

## Coduri convoluționale – scurtă recapitulare

$k_0$  – număr de biți de informație dintr-un grup;  $n_0$  – număr de biți codați într-un grup;  $R = k_0/n_0$  – rata codării

$K$  – constrângerea codului (număr de grupe); biții de informație sunt corecțați de biții codați din  $K$  grupe succesive, iar biții de informație din  $K$  grupe succesive influențează biții codați ai unei grupe.

$N$  – lungimea de constrângere;  $N = n_0 \cdot K$ .

### Codarea matricială

- o alternativă a codării polinomiale – se va prezenta doar pentru cazul codurilor nerecursive

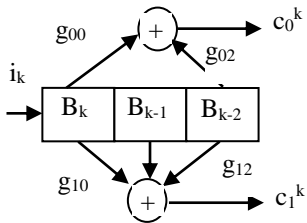
- pentru cazul  $k_0 = 1$

-  $[G]$  este matricea generatoare  $G = [g_0 \ g_1, \dots, \ g_{n_0-1}]$  (1);  $g_i$  sunt polinoame cu coeficienți în  $GF(2^n)$ , de ordinul  $v = K-1$ ;  $[G]$  are dimensiunile  $[k_0 \cdot K \times n_0]$  (1.a.).

-  $[I]$  este matricea biților de informație  $[I] = [i_k, \ i_{k-1}, \dots, \ i_{k-v}]$  (2), indexul  $k$  indicând succesiunea biților în ritmul tactului de bit.  $[I]$  are dimensiunile  $[1 \times (k_0 \cdot K)]$ , vezi figura 1.

- ecuația codării este  $[I] \cdot [G] = [C]$  (3), unde  $[C]$  este matricea biților codați în cea de-a  $k$ -a perioadă de bit; dimensiunile ei sunt  $[1 \times n_0]$ .

Figura 1. Semnificația notațiilor pentru exemplul 1



### Exemplul 1:

- un cod nesistematic,  $R = 1/2$ ,  $K = 3$ ,  $G = [5, 7]_8$  are matricea generatoare de dimensiuni  $[3 \times 2]$ , iar matricea  $[I]$  de dimensiunile  $[1 \times 3]$ . Polinoamele generatoare se scriu sub forma  $(g_{10}, \dots, g_{1v})$ . Ecuația codării matriciale este:

$$[i_k \ i_{k-1} \ i_{k-2}] \cdot \begin{bmatrix} g_{00} & g_{10} \\ g_{01} & g_{11} \\ g_{02} & g_{12} \end{bmatrix} = [c_0^k \ c_1^k]; \quad [i_k \ i_{k-1} \ i_{k-2}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = [c_0^k \ c_1^k] \quad (4)$$

- pentru codurile sistematice unul dintre polinoame este  $g_i = 1$ , adică  $(1, 0, 0)$ .

### Coduri de rată $k_0/(k_0+1)$

- sunt folosite în majoritatea modulațiilor codate care utilizează extinderea constelației (se va reveni)

- sunt de trei tipuri: complete, cu biți necodați, „punctured” (reduse)

#### a. Coduri complete

- se introduc  $k_0$  fluxuri de biți informaționali și se folosesc  $k_0+1$  polinoame generatoare de grad  $v$ .

- codarea polinomială este prezentată în figura 2 pentru un exemplu particular

- codarea matricială folosește matricea  $[I]$  cu dimensiunile  $[1 \times k_0 \cdot K]$  și matricea  $G$  cu dimensiunile  $[k_0 \cdot K \times n_0]$ , rezultând matricea biților codați  $[C]$  de dimensiuni  $[1 \times (k_0+1)]$ . Numărul polinoamelor generatoare este  $k_0 \cdot n_0$  iar matricea generatoare are forma dată în ecuația codării (5), pentru un cod cu  $R=2/3$ . Polinoamele generatoare corespunzătoare fluxului informațional  $i_j$  se notează  $g_i^j$ ,  $j = 1, \dots, k_0$ , iar  $i = 0, \dots, v=K-1$ .

$$[i_1(x) \ i_2(x)] \cdot \begin{bmatrix} g_0^1 & g_1^1 & g_2^1 \\ g_0^2 & g_1^2 & g_2^2 \end{bmatrix} = [c_0^k \ c_1^k \ c_2^k] \quad (5)$$

### Exemplul 2

- se consideră un cod cu  $R = 2/3$ , constrângerea  $K = 2$  și matrice generatoare dată în (6). Ecuația matricială este dată în (7), iar schema de generare polinomială este dată în figura 2.

