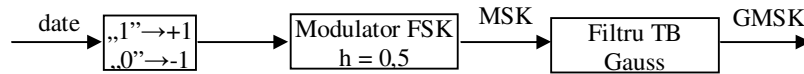


Figura 4. Schema bloc a producerii GMSK pin metoda directă

- metoda este mai dificil de implementat și asigură performanțe mai slabe datorită și variației mai mari a amplitudinii semnalului filtrat

##### b. metoda care utilizează tehnica QAM

- semnalul MSK sub forma din (5) poate fi exprimat ca un semnal de tip QAM dat de (17), în care  $\Theta_k$  este suma variațiilor de fază introduse de nivelele modulatorie în perioadele de simbol anterioare, vezi rel. (5):

$$\begin{aligned}
 s_{\text{MSK}}(t) &= A \cos \left( 2\pi \cdot f_c \cdot t + \frac{2\pi \cdot a_k \cdot f_b}{4} \cdot (t - kT_b) + \Theta_k \right) = \\
 &= A \cos \left( \frac{a_k \pi (t - kT_b)}{2T} + \Theta_k \right) \cdot \cos(\omega_c t) - A \sin \left( \frac{a_k \pi (t - kT_b)}{2T} + \Theta_k \right) \cdot \sin(\omega_c t) = \\
 &= I(t) \cdot \cos(\omega_c t) - Q(t) \cdot \sin(\omega_c t); \quad kT_b \leq t < (k+1)T_b \\
 \Theta_k &= \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^{k-1} a_j \cdot u_T(t - jT)
 \end{aligned} \quad (17)$$

- semnale modulatorie ale celor două purtătoare ortogonale din (17) pot fi exprimate sub forma:

$$\begin{aligned}
 I(t) &= \cos \left( \frac{a_k \pi (t - kT_b)}{2T_b} + \Theta_k \right) = \cos \left( a_k \frac{\pi t}{2T_b} + \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2} \right) = \\
 &= \cos \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \cdot \cos \left( \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2} \right) - a_k \cdot \sin \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \cdot \sin \left( \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2} \right) \\
 Q(t) &= \sin \left( \frac{a_k \pi (t - kT_b)}{2T_b} + \Theta_k \right) = \cos \left( a_k \frac{\pi t}{2T_b} + \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2} \right) = \\
 &= a_k \cdot \sin \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \cdot \cos \left( \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2} \right) + \cos \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \cdot \sin \left( \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2} \right)
 \end{aligned} \quad (18)$$

- folosind notația:  $x_k = \Theta_k - a_k \frac{k\pi}{2}$  (19)

- și luând în considerare că suma  $\Theta_k$  poate lua valorile din (20) pentru valori pare și, respectiv, impare ale indexului  $k$  al perioadei de simbol, se poate demonstra că  $x_k$  ia valorile date de (21)

$$\Theta_k \in \{0, \pi\} \quad \text{pt. } k = 2p; \quad \Theta_k \in \left\{ -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{pt. } k = 2p+1 \quad (20)$$

$$x_k \in \{0, \pi\}; \quad \forall k \in N \quad (21)$$

- înlocuind (21) în (18), semnalele modulatorie I(t) și Q(t) pot fi exprimate sub forma (23), în care  $c_k$  și  $d_k$  definite în (22) pot lua valorile  $c_k, d_k \in \{-1, +1\}$

$$c_k = \cos(x_k); \quad d_k = a_k \cos(x_k); \quad (22)$$

$$I(t) = \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \cdot \cos(x_k) = \cos\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \cdot c_k; \quad kT_b \leq t < (k+1)T_b \quad (23)$$

$$Q(t) = a_k \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \cdot \cos(x_k) = \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \cdot d_k; \quad kT_b \leq t < (k+1)T_b$$

- ținând cont de (19), (20) și (21), se pot stabili relațiile de recurență (24) între valorile lui  $\cos(x_k)$ ; cele două relații sunt specifice pentru perioadele de bit (simbol) de indexuri pare și, respectiv impare, adică  $k = 2p$  sau  $k = 2p + 1$

$$\begin{cases} \cos(x_k) = \cos(x_{k-1}); & k = 2p \\ a_k \cos(x_k) = a_{k-1} \cos(x_{k-1}); & k = 2p + 1 \end{cases} \quad (24)$$

- înlocuind acum (24) în (22) se obțin următoarea regulă recursivă de calcul a mărimii  $c_k$ :

$$\begin{cases} c_k = c_{k-1}; & k = 2p \\ c_k = \frac{a_{k-1}}{a_k} c_{k-1}; & k = 2p + 1 \end{cases} \quad (25)$$

- relația (25) arată că valoarea lui  $c_k$  este constantă de-a lungul a două perioade de simbol (bit), de indexuri  $(2k-1)$  și  $2k$ , începând cu o perioadă de bit de index impar.

