

Tehnici de modulare multipurtător

Tehnica de transmisie (Modulația) OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplex)

- este denumită în mod curent modulație, dar poate fi privită ca o tehnică ce permite modularea simultană a mai multor semnale purtătoare (subpurtătoare)

Necesitatea multiplexării în frecvență

- datorită propagării multicale, caracteristica de transfer în frecvență a canalelor radio prezintă fenomenul de fading selectiv în frecvență, care introduce variații mari ale atenuării semnalului pentru diferite subbenzi de frecvență ale acestuia;

- un astfel de canal este caracterizat de banda de coerență, B_c

- transmiterea unui debit binar de valoare mare, modulat pe un singur semnal purtător, implică utilizarea unei frecvențe ridicate de simbol, care conduce la o lărgime mare de bandă a semnalului modulat, (1).

$$D = n \cdot f_{s1}; \quad LB_1 = f_{s1}(1 + \alpha); \quad (1)$$

- variațiile caracteristicii de transfer în frecvență a acestui tip de canal provoacă distorsionări semnificative ale semnalului recepționat, care provoacă la rândul lor creșterea semnificativă a BER și apariția unor pachete de erori de lungime mare.

- pentru a reduce efectele caracteristicii canalului, fluxul de date este împărțit în N fluxuri paralele, cu debite binare mai reduse, care sunt modulate pe N semnale purtătoare, vezi (2), în care $u = \Delta/T_s$ este procentul din perioada de simbol ocupat de intervalul de gardă, care va fi detaliat ulterior

$$D = \frac{f_{s1}}{N(1+u)} \cdot N \cdot n = \frac{f_s}{(1+u)} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} n_i = \sum_{i=0}^{N-1} D_i; \quad LB = N \cdot f_s(1 + \alpha) \quad (2)$$

- astfel frecvența de simbol (comună) utilă a acestor transmisii paralele este mai mică de N ori, ceea ce face ca banda de frecvență a unei transmisii să fie redusă, devenind mai mică sau comparabilă cu B_c , ceea ce face ca efectele distorsionării semnalului recepționat de către caracteristica de transfer a canalului să fie sensibil reduse, vezi figura 1

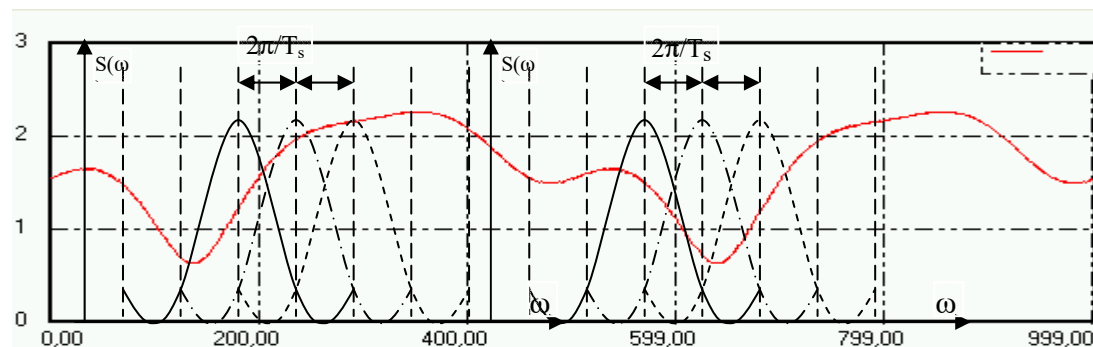


Figura 1. Caracteristica atenuare-frecvență a unui canal cu propagare multicale (multipath) și spectrul unei transmisii multipurtătoare

- abordând acum canalul în domeniul timp, răspunsul la impuls Dirac al unui astfel de canal este constituit dintr-o succesiune de impulsuri care sunt întârziate cu valori ce constituie o variabilă aleatoare cu dispersia σ_t , iar amplitudinilor lor iau valori aleatorii conform unei distribuții Rayleigh.

- acest tren de impulsuri se întinde pe o perioadă mai mare decât perioada de simbol a unei transmisii monopurtător, care are T_s mic, provocând interferență ISI nenulă și necontrolată.

- transmisia multipurtător descrisă mai sus are f_s de valoare mică, ceea ce conduce la o valoare mare a T_s , mai mare sau comparabilă cu întârzierea impulsurilor, reducând ISI introdusă de propagare multicale.

- metoda descrisă mai sus transformă un canal de bandă largă, cu o selectivitate pronunțată în frecvență și o dispersie temporală ridicată, într-un număr mare de canale de bandă îngustă, neselective în frecvență (sau cu o selectivitate redusă) și o dispersie temporală redusă (față de perioada de simbol a transmisiei).

- aceste canale sunt multiplexate în frecvență (FDM) pe subpurtătoare ortogonale.

