Coduri convoluţionale – scurtă recapitulare

k_0 – număr de biţi de informaţie dintr-un grup; n_0 – număr de biţi codaţi într-un grup; $R = k_0/n_0$ – rata codării

K – constrângerea codului (număr de grupe); biţii de informaţie sunt corectaţi de biţii codaţi din K grupe succesive, iar biţii de informaţie din K grupe succesive influentează biţii codaţi ai unei grupe.

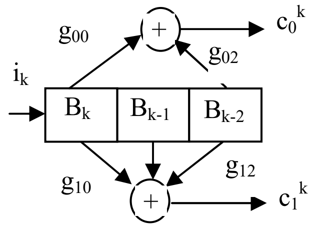
N – lungimea de constrângere; $N = n_0 \cdot K$.

Codarea matricială

- o alternativă a codării polinomiale – se va prezenta doar pentru cazul codurilor nerecursive

- pentru cazul $k_0 = 1$

- [G] este matricea generatoare $G= [g_0\ g_1,..., g_{n0-1}]$ (1); g_i sunt polinoame cu coeficienţi în $GF(2^n)$, de ordinul $\upsilon = K-1$; [G] are dimensiunile $[k_0 \cdot K \text{ x } n_0]$ (1.a.).



- [I] este matricea biţilor de informaţie $[I] = [i_k, i_{k-1}, .., i_{k-\upsilon}]$ (2), indexul k indicând succesiunea biţilor în ritmul tactului de bit. [I] are dimensiunile $[1 \text{ x } (k_0 \cdot K)]$, vezi figura 1.

- ecuaţia codării este $[I]\cdot[G] = [C]$ (3), unde [C] este matricea biţilor codaţi în cea de-a k-a perioadă de bit; dimensiunile ei sunt $[1 \text{ x } n_0]$.

Figura 1. Semnificaţia notaţiilor pentru exemplul 1

Exemplul 1:

- un cod nesistematic, R= ½, K = 3, $G = [5,7]_8$ are matricea generatoare de dimensiuni [3 x 2], iar matricea [I] de dimensiunile [1 x 3]. Polinoamele generatoare se scriu sub forma $(g_{10,...,}g_{1\upsilon})$. Ecuaţia codării matriciale este:

$$\begin{bmatrix} i_k & i_{k-1} & i_{k-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} \\ g_{01} & g_{11} \\ g_{02} & g_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_o^k & c_1^k \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} i_k & i_{k-1} & i_{k-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_o^k & c_1^k \end{bmatrix} \quad (4)$$

- pentru codurile sistematice unul dintre polinoame este $g_i = 1$, adică (1,0,0).

Coduri de rată $k_0/(k_0+1)$

- sunt folosite în majoritatea modulaţiilor codate care utilizează extinderea constelaţiei (se va reveni)

- sunt de trei tipuri: complete, cu biţi necodaţi, „punctured” (reduse)

   a. Coduri complete

- se introduc k_0 fluxuri de biţi informaţionali şi se folosesc k_0+1 polinoame generatoare de grad υ.

- codarea polinomială este prezentată în figura 2 pentru un exemplu particular

- codarea matricială foloseşte matricea [I] cu dimensiunile $[1 \text{ x } k_0 \cdot K]$ şi matricea G cu dimensiunile $[k_0 \cdot K \text{ x } n_0]$, rezultând matricea biţilor codaţi [C] de dimensiuni $[1 \text{ x } (k_0+1)]$. Numărul polinoamelor generatoare este $k_0 \cdot n_0$ iar matricea generatoare are forma dată în ecuaţia codării (5), pentru un cod cu R=2/3. Polinoamele generatoare corespunzătoare fluxului informaţional i_j se notează g_i^j, j = 1,...,k_0, iar i = 0,,...,υ=K-1.

$$\begin{bmatrix} i_1(x) & i_2(x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_0^1 & g_1^1 & g_2^1 \\ g_0^2 & g_1^2 & g_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^k & c_1^k & c_2^k \end{bmatrix} \quad (5)$$

Exemplul 2

- se consideră un cod cu R = 2/3, constrângerea K = 2 şi matrice generatoare dată în (6). Ecuaţia matricială este dată în (7), iar schema de generare polinomială este dată în figura 2.