- în urma unui calcul similar, valorile lui  $d_k$  se obțin cu următoarea relație de recurență:

$$\begin{cases} d_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} d_{k-1}; & k = 2p \\ d_k = d_{k-1}; & k = 2p + 1 \end{cases} \quad (26)$$

- relația (26) arată că și valorile lui  $d_k$  sunt constante pe două perioade de bit de indexuri  $2k$  și  $(2k+1)$ , dar începând cu o perioadă cu index par.

- relațiile (25) și (26) arată că nivelele  $c_k$  și  $d_k$  trebuie introduse alternativ în câte o perioadă de simbol; combinând (25) și (26) și ținând cont de (24) se obțin expresiile mărimilor  $c_k$  și  $d_k$  în funcție de mărimile introduse în perioada anterioară și de simbolul modulator  $a_k$  (exprimat în reprezentare bipolară  $\pm 1$ ) :

$$\begin{cases} d_k = a_k \cdot c_{k-1}; & k = 2p \\ c_k = \frac{1}{a_k} \cdot d_{k-1}; & k = 2p + 1 \end{cases} \quad (27)$$

- notând cu  $b_k$  valoarea logică ("0" ori "1") a bitul de intrare din perioada  $k$ , avem  $a_k = 2b_k - 1$ , și cu  $m_k$ :

$$m_k = \begin{cases} \frac{d_k + 1}{2}; & k = 2p \\ \frac{c_k + 1}{2}; & k = 2p + 1 \end{cases}; \quad (28)$$

putem deduce relația dintre valorile logice ale bitului introdus în perioada  $k$  și valorile logice  $m_k$  corespunzătoare nivelelor modulatorie  $c_k$ , pentru (durata) perioade(lor) de simbol impare, și respectiv  $d_k$ , pentru (durata) perioade(lor) de simbol pare.

- în acest scop vom folosi relația (29) care face legătura între înmulțirea în  $\{-1, +1\}$  și adunarea modulo-2 ( $\oplus$ ) în  $\{0, 1\}$ :

$$\text{daca } a, b, c \in \{0, 1\} \text{ si } \begin{cases} x = 2a - 1 \\ y = 2b - 1 \\ z = 2c - 1 \end{cases} \Rightarrow z = x \cdot y = \frac{x}{y} \Leftrightarrow c = a \oplus \bar{b} \quad (29)$$

- folosind (24), (28) și (29), relațiile (27) pot fi scrise sub forma:

$$\begin{cases} m_{2p} = m_{2p-1} \oplus \bar{b}_{2p} \\ m_{2p+1} = m_{2p} \oplus \bar{b}_{2p+1} \end{cases} \Rightarrow m_{k+1} = m_k \oplus \bar{b}_{k+1}; \quad (30)$$

- nivelele modulatorilor  $d_k$  și  $c_k$  trebuie calculate de către blocul de mapare folosind relațiile (30) și (28).
- nivelele calculate vor fi furnizate modulatorului QAM în fiecare perioadă de bit în conformitate cu succesiunea descrisă în tabelul 1

perioadă bit	2p-1	2p	2p+1	2p+2	2p+3	2p+4
$c_k$	$2m_{2p-1} - 1$	$2m_{2p} - 1$	$2m_{2p+1} - 1$	$2m_{2p+2} - 1$	$2m_{2p+3} - 1$	$2m_{2p+4} - 1$
$d_k$	$2m_{2p-2} - 1$	$2m_{2p} - 1$	$2m_{2p} - 1$	$2m_{2p+2} - 1$	$2m_{2p+2} - 1$	$2m_{2p+4} - 1$

Table 1 Nivelele modulatorilor furnizate de mapper în fiecare perioadă de simbol

- schema bloc a modulatorului de tip QAM care generează semnalul MSK în conformitate cu abordarea descrisă mai sus este prezentată în figura 5; în figură, blocurile marcate cu linie întreruptă se introduc doar pentru producerea modulației GMSK (asupra acestui aspect se va reveni)