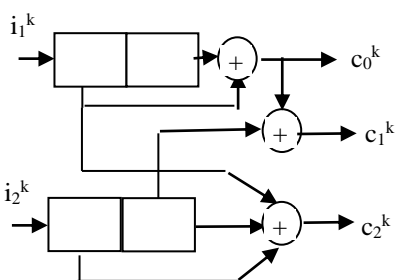


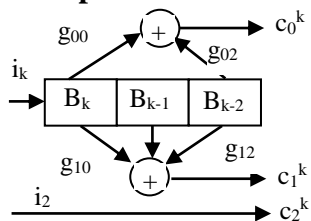
Figura 2 Cod complet cu rata 2/3 și parametrii din exemplul 2

$$G(x) = \begin{bmatrix} 1+x^{-1} & 1+x^{-1} & 1 \\ 0 & x^{-1} & 1+x^{-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[i_{10}^k \ i_{11}^{k-1} \ i_{20}^k \ i_{21}^{k-1}] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = [c_0^k \ c_1^k \ c_2^k] \quad (7)$$

b. Coduri cu biți necodați (biții codați și cei necodați sunt „legați” prin maparea pe același simbol QAM) - o altă variantă de obținere a unui cod cu rata  $k_0/(k_0+1)$  constă în împărțirea celor  $k_0$  biți informaționali în două grupe:  $m$  biți vor fi codați cu un cod cu  $R_c = m/(m+1)$ , obținându-se  $m+1$  biți de cod, iar restul de  $k_0-m$  biți se transmit necodați. Rata codului rezultat va fi  $(m+k_0-m)/(m+1+k_0-m) = k_0/(k_0+1)$ . - biții necodați vor introduce *tranziții paralele* în diagrama trellis a codului rezultat (se va reveni), iar cu o mapare corespunzătoare, probabilitatea de eroare a biților necodați va fi în cel mai rău caz egală cu probabilitatea de eroare a biților informaționali care au fost codați (se va reveni).

### Exemplul 3



- generarea unui cod cu rata  $R = 2/3$ ,  $K=3$ .  
 - alegem  $m = 1$  și codăm cu un cod cu  $R = 1/2$ , rezultând 2 biți de cod. Restul de  $k_0-m = 1$  biți informaționali se transmit necodați. Schema bloc utilizând codul cu  $R = 1/2$  din exemplul 1 este dată în figura 3.

Figura 3. Cod 2/3 realizat cu biți de cod ( $R_c=1/2$ ) și biți necodați

### c. Coduri „punctured” (reduse)

- se obțin plecând de la codul „părinte” cu rata  $R_m$  (de ex. = 1/2), constrângerea  $K$ , prin eliminarea unor biți de cod pentru a se atinge rata dorită. Biții de cod care vor fi transmiși se selectează conform unei „măști de reducere” (puncturing pattern) disponibilă în literatură, pentru fiecare rată și cod „părinte”.  
 - pentru a obține un cod cu rata  $R = k_0/(k_0+1)$ , se iau  $k_0$  biți informaționali, se codează cu codul „părinte” rezultând  $2 \cdot k_0$  biți de cod. Apoi, prin masca de reducere se elimină  $k_0 - 1$  biți, rămânând  $k_0 + 1$  biți de cod.

### Exemplul 4

- plecând de la codul „părinte”  $R=1/2$  și  $K = 3$  din exemplul 1, în tabelul 1 se arată măștile de reducere pentru a obține codurile reduse cu ratele  $R = 2/3$  și  $3/4$

R ↓ perioadă de bit →	$i_k$ k	$i_{k+1}$ k+1	$i_{k+2}$ k+2
1/2	$c_0^k$ (1) $c_1^k$ (1)	$c_0^{k+1}$ (1) $c_1^{k+1}$ (1)	$c_0^{k+2}$ (1) $c_1^{k+2}$ (1)
2/3	$c_0^k$ (1) $c_1^k$ (1)	$c_0^{k+1}$ (0) $c_1^{k+1}$ (1)	$c_0^{k+2}$ (1) $c_1^{k+2}$ (1)
3/4	$c_0^k$ (1) $c_1^k$ (1)	$c_0^{k+1}$ (0) $c_1^{k+1}$ (1)	$c_0^{k+2}$ (1) $c_1^{k+2}$ (0)

- pentru  $R = 2/3$  se iau  $k_0 = 2$  biți informaționali obținându-se 4 biți de cod cu codul părinte  $R_m = 1/2$ . Apoi se elimină  $k_0-1=1$ , linia 2 a tabelului 1.  
 - pentru  $R = 3/4$  se iau  $k_0 = 3$  biți informaționali obținându-se 6 biți de cod cu codul părinte  $R_m = 1/2$ . Apoi se elimină  $k_0-1=2$ , linia 3 a tabelului 1.