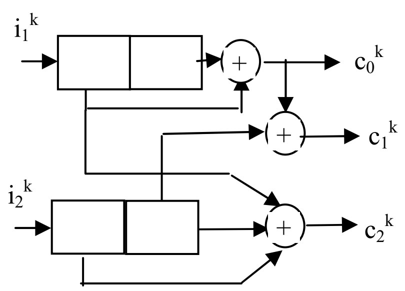


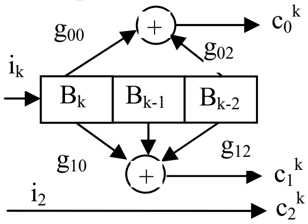
Figura 2 Cod complet cu rata 2/3 şi parametrii din exemplul 2

$$G(x) = \begin{bmatrix} 1+x^{-1} & 1+x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} & 1+x^{-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} i_{10}^k & i_{11}^{k-1} & i_{20}^k & i_{21}^{k-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^k & c_1^k & c_2^k \end{bmatrix} \quad (7)$$

b. Coduri cu biţi necodaţi (biţii codaţi şi cei necodaţi sunt „legaţi” prin maparea pe acelaşi simbol QAM)
- o altă variantă de obţinere a unui cod cu rata $k_0/(k_0+1)$ constă în împărţirea celor k_0 biţi informaţionali în două grupe: m biţi vor fi codaţi cu un cod cu $R_c= m/(m+1)$, obţinându-se m+1 biţi de cod, iar restul de k_0-m biţi se transmit necodaţi. Rata codului rezultat va fi $(m+k_0-m)/(m+1+k_0-m)=k_0/(k_0+1)$.
- biţii necodaţi vor introduce *tranziţii paralele* în diagrama trellis a codului rezultat (se va reveni), iar cu o mapare corespunzătoare, probabilitatea de eroare a biţilor necodaţi va fi în cel mai rău caz egală cu probabilitatea de eroare a biţilor informaţionali care au fost codaţi (se va reveni).

Exemplul 3



- generarea unui cod cu rata R = 2/3, K=3.
- alegem m = 1 şi codăm cu un cod cu R = ½, rezultând 2 biţi de cod. Restul de k_0-m = 1 biţi informaţionali se transmit necodaţi. Schema bloc utilizând codul cu R = ½ din exemplul 1 este dată în figura 3.

Figura 3. Cod 2/3 realizat cu biţi de cod (R_c=1/2) şi biţi necodaţi

c. Coduri „punctured” (reduse)
- se obţin plecând de la codul „părinte” cu rata R_m (de ex. = 1/2) , constrângerea K, prin eliminarea unor biţi de cod pentru a se atinge rata dorită. Biţii de cod care vor fi transmişi se selectează conform unei „măşti de reducere” (puncturing pattern) disponibilă în literatură, pentru fiecare rată şi cod „părinte”.
- pentru a obţine un cod cu rata $R = k_0/(k_0+1)$, se iau k_0 biţi informaţionali, se codează cu codul „părinte” rezultând $2\cdot k_0$ biţi de cod. Apoi, prin masca de reducere se elimină $k_0 - 1$ biţi, rămânând $k_0+ 1$ biţi de cod.

Exemplul 4
- plecând de la codul „părinte” R=1/2 şi K = 3 din exemplul 1, în tabelul 1 se arăta măştile de reducere pentru a obţine codurile reduse cu ratele R = 2/3 şi 3/4

R↓ perioadă de bit→	**i_k k**	**i_{k+1} k+1**	**i_{k+2} k+2**
1/2	c_0^k (1) c_1^k (1)	c_0^{k+1} (1) c_1^{k+1} (1)	c_0^{k+2} (1) c_1^{k+2} (1)
2/3	c_0^k *(1)* c_1^k *(1)*	c_0^{k+1} (0) c_1^{k+1} *(1)*	c_0^{k+2} *(1)..* c_1^{k+2} *(1)..*
3/4	c_0^k *(1)* c_1^k *(1)*	c_0^{k+1} (0) c_1^{k+1} *(1)*	c_0^{k+2} *(1)* c_1^{k+2} (0)

- pentru R = 2/3 se iau k_0 = 2 biţi informaţionali obţinându-se 4 biţi de cod cu codul părinte R_m = 1/2. Apoi se elimină k_0–1=1, linia 2 a tabelului 1.
- pentru R = 3/4 se iau k_0 = 3 biţi informaţionali obţinându-se 6 biţi de cod cu codul părinte R_m = ½. Apoi se elimină k_0–1=2, linia 3 a tabelului 1.