Principiul OFDM

- fluxul datelor de intrare este subdivizat în N fluxuri de date cu debit redus care sunt modulate independent pe (sub)purtătoare ortogonale, divizând astfel canalul în mai multe "sub-canale" având puterea concentrată în benzi de frecvență mai înguste. Fiecare din aceste subpurtătoare poate fi modulată independent și optimizată din punct de vedere al puterii emise și al performanțelor de eroare impuse.

- dacă cele N subcanale, în care a fost împărțit canalul de bandă largă, au subpurtătoarele ortogonale între ele (pentru a elimina interferența intercanal în momentele de sondare, la recepție) sistemul devine unul O.F.D.M. (Orthogonal Frequency Division Multiplexing).

- pe fiecare subcanal, având frecvența purtătoare f_k ($k = 0, \dots, N-1$), se modulează QAM simbolul complex $c_k = a_k + jb_k$, pe care se mapează un număr de n_k biți și care are coordonatele constante pe o perioadă de simbol, **prin efectuarea produsului complex dintre semnalul purtător complex și semnalul modulator complex.**

- frecvențele subpurtătoarelor sunt separate prin $1/T_s = f_s$ Hz, pentru a se asigura ortogonalitatea lor, și au valorile:

$$f_k = k / T_s = k \cdot f_s; \quad k = 0, 1, \dots, N-1; \quad (3)$$

- semnalul modulat OFDM în banda de bază este suma semnalelor modulate QAM (cu produsul complex) pe fiecare subpurtătoare și are expresia (4) în care $I(t)$ este suma părților reale, iar $Q(t)$ suma părților complexe:

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{k=0}^{N-1} [(a_k \cos \omega_k t - b_k \sin \omega_k t) + j(b_k \cos \omega_k t + a_k \sin \omega_k t)] = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} A_k \cdot (\cos \Phi_k + j \sin \Phi_k) \cdot e^{j\omega_k t} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\omega_k t}; \quad 0 \leq t \leq T_s; \quad (4) \\ z(t) &= I(t) + jQ(t); \quad c_k = a_k + jb_k = A_k \cdot (\cos \Phi_k + j \sin \Phi_k) \end{aligned}$$

- dacă fiecare subpurtătoare este demodulată coerent (înmulțire pe 2 ramuri cu $\cos(\omega_p t)$ și $\sin(\omega_p t)$, urmate de FTJ, vezi cursul de TM), atunci vor apărea produse de tipurile $\cos(\omega_k t) \cdot \cos(\omega_p t)$, $\sin(\omega_k t) \cdot \cos(\omega_p t)$, $\sin(\omega_k t) \cdot \sin(\omega_p t)$ și $\cos(\omega_k t) \cdot \sin(\omega_p t)$.

- după filtrarea TJ, care este echivalentă cu o mediere pe perioada de simbol T_s , toate aceste produse se vor anula, pentru $k \neq p$, ceea ce arată ortogonalitatea subpurtătoarelor

- relația (5) arată acest lucru pentru unul din tipurile de produse:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_s} \int_{T_s} \cos(2\pi k f_s t) \cos(2\pi p f_s t) dt &= \frac{1}{2T_s} \int_{T_s} \cos[2\pi(k+p)f_s t] dt + \frac{1}{2T_s} \int_{T_s} \cos[2\pi(k-p)f_s t] dt = \\ &= \frac{1}{4\pi(k+p)f_s T_s} \sin(2\pi(k+p)f_s t) \Big|_{t=T_s} + \frac{1}{4\pi(k-p)f_s T_s} \sin(2\pi(k-p)f_s t) \Big|_{t=T_s} = 0; \quad k \neq p \end{aligned} \quad (5)$$

- schema de principiu a unui modulator OFDM-BB este prezentată în figura 2.

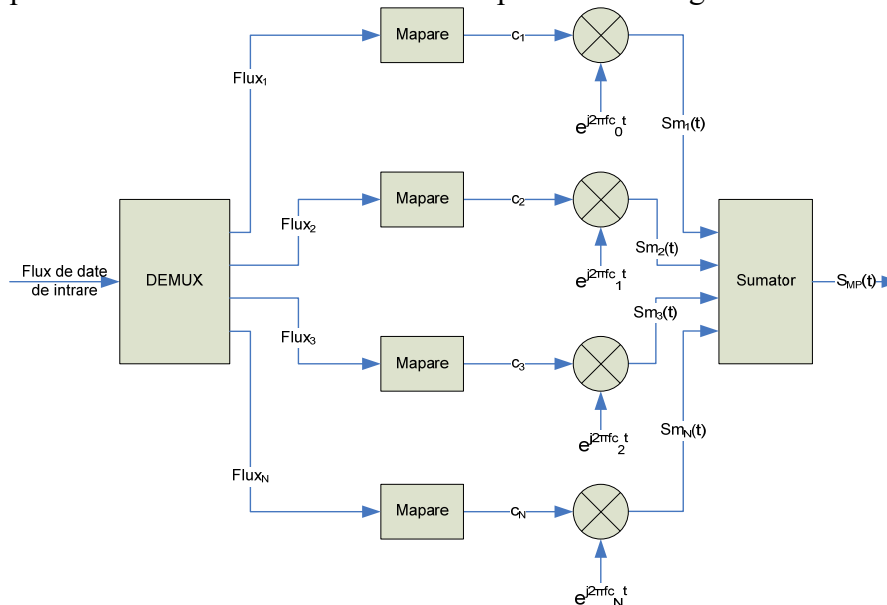


Figura 2 Modulator OFDM-BB

- pentru a îndeplini condițiile menționate mai sus, precum și o eficiență spectrală ridicată a transmisiei, numărul N de subcanale trebuie să fie mare, putând ajunge la ordinul miilor sau zecilor de mii.