Tabelul 1. Măști de „puncturing” ale codului cu  $R_m = 1/2$

- în tabelul 1 biții care se transmit sunt marcați cu 1, iar cei ce sunt „reduși” sunt notați cu „0”.  
 - metoda permite modificarea adaptivă a ratei (și puterii de corecție a codului) în funcție de SNR al canalului, generând Rate Compatible Punctured Convolutional Codes RCPCC, aplicate în sistemele de comunicații (3G. WiMax, LTE) - **vezi exemplu pe tablă**

### Coduri convoluționale recursive

- sunt coduri sistematice în care biții de cod se calculează în funcție de biții informaționali și de cei de cod corespunzători la  $K$  perioade de bit. Faptul că în *calculul biților de cod curenți intervin biții de cod (control) din perioadele anterioare* conferă acestor coduri caracterul de *recursivitate*.

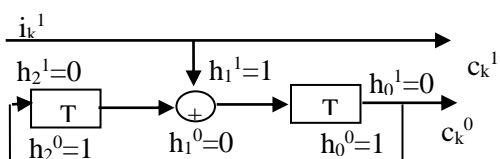
- pentru un cod recursiv sistematic cu  $R_c = k_0/(k_0+1)$  doar bitul control curent se calculează în funcție de biții informaționali și de cei contro) corespunzători la  $K$  perioade de bit ( $K-1$  anterioare).

- notând cu  $i$  indexul bitului ( $0, \dots, k_0$ ), cu  $K$  constrângerea (sau cu  $v = K-1$ ) și cu  $k$  indexul perioadei de bit, coeficienții polinoamelor generatoare se vor scrie ca  $h_{v-j}^i$ ,  $j = 0, \dots, v$ , iar biții codați se vor scrie ca  $c_{k-v+j}^i$ .

- biții de control ai codului trebuie să satisfacă ecuația: 
$$\sum_{i=0}^{k_0} \sum_{j=0}^v h_{v-j}^i \cdot c_{k-v+j}^i = 0 \quad (8)$$

- pentru un cod cu  $R = 1/2$  și  $K = 3$ , (8) se poate rescrie ca:

$$h_2^0 \cdot c_{k-2}^0 + h_1^0 \cdot c_{k-1}^0 + h_0^0 \cdot c_k^0 + h_2^1 \cdot c_{k-2}^1 + h_1^1 \cdot c_{k-1}^1 + h_0^1 \cdot c_k^1 = 0 \quad (9)$$



- biții de cod anteriori  $c_{k-1}, c_{k-2}^0$  (biți de control) și biți info anteriori  $c_{k-1}, c_{k-2}^1$ , precum și bitul de intrare curent  $c_k^1 = i_k^1$  fiind cunoscuți, din (9) → bitul de control curent  $c_k^0$ .

Fig. 4 Exemplu de cod convoluțional recursiv

- aplicând acum relația (9) pentru polinoamele codului dat în figura 4, se obține:

$$c_{k-2}^0 + c_k^0 + c_{k-1}^1 = 0 \Leftrightarrow c_k^0 = c_{k-2}^0 + c_{k-1}^1 \quad (10)$$

### Decodarea codurilor convoluționale

- se face cu algoritmul lui Viterbi, algoritmul bazat pe principiul plauzibilității maxime (maximum likelihood) cu decizie soft – se va reveni

- metrica folosită este distanța euclidiană  $d_E$ ; distanța între fazorul recepționat, de coordonate  $(x_r, y_r)$  și unul dintre fazorii permisi, de coordonate  $(x_i, y_i)$ , este (pentru motivația utilizării  $d_E$  – vezi notițe):

$$d_E^2 = (x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2 \quad (11)$$

- algoritmul lui Viterbi determină calea din trellis (permisă) care este cea mai apropiată de calea (secvența de simboluri) recepționată, adică are distanța euclidiană cumulată cea mai mică față de calea recepționată, pe lungimea  $w = 3-5 \cdot K$  perioade de simbol (fereastra de decodare).