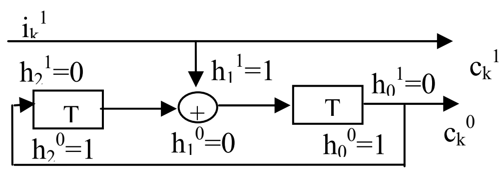
Tabelul 1. Măşti de „puncturing” ale codului cu R_m = 1/2

- în tabelul 1 biţii care se transmit sunt marcaţi cu 1, iar cei ce sunt „reduşi” sunt notaţi cu „0”.
- metoda permite modificarea adaptivă a ratei (şi puterii de corecţie a codului) în funcţie de SNR al canalului, generând Rate Compatible Punctured Convolutional Codes RCPCC, aplicate în sistemele de comunicaţii (3G. WiMax, LTE) - vezi exemplu pe tablă

Coduri convoluţionale recursive
- sunt coduri sistematice în care biţii de cod se calculează în funcţie de biţii informaţionali *şi de cei de cod* corespunzători la K perioade de bit. Faptul că în *calculul biţilor de cod curenţi intervin biţii de cod (control) din perioadele anterioare* conferă acestor coduri caracterul de *recursivitate*.
- pentru un cod recursiv sistematic cu $R_c= k_0/(k_0+1)$ doar bitul control curent se calculează în funcţie de biţii informaţionali *şi de cei contro)* corespunzători la K perioade de bit (K-1anterioare).
- notând cu i indexul bitului $(0,...,k_0)$, cu K constrângerea (sau cu ν = K-1) şi cu k indexul perioadei de bit, coeficienţii polinoamelor generatoare se vor scrie ca $h_{\upsilon-j}^i$, j = 0,...,υ, iar biţii codaţi se vor scrie ca $c_{k-\upsilon+j}^i$.

- biţii de control ai codului trebuie să satisfacă ecuaţia: $$\sum_{i=0}^{k_0}\sum_{j=0}^{\nu} h_{\nu-j}^i\cdot c_{k-\nu+j}^i=0 \qquad (8)$$

- pentru un cod cu R = ½ şi K = 3, (8) se poate rescrie ca:
$$h_2^0\cdot c_{k-2}^0+h_1^0\cdot c_{k-1}^0+h_0^0\cdot c_k^0+h_2^1\cdot c_{k-2}^1+h_1^1\cdot c_{k-1}^1+h_0^1\cdot c_k^1=0 \qquad (9)$$



- biţii de cod anteriori $c_{k-1,\ k-2}^0$ (biţi de control) şi biţi info anteriori $c_{k-1,\ k-2}^1$, precum şi bitul de intrare curent $c_k^1 = i_1^k$ fiind cunoscuţi, din (9) → bitul de control curent c_k^0.

Fig. 4 Exemplu de cod convoluţional recursiv

- aplicând acum relaţia (9) pentru polinoamele codului dat în figura 4, se obţine:
$$c_{k-2}^0+c_k^0+c_{k-1}^1=0 \Leftrightarrow c_k^0=c_{k-2}^0+c_{k-1}^1 \qquad (10)$$

Decodarea codurilor convoluţionale

- se face cu algoritmul lui Viterbi, algoritm bazat pe principiul plauzibilităţii maxime (maximum likelihood) cu decizie soft – se va reveni
- metrica folosită este distanţa euclidiană d_E; distanţa între fazorul recepţionat, de coordonate (x_r, y_r) şi unul dintre fazorii permişi, de coordonate (x_i, y_i), este *(pentru motivaţia utilizării d_E – vezi notiţe)*:

$$d_E^2 = (x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2 \tag{11}$$

- algoritmul lui Viterbi determină calea din trellis (permisă) care este cea mai apropiată de calea (secvenţa de simboluri) recepţionată, adică are distanţa euclidiană cumulată cea mai mică faţă de calea recepţionată, pe lungimea w = 3-5 ·K perioade de simbol (fereastra de decodare).
- pentru a arăta cum afectează distanţa euclidiană probabilitatea de eronare a căii transmise să considerăm, pe cazul unidimensional, că dacă se transmite nivelul x_j, probabilitatea să se recepţioneze nivelul x_r în prezenţa unui zgomot gaussian de dispersie σ, este:

$$p(x_r / x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x_r - x_j)^2}{2\sigma^2}} \tag{12}$$