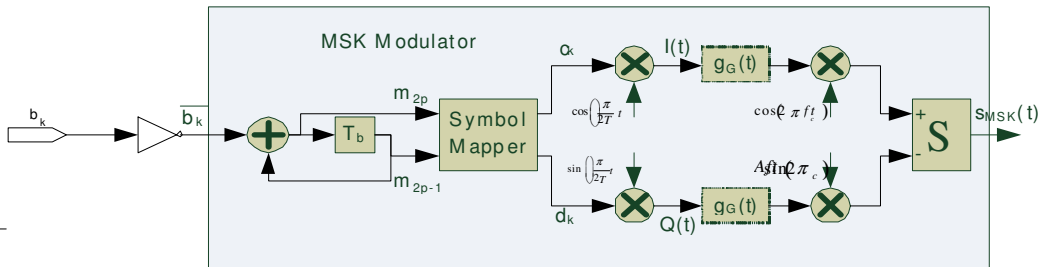
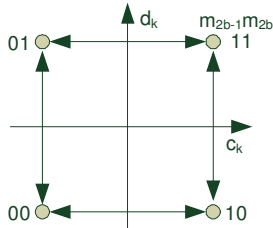


Figura 5. Schema bloc a modulatorilor de tip QAM pentru modulațiile MSK și GMSK

- datorită faptului că cele două semnale (nivele) modulatorilor sunt livrate modulatorului QAM cu un offset temporal egal cu  $T_b$  (care este egal cu jumătate din perioada lor de simbol QAM), semnalul MSK generat cu această metodă poate fi privit ca un semnal de tip Offset-QPSK (OQPSK).



- constelația OQPSK echivalentă și traiectoriile de fază posibile (spațiul semnalului) sunt prezentate în figura 6.
- rețineți că traiectoriile posibile ale fazei nu permit trecerea fazei semnalului modulat prin origine, fapt care reduce nivelul variațiilor anvelopei semnalului modulat după filtrarea formatoare pentru limitarea benzii.

Figura 6. Reprezentarea spațiului semnalului MSK

- așa cum rezultă din figura 5 și relația (27), MSK este o modulație “cu memorie”, în care valorile curente ale nivelelor modulatorilor depind de valorile lor anterioare.
- receptoarele convenționale de tip I-Q (QAM) ale modulației MSK introduc o ușoară înrăutățire a performanțelor de BER datorită operației implicite de precodare diferențială, vezi (30), care necesită decodare diferențială la recepție, vezi relația (33), pag. 8.
- pentru a compensa “memoria” modulatorului, adică pentru a asigura că  $m_{k+1} = \bar{b}_{k+1}$ , trebuie folosit un precodor diferențial, așa cum se prezintă în figura 7.
- acest tip de modulație MSK se mai numește “MSK precodată (precoded MSK)”

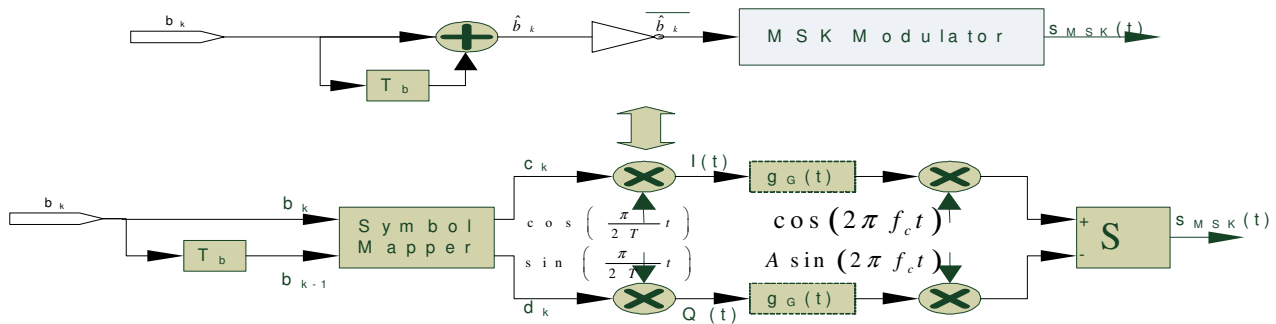


Figura 7. Principiul “precoded MSK” Schema bloc a modulatorului “precoded MSK”

- valoarea bitului introdus în modulatorul MSK  $\hat{b}_k$  este calculată cu relația (31). **Verificați această proprietate.**

$$\hat{b}_k = \hat{b}_{k-1} \oplus b_k \quad (31)$$

### Demodularea semnalelor MSK

- demodularea semnalelor poate fi realizată prin metode “directe”, utilizând demodulatoare de tip FSK, vezi capitolul dedicat FSK în cursul de TM din anul III.
- această abordare este însă mai puțin performantă și/sau are o flexibilitate mai redusă decât demodularea bazată pe tehnica QAM; de aceea, în acest material se va aborda doar varianta ce folosește QAM.