- pentru a arăta cum afectează distanța euclidiană probabilitatea de eronare a căii transmise să considerăm, pe cazul unidimensional, că dacă se transmite nivelul  $x_j$ , probabilitatea să se recepționeze nivelul  $x_r$  în prezența unui zgomot gaussian de dispersie  $\sigma$ , este:

$$p(x_r / x_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x_r - x_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (12)$$

- probabilitatea ca, dacă s-a transmis fazorul  $f_j(x_j, y_j)$  din setul de fazori al constelației, să se recepționeze fazorul  $r(x_r, y_r)$ , care nu este din setul de fazori al constelației, este (semnalul e bidimensional !):

$$p(r / f_j) = p(x_r / x_j) \cdot p(y_r / y_j) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{(x_r - x_j)^2 + (y_r - y_j)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{d_E^2(r - f_j)}{2\sigma^2}} \quad (13)$$

- dar o cale  $\mathbf{v}$  din trellis este compusă din  $w$  tranziții, care corespund la  $w$  fazori recepționați; calea  $\mathbf{v}$  va fi compusă din succesiunea de fazori  $\mathbf{f}_{vj}$ ,  $j = 1, \dots, w$ .

- succesiunea de fazori recepționați afectați de zgomot constituie calea recepționată  $\mathbf{u}$ , nu nepărat permisă de trellisul codului respectiv, formată din fazorii  $r_{uj}$ ,  $j = 1, \dots, w$ .

- probabilitatea ca  $\mathbf{u}$  să provină din  $\mathbf{v}$  este:

$$p(\mathbf{u} / \mathbf{v}) = p(r_1 / f_1) \cdot p(r_2 / f_2) \cdot \dots \cdot p(r_w / f_w) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma^2} \cdot e^{-\frac{\sum_{j=1}^w d^2(r_j - f_j)}{2\sigma^2}} \quad (14)$$

- calea din trellis cea mai plauzibilă este calea cu  $p(\mathbf{u}/\mathbf{v})$  maximă, adică cea care are distanța cumulată,  $d_{\min}$ , cea mai mică (v. ec.14).

- deci probabilitatea de eronare a unei căi transmise într-o altă cale, în urma recepționării și decodării, scade odată cu creșterea distanței cumulate minime,  $d_{E\text{free}}$ , între căi în trellisul respectiv

-  $d_{E\text{free}}$  se calculează ca și  $d_{\min}$  dintre calea nulă și orice altă cale care pleacă din, și revine în, starea 0 după un număr finit de pași

- în unele trellisuri există mai multe căi aflate la distanța cea mai mică, numărul lor fiind  $N_{\min}$ . În acest caz probabilitatea de eronare a unei căi este limitată superior de membrul drept al relației (15).

- considerând cazul în care toate pentru căile dintr-un trellis există o singură cale aflată la distanța  $d_{\min}$  putem spune că probabilitatea de eronare este cuprinsă în intervalul:

$$Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2\sigma^2}}\right) \leq p_{ec} \leq N_{\min} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{d_{\min}^2}{2\sigma^2}}\right) = N_{\min} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{T^2 d_0^2}{2\sigma^2}}\right) = N_{\min} \cdot Q\left(\sqrt{\frac{T_1^2 P_s^2}{2\sigma^2}}\right) \quad (15)$$

- distanța cumulată minimă în trellis se poate exprima în funcție de distanța minimă în constelația utilizată  $d_0$  (cu ajutorul constantei  $T$ ), care la rândul ei se poate exprima în funcție de SNR (cu ajutorul constantei  $T_1$ ), vezi cursul de QAM (A+PSK).

- deoarece fiecare tranziție a digramei trellis corespunde unui fazor,  $p_{ec}$  dat de relația (15) reprezintă și probabilitatea de eroare de simbol

- limitele între care variază probabilitatea de eroare de bit se pot obține împărțind probabilitatea de eroare de simbol la numărul de biți utili mapați pe un simbol (în ipoteza utilizării mapării Gray).

### Modulații codate

- sunt configurațiile (modulație + cod corector + regulă de mapare a biților/simbol) care combină coduri corectoare de erori cu constelațiile prin intermediul mapării pentru a reduce probabilitatea de eroare de bit la un SNR dat.