- probabilitatea ca, dacă s-a transmis fazorul f_j (x_j, y_j) din setul de fazori al constelaţiei, să se recepţioneze fazorul r (x_r, y_r), care nu este din setul de fazori al constelaţiei, este (semnalul e bidimensional !):

$$p(r / f_j) = p(x_r / x_j) \cdot p(y_r / y_j) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x_r - x_j)^2 + (y_r - y_j)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{d_E^2 (r - f_j)}{2\sigma^2}} \tag{13}$$

- dar o cale **v** din trellis este compusă din w tranziţii, care corespund la w fazori recepţionaţi; calea ***v*** va fi compusă din succesiunea de fazori $\mathbf{f}_{vj}$, j = 1,...,w.
- succesiunea de fazori recepţionaţi afectaţi de zgomot constituie calea recepţionată ***u***, nu nepărat permisă de trellisul codului respectiv, formată din fazorii r_{uj}, j = 1,...,w.
- probabilitatea ca ***u*** să provină din **v** este:

$$p(u / v) = p(r_1 / f_1) \cdot p(r_2 / f_2) \cdot \ldots \cdot p(r_w / f_w) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^{w} d^2 (r_j - f_j)}{2\sigma^2}} \tag{14}$$

- calea din trellis cea mai plauzibilă este calea cu p(u/v) maximă, adică cea care are distanţa cumulată, d_{min}, cea mai mică (v. ec.14).
- deci probabilitatea de eronare a unei căi transmise într-o altă cale, în urma recepţionării şi decodării, scade odată cu creşterea distanţei cumulate minime, d_{Efree}, între căi în trellisul respectiv
- d_{Efree} se calculează ca şi d_{min} dintre calea nulă şi orice altă cale care pleacă din, şi revine în, starea 0 după un număr finit de paşi
- în unele trellisuri există mai multe căi aflate la distanţa cea mai mică, numărul lor fiind N_{min}. În acest caz probabilitatea de eronare a unei căi este limitată superior de membrul drept al relaţiei (15).
- considerând cazul în care toate pentru căile dintr-un trelis există o singură cale aflată la distanţa d_{min} putem spune că probabilitatea de eronare este cuprinsă în intervalul:

$$Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2\sigma^2}}\right) \le p_{ec} \le N_{min} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{min}^2}{2\sigma^2}}\right) = N_{min} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{T^2 d_0^2}{2\sigma^2}}\right) = N_{min} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{T_1^2 P_s^2}{2\sigma^2}}\right) \tag{15}$$

- distanţa cumulată minimă în trellis se poate exprima în funcţie de distanţa minimă în constelaţia utilizată d_0 (cu ajutorul constantei T), care la rândul ei se poate exprima în funcţie de SNR (cu ajutorul constantei T_1), vezi cursul de QAM (A+PSK).
- deoarece fiecare tranziție a digramei trellis corespunde unui fazor, p_{ec} dat de relația (15) reprezintă și probabilitatea de eroare de simbol
- limitele între care variază probabilitatea de eroare de bit se pot obține împărțind probabilitatea de eroare de simbol la numărul de biți utili mapați pe un simbol (în ipoteza utilizării mapării Gray).

Modulaţii codate

- sunt configuraţiile (modulaţie + cod corector + regulă de mapare a biţilor/simbol) care combină coduri corectoare de erori cu constelațiile prin intermediul mapării pentru a reduce probabilitatea de eroare de bit la un SNR dat.

- deoarece codurile corectoare de erori introduc o redundanţă a transmisiei ($R = k_0/n_0$), modulaţia codată trebuie să asigure şi transmisia biţilor de cod (control), suplimentari.
- după modul de transmitere a biţilor suplimentari, modulaţiile codate se împart în:
   a. modulaţii codate cu extensie de bandă;
   b. modulaţii codate cu extinderea constelaţiei de semnale.

a. Modulaţii codate cu extensie de bandă

- considerăm o transmisie necodată cu debitul util (necodat) D_n, p_n biţi/simbol ($N_n = 2^{p_n}$ fazori în constelaţie), frecvenţă de simbol f_{sn} şi un cod cu $R_c = k_0/n_0$.
- lărgimea de bandă şi debitul binar ale transmisiei monopurtător necodate sunt:

$$LB_n = f_{sn}(1+\alpha); \quad D_n = p_n \cdot f_{sn}; \tag{16}$$

- în ipoteza păstrării aceleiaşi constelaţii de semnale $N_c = N_n = 2^{p_n}$, debitul codat care trebuie transmis D_c este dat de (17.a), iar lărgimea de bandă a transmisiei codate LB_c este dată de (17.b).