### Demodularea MSK utilizând tehnica QAM

- schema bloc a demodulatorului de tip QAM pentru modulația MSK precodată este prezentată în figura 8.
- etajele de la intrare efectuează filtrarea trece-bandă (BPF) și translația în banda de bază a semnalelor modulate recepționate,  $I^*(t)$  and  $Q^*(t)$ , care sunt variantele afectate de canal ale semnalelor modulate definite de (18) și (23).

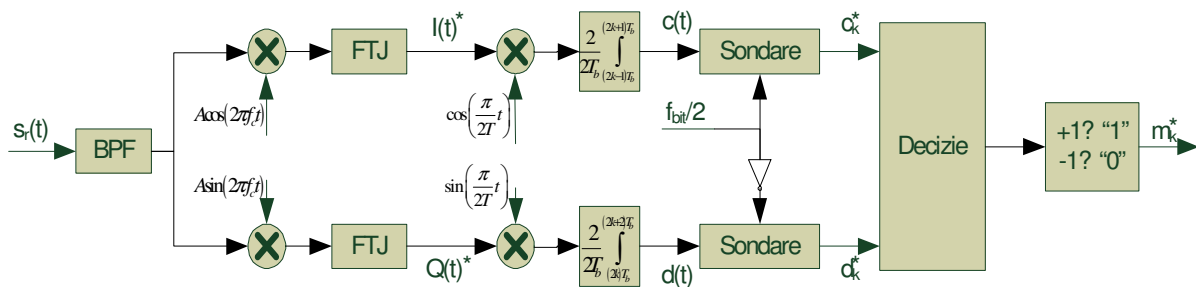


Figura 8. Schema bloc a demodulatorului de tip QAM pentru MSK precodată

- semnalele  $I^*(t)$  and  $Q^*(t)$  sunt înmulțite cu semnalele auxiliare generate local care implementează funcțiile  $\cos(\pi t / (2T_b))$  și  $\sin(\pi t / (2T_b))$ ;
- aceste funcții auxiliare generate local trebuie să fie sincronizate cu semnalele omologe de la emisie; sincronizarea este realizată prin intermediul sincronizării tactului de simbol local
- cele două semnale rezultate în urma înmulțirilor sunt integrate pe două perioade de simbol, începând cu o perioadă de simbol de index impar pe ramura în fază I și, respectiv, cu o perioadă de simbol de index par pe ramura în cuadratură Q, vezi relațiile (25), (26) și (27).
- ieșirile celor două integratoare vor furniza, la sfârșitul perioadelor respective de integrare, valorile demodate ale nivelelor  $c^*_{2p-1}$  and  $d^*_{2p}$ , care au expresiile:

$$c^*_{2p-1} = \frac{1}{2T_b} \cdot \int_{(2p-1)T_b}^{(2p+1)T_b} I^*(t) \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) dt = c_{2p-1} + n_{2p-1};$$

$$d^*_{2p} = \frac{1}{2T_b} \cdot \int_{(2p)T_b}^{(2p+2)T_b} Q^*(t) \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2T_b} t\right) dt = d_{2p} + n_{2p};$$
(32)

- în relația (32)  $n_{2p-1}$  și, respectiv,  $n_{2p}$  reprezintă valorile semnalelor de zgomot, cu distribuție gaussiană adăugate de canal
- blocul de decizie furnizează, pe baza comparației cu praguri, nivelele decise  $c'_{2p-1}$  și  $d'_{2p}$
- acestea vor fi introduse prin multiplexare, câte unul alternativ în fiecare perioadă de simbol ( $T_s=T_b$ ), în blocul de conversie de nivel, vezi (28), care furnizează secvența de biți estimată  $m'_k$ . În cazul modulației MSK precodată, secvența de biți  $m'_k$  corespunde biților demodulați  $\bar{b}_k$ .
- dacă se transmite modulația MSK “simplă” (fără precodare), secvența de biți de date estimată  $b'_k$  se obține în urma unei operații de decodare diferențială a biților  $m'_k$ .
- această operație, descrisă de relația (33), reprezintă inversul operației (30) de la emisie, și este realizată de un decodor diferențial plasat după convertorul de nivel din figura 8, nefiind inserat în figura respectivă.

$$b'_{k+1} = m'_k \oplus \bar{m}'_{k+1} \quad (33)$$

- decodarea diferențială din (33) produce dublarea probabilității de eroare de bit a MSK „simplă”, comparativ cu modulația MSK precodată.