- deoarece codurile corectoare de erori introduc o redundanță a transmisiei ( $R = k_0/n_0$ ), modulația codată trebuie să asigure și transmisia biților de cod (control), suplimentari.

- după modul de transmitere a biților suplimentari, modulațiile codate se împart în:

- a. modulații codate cu extensie de bandă;
- b. modulații codate cu extinderea constelației de semnale.

*a. Modulații codate cu extensie de bandă*

- considerăm o transmisie necodată cu debitul util (necodat)  $D_n$ ,  $p_n$  biți/simbol ( $N_n = 2^{p_n}$  fazori în constelație), frecvență de simbol  $f_{sn}$  și un cod cu  $R_c = k_0/n_0$ .

- lățimea de bandă și debitul binar ale transmisiei monopurtător necodate sunt:

$$LB_n = f_{sn}(1+\alpha); \quad D_n = p_n \cdot f_{sn}; \quad (16)$$

- în ipoteza păstrării aceleiași constelații de semnale  $N_c = N_n = 2^{p_n}$ , debitul codat care trebuie transmis  $D_c$  este dat de (17.a), iar lățimea de bandă a transmisiei codate  $LB_c$  este dată de (17.b).

$$D_c = \frac{n_0}{k_0} D_n = \frac{n_0}{k_0} p_n \cdot f_{sn} = p_n \cdot f_{sc}; \quad a. \quad LB_c = f_{sc}(1+\alpha) = f_{sn}(1+\alpha) \frac{n_0}{k_0} = LB_n \cdot \frac{n_0}{k_0}; \quad b. \quad \frac{n_0}{k_0} = \frac{1}{R_c} \quad (17)$$

- deoarece  $LB_c > LB_n$  și  $D_c > D_n$ , pentru același  $p_n$ , rezultă că transmisia codată necesită o bandă de frecvență mai mare decât cea necodată, pentru a transmite un debit util egal cu cel necodat, cu condiția păstrării constelației de semnale. Debitul binar codat care e transmis e însă mai mare decât cel util

- rețineți că debitele binare utile ale transmisiilor codată și necodată trebuie să fie egale
- în cazul transmisiilor multipurtător, transmisiei codate i se alocă mai multe subpurtătoare a.î. condiția (17.b) să fie îndeplinită

*b. Modulații codate cu extinderea constelației de semnale*

- considerând ipotezele din cazul anterior putem scrie:

$$D_c = \frac{n_0}{k_0} D_n = \frac{n_0}{k_0} p_n \cdot f_{sn} = p_c \cdot f_{sn}; \quad \text{pentru } \frac{n_0}{k_0} \cdot p_n \in \mathbb{N}; \quad a. \quad LB_c = f_{sn}(1+\alpha) = LB_n; \quad b. \quad (18)$$

- dacă  $R = k_0/(k_0+1)$ ,  $k_0 = p_n$ , atunci  $p_c \in \mathbb{N}$ , iar numărul punctelor din constelația de semnale devine:

$$N_c = 2^{p_c} = 2^{p_n+1} = 2 \cdot 2^{p_n} = 2 \cdot N_n \quad (19)$$

- din relațiile (18) și (19) rezultă că această modulație utilizează aceeași frecvență de simbol cu cea necodată, deci ocupă aceeași bandă de frecvență, dar mărește (dublează) constelația de semnale pentru a transmite același debit util, pentru a transmite și bitul suplimentar introdus de codul corector.

**Exemplul 5**

$p_n = 2$  ( $N_n = 4$ , QPSK),  $R_c = 2/3 \rightarrow D_c = \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot f_{sn} = 3 \cdot f_{sn}$ ;  $p_c = 3$ ,  $N_c = 2^3 = 8$ , 8-PSK sau 8-QAM.

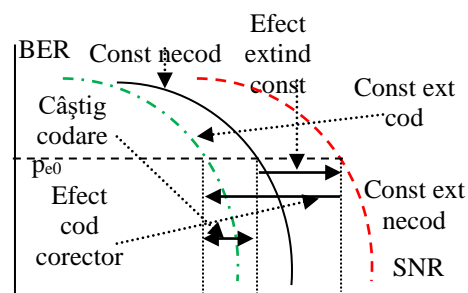
- modulația codată cu extinderea constelației este afectată de doi factori cu influențe contradictorii asupra probabilității de eroare de bit, dacă presupunem puterea medie de emisie constantă pentru transmisiile codată și necodată :

**a.** creșterea numărului de fazori duce la scăderea distanței minime între fazorii constelației  $\rightarrow$  creșterea BER la același SNR sau creșterea SNR necesar pentru asigurarea aceleiași BER, vezi fig.5;

**b.** codul corector aduce o scădere a BER, pentru același SNR, sau o scădere a SNR necesar pentru asigurarea aceleiași BER, vezi fig. 5.