$$D_c = \frac{n_0}{k_0} D_n = \frac{n_0}{k_0} p_n \cdot f_{sn} = p_n \cdot f_{sc}; \text{a.} \quad LB_c = f_{sc}(1+\alpha) = f_{sn}(1+\alpha)\frac{n_0}{k_0} = LB_n \cdot \frac{n_0}{k_0}; \text{ b.} \quad \frac{n_0}{k_0} = \frac{1}{R_c} \tag{17}$$

- deoarece $LB_c > LB_n$ şi $D_c > D_n$, pentru acelaşi p_n, rezultă că transmisia codată necesită o bandă de frecvenţă mai mare decât cea necodată, pentru a transmite un debit util egal cu cel necodat, cu condiţia păstrării constelaţiei de semnale. Debitul binar codat care e transmis e însă mai mare decât cel util
- reţineţi că debitele binare utile ale transmisiilor codată şi necodată trebuie să fie egale
- în cazul transmisiilor multipurtător, transmisiei codate i se alocă mai multe subpurtătoare a.î. condiţia (17.b) să fie îndeplinită

b. Modulaţii codate cu extinderea constelaţiei de semnale

- considerând ipotezele din cazul anterior putem scrie:

$$D_c = \frac{n_0}{k_0} D_n = \frac{n_0}{k_0} p_n \cdot f_{sn} = p_c \cdot f_{sn}; \text{ pentru } \frac{n_0}{k_0} \cdot p_n \in N; \text{ a.} \qquad LB_c = f_{sn}(1+\alpha) = LB_n; \text{ b.} \tag{18}$$

- dacă $R = k_0/(k_0+1)$, $k_0 = p_n$, atunci $p_c \in N$, iar numărul punctelor din constelaţia de semnale devine:

$$N_c = 2^{p_c} = 2^{p_n+1} = 2 \cdot 2^{p_n} = 2 \cdot N_n \tag{19}$$

- din relaţiile (18) şi (19) rezultă că această modulaţie utilizează aceeaşi frecvenţă de simbol cu cea necodată, deci ocupă aceeaşi bandă de frecvenţă, dar măreşte (dublează) constelaţia de semnale pentru a transmite acelaşi debit util, pentru a transmite şi bitul suplimentar introdus de codul corector.

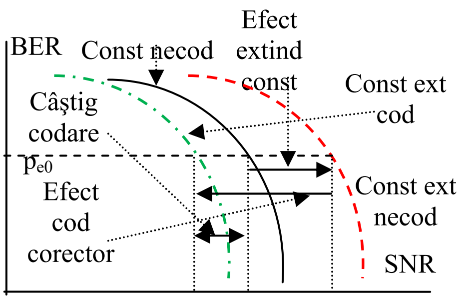
Exemplul 5

$p_n = 2$ ($N_n = 4$, QPSK), $R_c = 2/3 \rightarrow D_c = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot f_{sn} = 3 \cdot f_{sn}$; $p_c = 3$, $N_c = 2^3 = 8$, 8-PSK sau 8-QAM.

- *modulaţia codată cu extinderea constelaţiei este afectată de doi factori cu influenţe contradictorii asupra probabilităţii de eroare de bit, dacă presupunem puterea medie de emisie constantă pentru transmisiile codată şi necodată :*

a. creşterea numărului de fazori duce la scăderea distanţei minime între fazorii constelaţiei → creşterea BER la acelaşi SNR sau creşterea SNR necesar pentru asigurarea aceleiaşi BER, vezi fig.5;

b. codul corector aduce o scădere a BER, pentru acelaşi SNR, sau o scădere a SNR necesar pentru asigurarea aceleiaşi BER, vezi fig. 5.



- dacă efectul b. e mai pronunţat decât efectul a. atunci această modulaţie merită utilizată; diferenţa trebuie să fie semnificativă pentru a justifica complexitatea implementării codorului şi decodorului codului convoluţional.

Figura 5. Efecte în modulaţia cu extinderea constelaţiei

- diferenţa între valorile SNR pentru care variantele codată şi necodată asigură aceeaşi BER, se numeşte câştig al codării C_G [dB]. Penru o comparaţie corectă, cele două modulaţii trebuie să ocupe **aceeaşi bandă de frecvenţă** şi să asigure **acelaşi debit binar util.**

- după tipul de cod utilizat, modulaţiile codate cu extinderea constelaţiei se împart în:

a. modulaţii codate trellis, care utilizează coduri convoluţionale

b. modulaţii codate bloc, care utilizează coduri bloc

Modulaţia codată trellis

- combină codul codul convoluţional de rată $k_0/(k_{0+1})$ cu constelaţia utilizată, prin maparea unei grupe de k_0+1 biţi codaţi pe un simbol al constelaţiei extinse de 2N fazori şi utilizarea distanţei euclidiene ca metrică a algoritmului Viterbi utilizat la decodare. Pentru mărirea distanţei minime între două căi în trellis se utilizează uneori o metodă de mapare originală, care trebuie adaptată la tipul de cod convoluțional utilizat.
- vom arăta mai întâi modalitatea de *evaluare a câştigului codării*
- dacă aproximăm probabilitatea de eroare de simbol a modulației codate cu cea de eronare a unei căi aflate la d_{min}, vezi (15) în care neglijăm factorul N_{min}, iar pentru modulaţia necodată vom folosi relaţia $p_{en} = Q(d_{mn}^2/(2\sigma_n^2))$, unde d_{mn} este distanţa minimă dintre doi fazori, atunci egalitatea probabilităţilor de eroare pentru transmisiile codată şi necodată se scrie:

$$Q\left(\sqrt{\frac{d_{mc}^2}{2\sigma_c^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{mn}^2}{2\sigma_n^2}}\right) \rightarrow \frac{d_{mc}^2}{2\sigma_c^2} = \frac{d_{mn}^2}{2\sigma_n^2} \tag{20}$$

- varianta codată foloseşte o constelaţie cu $N_c = 2^u \cdot N_n$ fazori, u=1, în care pătratul distanţei minime se poate exprima în funcţie de puterea medie prin înmulţirea cu o constantă K_c (v. cursul de QAM); efectul codului corector se poate echivala prin creşterea distanţei minime de K_T ori. Pătratul distanţei minime a constelaţiei necodate se exprimă prin înmultirea puterii medii a constelaţiei cu o constantă K_n. Deci avem:

$$d_{mc}^2 = K_T \cdot K_c \cdot P_{mc}; \quad d_{mn}^2 = K_n \cdot P_{mn}; \tag{21}$$

- folosind (20) şi (21) obţinem:

$$\frac{d_{mc}^2}{2\sigma_c^2} = \frac{d_{mn}^2}{2\sigma_n^2} \rightarrow \frac{K_T \cdot K_c \cdot P_{mc}}{2\sigma_c^2} = \frac{K_n \cdot P_{mn}}{2\sigma_n^2} \rightarrow \frac{\frac{P_{mn}}{2\sigma_n^2}}{\frac{P_{mc}}{2\sigma_c^2}} = \frac{K_T \cdot K_c}{K_n} = \frac{d_{mc}^2}{d_{mn}^2} \cdot \frac{P_{mn}}{P_{mc}} = C_G \tag{22}$$

- **raportul C_G al valorilor SNR pentru care modulaţiile codate şi necodate asigură acelaşi BER** poate fi exprimat în funcţie de pătratele distanţelor minime din trellisul modulaţiei codate (constelaţia codată + efectul codului corector) şi din constelaţia necodată, şi de puterile medii ale constelaţiilor.
- trecând acum în scală logaritmică relaţia (22) obţinem expresia C_G în [dB]:

$$10\lg \frac{\frac{P_{mn}}{2\sigma_n^2}}{\frac{P_{mc}}{2\sigma_c^2}} = 10\lg\left(\frac{d_{mc}^2}{d_{mn}^2} \cdot \frac{P_{mn}}{P_{mc}}\right) = 20\lg\frac{d_{mc}}{d_{mn}} - 10\lg\frac{P_{mc}}{P_{mn}} = C_G\,[\mathrm{dB}] \tag{23}$$

- (23) exprimă modalitatea de calcul a câştigului codării unei modulaţii codate faţă de una necodată, care asigură **aceeaşi BER** şi **acelaşi debit binar util**, **dacă ambele ocupă aceeaşi bandă de frecvenţă**.
- primul termen din (23) exprimă efectul pozitiv adus de codul corector (prin creşterea distanţei minime datorită utilizarii trellisului la decodare; d_{mc} depinde de d_{Efree} - se va reveni), iar al doilea efectul advers al extinderii constelaţiei folosite în transmisia codată, care necesită o putere medie mai mare decât constelaţia folosită în transmisia necodată, pentru a păstra aceeaşi distanţă minimă între fazorii constelaţiei, sau care are o distanță minimă mai mică, dacă cele două constelații au aceeași putere.