- dacă efectul b. e mai pronunțat decât efectul a. atunci această modulație merită utilizată; diferența trebuie să fie semnificativă pentru a justifica complexitatea implementării codorului și decodorului codului convoluțional.

Figura 5. Efecte în modulația cu extinderea constelației



- diferența între valorile SNR pentru care variantele codată și necodată asigură aceeași BER, se numește câștig al codării  $C_G$  [dB].

Pentru o comparație corectă, cele două modulații trebuie să ocupe **aceleași bandă de frecvență** și să asigure **același debit binar util**.

- după tipul de cod utilizat, modulațiile codate cu extinderea constelației se împart în:

- a. modulații codate trellis, care utilizează coduri convoluționale
- b. modulații codate bloc, care utilizează coduri bloc

### Modulația codată trellis

- combină codul convoluțional de rată  $k_0/(k_0+1)$  cu constelația utilizată, prin maparea unei grupe de  $k_0+1$  biți codați pe un simbol al constelației extinse de  $2N$  fazori și utilizarea distanței euclidiene ca metrică a algoritmului Viterbi utilizat la decodare. Pentru mărirea distanței minime între două căi în trellis se utilizează uneori o metodă de mapare originală, care trebuie adaptată la tipul de cod convoluțional utilizat.

- vom arăta mai întâi modalitatea de *evaluare a câștigului codării*

- dacă aproximăm probabilitatea de eroare de simbol a modulației codate cu cea de eroare a unei căi aflate la  $d_{min}$ , vezi (15) în care neglijăm factorul  $N_{min}$ , iar pentru modulația necodată vom folosi relația  $p_{en} = Q(d_{mn}^2/(2\sigma_n^2))$ , unde  $d_{mn}$  este distanța minimă dintre doi fazori, atunci egalitatea probabilităților de eroare pentru transmisiile codată și necodată se scrie:

$$Q\left(\sqrt{\frac{d_{mc}^2}{2\sigma_c^2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{d_{mn}^2}{2\sigma_n^2}}\right) \rightarrow \frac{d_{mc}^2}{2\sigma_c^2} = \frac{d_{mn}^2}{2\sigma_n^2} \quad (20)$$

- varianta codată folosește o constelație cu  $N_c = 2^u \cdot N_n$  fazori,  $u=1$ , în care pătratul distanței minime se poate exprima în funcție de puterea medie prin înmulțirea cu o constantă  $K_c$  (v. cursul de QAM); efectul codului corector se poate echivala prin creșterea distanței minime de  $K_T$  ori. Pătratul distanței minime a constelației necodate se exprimă prin înmulțirea puterii medii a constelației cu o constantă  $K_n$ . Deci avem:

$$d_{mc}^2 = K_T \cdot K_c \cdot P_{mc}; \quad d_{mn}^2 = K_n \cdot P_{mn}; \quad (21)$$

- folosind (20) și (21) obținem:

$$\frac{d_{mc}^2}{2\sigma_c^2} = \frac{d_{mn}^2}{2\sigma_n^2} \rightarrow \frac{K_T \cdot K_c \cdot P_{mc}}{2\sigma_c^2} = \frac{K_n \cdot P_{mn}}{2\sigma_n^2} \rightarrow \frac{P_{mn}}{2\sigma_n^2} = \frac{K_T \cdot K_c}{K_n} \cdot \frac{d_{mc}^2}{d_{mn}^2} \cdot \frac{P_{mn}}{P_{mc}} = C_G \quad (22)$$

- **raportul  $C_G$  al valorilor SNR pentru care modulațiile codate și necodate asigură același BER** poate fi exprimat în funcție de pătratele distanțelor minime din trellisul modulației codate (constelația codată + efectul codului corector) și din constelația necodată, și de puterile medii ale constelațiilor.