Exemplul 6

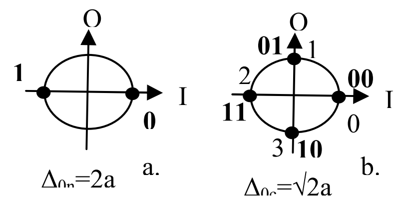
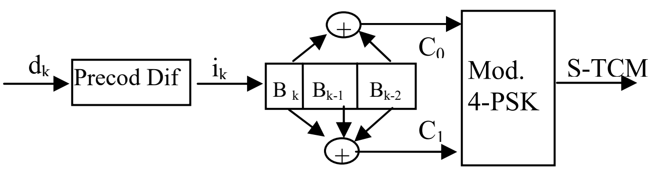


Figura 6. Constelaţiile necodată a. şi codată b.

- considerăm o transmisie necodată cu p_n = 1 (2-PSK) şi frecvenţa de simbol f_s. Distanţa minimă a constelaţiei necodate este 2, iar puterea medie este 1, vezi fig.6.a.
- pentru a realiza o modulaţie TCM cu R = ½, p_c = 2 (4-PSK), puterea medie a constelaţiei codate este tot 1 (vezi fig. 6.b), iar codul are parametrii R=1/2, K = 3 şi G = $[5, 7]_8$, vezi fig. 7 în care este prezentată schema bloc a codorului TCM.



- în figura 6 cu caractere bold se reprezintă biţii mapaţi pe fazorul respectiv, iar cu caractere simple etichetele fazorilor.

Figura 7. Schema bloc a codorului TCM

- pentru a determina distanţa minimă dintre două căi în trellis, care este d_{mc}, vom desena întâi diagrama trellis a codului în distanţă Hamming, fig. 8, în care tranziţia dintr-un nod generată de bitul informaţional "0" este plasată deasupra celei generate de bitul "1".

- pe baza acesteia se va construi diagrama trellis în fazori, fig.9, prin înlocuirea dibiţilor C_0C_1 cu fazorii pe care aceştia sunt mapaţi, vezi fig. 6.b în care fazorii sunt notaţi cu etichetele din fig. 6.b.

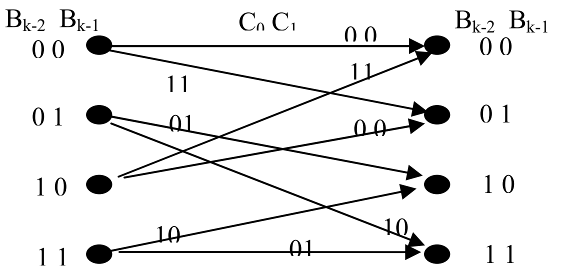


Figura 8. Diagrama trellis a cc în d_H

- în figura 9 este prezentată şi calea cu distanţa euclidiană cumulată minimă în trellis, d_{Efree}, (linie îngroşată) care este distanţa minimă a modulaţiei codate, d_{mc}.
- aceasta se calculează, folosind (11), prin acumularea d_E dintre fazorii corespunzători tranziţiilor căii minime şi fazorii corespunzători tranziţiilor de pe calea nulă, vezi (24).

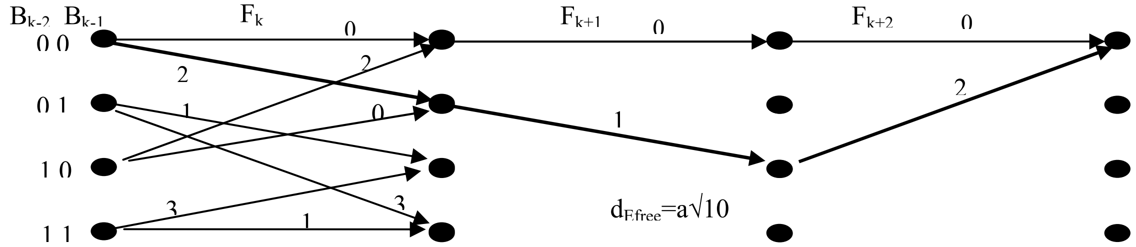


Figura 9. Diagrama trellis în fazori a TCM din fig. 6.b. şi 7. Linia îngroşată – calea minimă

$$d_{efree}^2 = d_E^2(0,2) + d_E^2(0,1) + d_E^2(0,2) = (2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2 + (2a)^2 = 10a^2 \rightarrow d_{mc} = d_{Efree} = a\sqrt{10}; \qquad (24)$$