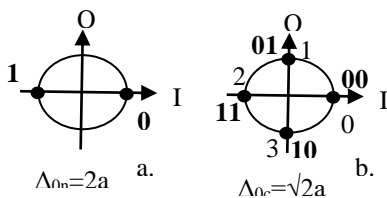
- trecând acum în scală logaritmică relația (22) obținem expresia  $C_G$  în [dB]:

$$10 \lg \frac{P_{mn}}{2\sigma_n^2} = 10 \lg \left( \frac{d_{mc}^2}{d_{mn}^2} \cdot \frac{P_{mn}}{P_{mc}} \right) = 20 \lg \frac{d_{mc}}{d_{mn}} - 10 \lg \frac{P_{mc}}{P_{mn}} = C_G [\text{dB}] \quad (23)$$

- (23) exprimă modalitatea de calcul a câștigului codării unei modulații codate față de una necodată, care asigură **aceeași BER și același debit binar util, dacă ambele ocupă aceeași bandă de frecvență.**

- primul termen din (23) exprimă efectul pozitiv adus de codul corector (prin creșterea distanței minime datorită utilizării trellisului la decodare;  $d_{mc}$  depinde de  $d_{efree}$  - se va reveni), iar al doilea efectul advers al extinderii constelației folosite în transmisia codată, care necesită o putere medie mai mare decât constelația folosită în transmisia necodată, pentru a păstra aceeași distanță minimă între fazorii constelației, sau care are o distanță minimă mai mică, dacă cele două constelații au aceeași putere.

### Exemplul 6

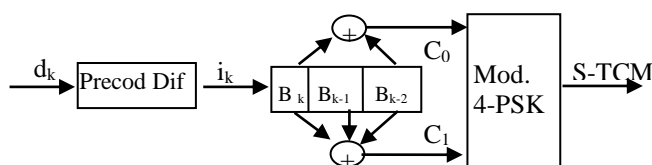


- considerăm o transmisie necodată cu  $p_n = 1$  (2-PSK) și frecvența de simbol  $f_s$ . Distanța minimă a constelației necodate este 2, iar puterea medie este 1, vezi fig.6.a.

- pentru a realiza o modulație TCM cu  $R = 1/2$ ,  $p_c = 2$  (4-PSK), puterea medie a constelației codate este tot 1 (vezi fig. 6.b), iar codul are parametrii  $R=1/2$ ,  $K = 3$  și  $G = [5, 7]_8$ , vezi fig. 7 în care este prezentată

Figura 6. Constelațiile necodată a. și codată b.

schema bloc a codorului TCM.



- în figura 6 cu caractere bold se reprezintă biții mapați pe fazorul respectiv, iar cu caractere simple etichetele fazorilor.

Figura 7. Schema bloc a codorului TCM

- pentru a determina distanța minimă dintre două căi în trellis, care este  $d_{mc}$ , vom desena întâi diagrama trellis a codului în distanță Hamming, fig. 8, în care tranziția dintr-un nod generată de bitul informațional "0" este plasată deasupra celei generate de bitul "1".

- pe baza acesteia se va construi diagrama trellis în fazori, fig.9, prin înlocuirea dibitilor  $C_0C_1$  cu fazorii pe care aceștia sunt mapați, vezi fig. 6.b în care fazorii sunt notați cu etichetele din fig. 6.b.

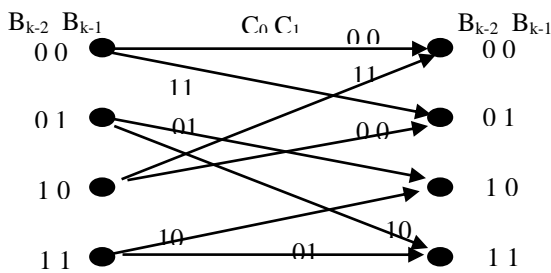


Figura 8. Diagrama trellis a cc în  $d_H$

- în figura 9 este prezentată și calea cu distanța euclidiană cumulată minimă în trellis,  $d_{Efree}$ , (linie îngroșată) care este distanța minimă a modulației codate,  $d_{mc}$ .

- aceasta se calculează, folosind (11), prin acumularea  $d_E$  dintre fazorii corespunzători tranzițiilor căii minime și fazorii corespunzători tranzițiilor de pe calea nulă, vezi (24).