- puterile medii ale constelaţiilor codată şi necodată sunt date de (25.a), vezi fig. 6.a şi b, iar distanţa minimă a constelaţiei necodate d_{mn} este dată de (25.b): $P_{mn} = P_{mc} = a^2$; a. $d_{mn} = 2a$; b. (25)

- pentru calcul câştigului codării folosim (23) şi obţinem:

$$C_G[dB] = 20\lg\frac{d_{mc}}{d_{mn}} - 10\lg\frac{P_{mc}}{P_{mn}} = 20\lg\frac{a\sqrt{10}}{2a} - 10\lg\frac{a^2}{a^2} \approx 4dB \qquad (26)$$

- datorită faptului că $P_{mc} = P_{mn}$ (acest fapt conduce la scăderea lui d_{mc}), câştigul codării nu este influenţat decât de efectul codului convoluţional, care conduce la creşterea distanţei minime a constelaţiei codate, de la $a\sqrt{2}$, vezi fig. 6.b, la $a\sqrt{10}$.
- creşterea distanţei mininime între fazorii constelaţiei codate conduce la creşterea lui d_{Efree} de k ori, dar şi la creşterea puterii medii a acesteia de k^2 ori, iar efectele asupra C_G se anulează, vezi (26).

Notă: utilizarea precodorului diferenţial din schema bloc a codorului TCM pentru asigurarea invarianţei la rotaţii de $k \cdot 90^o$ e posibilă doar pentru anumite clase de coduri convoluţionale. În transmisiile multipurtător (OFDM) nu se mai poate asigura această invarianţă.

Considerente privind utilizarea unor coduri convoluţionale cu rată diferită de $k_0/(k_0+1)$
- să considerăm utilizarea unui cod cu rata R = 1/3.
- utilizarea lui implică cvadruplarea constelaţiei, deoarece $p_c = p_n + 2$.
- dar utilizarea unei constelaţii cu $4N_n$ puncte conduce la creşterea SNR cu 6 dB (pentru constelaţii QAM) şi cu 12 dB (pentru constelaţii DPSK), pentru a asigura aceeaşi BER.
- codul corector va trebui să asigure un câştig mai mare de 6 +2-3 dB (QAM) sau 12+2-3 dB (DPSK) pentru a justifica complexitatea implementării; aceasta în ipoteza că puterile constelaţiilor sunt identice.
- pentru a asigura aceste câştiguri (dacă se pot asigura, în cazul DPSK) ar fi necesare coduri cu constrângerea K > 9, care sunt dificil de implementat. De aceea se folosesc doar modulaţii codate cu coduri cu R = $k_0/(k_0+1)$, care implică numai dublarea constelaţiei și care au K = 3-7 pentru o implementare mai simplă.

Alocarea fazori-multibiţi prin metoda partiţionării mulţimii (Mapping by Set Partitioning –MSP)
- pentru a mări cât mai mult posibil distanţa euclidiană minimă în trellis (d_{Efree}) s-a elaborat o metodă de alocare multibit-fazor care împarte setul de fazori din constelaţie în subseturi, în funcţie de valorile biţilor de cod, astfel încât să maximimizeze distanţa minimă între fazorii din subseturile definite de multibiţi de cod diferiţi. În plus această metodă caută să maximizeze şi distanţa minimă dintre fazorii aceluiaşi subset (definit de un multibit de cod).

Exemplul 7
- considerăm o modulaţie TCM R =2/3 formată dintr-un cod convoluţional cu R_c = 1/2 cu K=3 şi G = $[5,7]_8$ şi o constelaţie 8-PSK.
- deoarece numărul biţilor informaţionali codaţi m = 1, rezultă că k_0-m = 1 biţi informaţionali vor fi transmişi necodaţi, vezi ex. 3, fig.3.