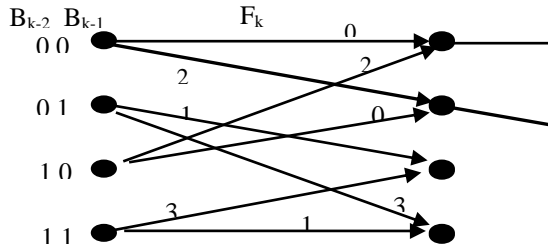


Figura 9. Diagrama trellis în fazorii a TCM din fig. 6.b. și 7. ● Linie îngroșată – calea minimă

$$d_{efree}^2 = d_E^2(0,2) + d_E^2(0,1) + d_E^2(0,2) = (2a)^2 + (\sqrt{2}a)^2 + (2a)^2 = 10a^2 \rightarrow d_{mc} = d_{Efree} = a\sqrt{10}; \quad (24)$$

- puterile medii ale constelațiilor codată și necodată sunt date de (25.a), vezi fig. 6.a și b, iar distanța minimă a constelației necodate  $d_{mn}$  este dată de (25.b):  $P_{mn} = P_{mc} = a^2$ ; a.  $d_{mn} = 2a$ ; b. (25)

- pentru calcul câștigului codării folosim (23) și obținem:

$$C_G[\text{dB}] = 20\lg \frac{d_{mc}}{d_{mn}} - 10\lg \frac{P_{mc}}{P_{mn}} = 20\lg \frac{a\sqrt{10}}{2a} - 10\lg \frac{a^2}{a^2} \approx 4\text{dB} \quad (26)$$

- datorită faptului că  $P_{mc} = P_{mn}$  (acest fapt conduce la scăderea lui  $d_{mc}$ ), câștigul codării nu este influențat decât de efectul codului convoluțional, care conduce la creșterea distanței minime a constelației codate, de la  $a\sqrt{2}$ , vezi fig. 6.b, la  $a\sqrt{10}$ .

- creșterea distanței minime între fazorii constelației codate conduce la creșterea lui  $d_{Efree}$  de  $k$  ori, dar și la creșterea puterii medii a acesteia de  $k^2$  ori, iar efectele asupra  $C_G$  se anulează, vezi (26).

**Notă:** utilizarea precodului diferențial din schema bloc a codului TCM pentru asigurarea invarianței la rotații de  $k \cdot 90^\circ$  e posibilă doar pentru anumite clase de coduri convoluționale. În transmisiile multipurtător (OFDM) nu se mai poate asigura această invarianță.

*Considerente privind utilizarea unor coduri convoluționale cu rată diferită de  $k_0/(k_0+1)$*

- să considerăm utilizarea unui cod cu rata  $R = 1/3$ .

- utilizarea lui implică cvadruplarea constelației, deoarece  $p_c = p_n + 2$ .

- dar utilizarea unei constelații cu  $4N_n$  puncte conduce la creșterea SNR cu 6 dB (pentru constelații QAM) și cu 12 dB (pentru constelații DPSK), pentru a asigura aceeași BER.

- codul corector va trebui să asigure un câștig mai mare de 6 + 2-3 dB (QAM) sau 12+2-3 dB (DPSK) pentru a justifica complexitatea implementării; aceasta în ipoteza că puterile constelațiilor sunt identice.

- pentru a asigura aceste câștiguri (dacă se pot asigura, în cazul DPSK) ar fi necesare coduri cu constrângerea  $K > 9$ , care sunt dificil de implementat. De aceea se folosesc doar modulații codate cu coduri cu  $R = k_0/(k_0+1)$ , care implică numai dublarea constelației și care au  $K = 3-7$  pentru o implementare mai simplă.

### Alocarea fazorii-multibiți prin metoda partiționării mulțimii (Mapping by Set Partitioning –MSP)

- pentru a mări cât mai mult posibil distanța euclidiană minimă în trellis ( $d_{Efree}$ ) s-a elaborat o metodă de alocare multibit-fazor care împarte setul de fazorii din constelație în subseturi, în funcție de valorile biților de cod, astfel încât să maximizeze distanța minimă între fazorii din subseturile definite de multibiți de cod diferiți. În plus această metodă caută să maximizeze și distanța minimă dintre fazorii acelui subset (definit de un multibit de cod).

#### Exemplul 7

- considerăm o modulație TCM  $R = 2/3$  formată dintr-un cod convoluțional cu  $R_c = 1/2$  cu  $K=3$  și  $G = [5,7]_8$  și o constelație 8-PSK.

- deoarece numărul biților informaționali codați  $m = 1$ , rezultă că  $k_0-m = 1$  biți informaționali vor fi transmiși necodați, vezi ex. 3, fig.3.