- realizarea analogică sau digitală a N modulatori separați ar fi complexă și ineficientă tehnologic.

- demodularea semnalului modulat QAM pe o subpurtătoare poate fi realizată cu metodele descrise în cursurile de TM și TD, capitolele dedicate A+PSK.

- în principiu demodularea unui subcanal OFDM-BB, de index k , implică înmulțirea (complexă) a semnalului modulat cu subpurtătorul local complex conjugat $e^{-j\omega_k t} = \cos \omega_k t - j \sin \omega_k t$, filtrarea TJ a semnalului astfel obținut și sondarea părților reale și imaginare a_k și b_k ale semnalului modulator obținute pe cele două ramuri în cuadratură, așa cum se arată în figura 3.

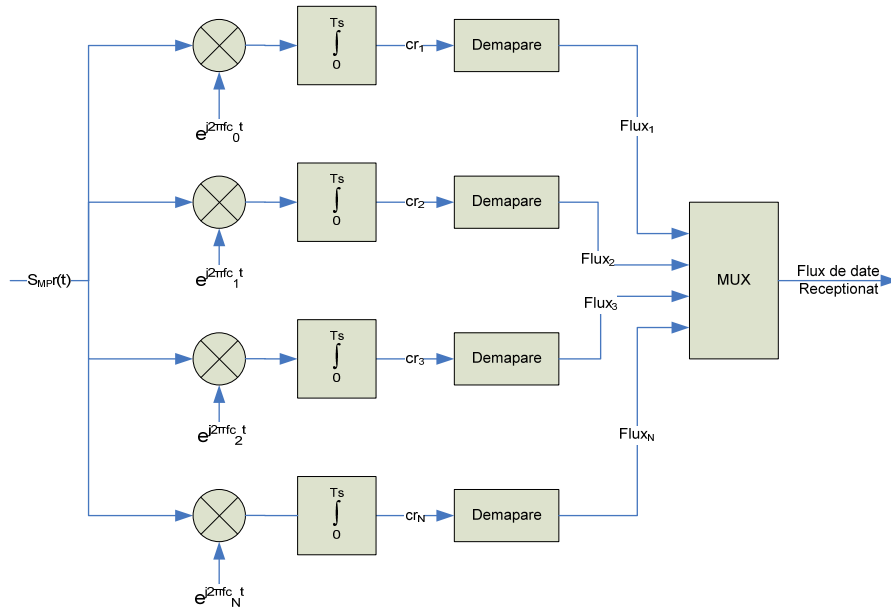


Figura 3. Demodulator OFDM-BB

- datorită ortogonalității subpurtătoarelor (5), după înmulțirea cu subpurtătoarea locală complexă de index k și mediere, semnalul demodulat pe calea k nu mai conține semnalele modulatorie ale celorlate subcanale de index $w \neq k$.
- demodularea separată a celor N subcanale este foarte complexă și ineficientă d.p.d.v. tehnologic.
- al doilea rând al relației (4) arată că semnalul OFDM poate fi privit ca un semnal care are componente spectrale la frecvențele $k \cdot f_s$, având modulele A_k și fazele Φ_k . – vezi desen (frecvență-timp) pe tablă

Modularea-demodularea digitală

Modularea OFDM

- pentru generarea digitală a semnalului $z(t)$ este necesară eșantionarea, cu rata dată de (6), a semnalului de date (a_k și b_k) de pe durata celui de-al i -lea simbol OFDM (cea de a-i-a perioadă T_s), astfel încât să se obțină câte un eșantion al fiecărui nivel modulator de pe fiecare subcanal (index k), și conversia sa A/D.

$$f_e = 1/T_e = N/T_s = N \cdot f_s; \quad (6)$$

- semnalele subpurtătoare vor fi generate folosind aceeași frecvență de eșantionare f_e .

$$\cos 2\pi \cdot k f_s t \Leftrightarrow \cos 2\pi \cdot k \frac{nT_e}{T_s} = \cos \frac{2\pi \cdot kn}{N}; \quad \sin 2\pi \cdot k f_s t \Leftrightarrow \sin 2\pi \cdot k \frac{nT_e}{T_s} = \sin \frac{2\pi \cdot kn}{N}; \quad (7)$$

- semnalul OFDM, pe durata celui de-al i -lea simbol OFDM, dat de (4) are, după această eșantionare, expresia:

$$z(nT_e) \equiv z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \cdot kn/N}, \quad n=0,1,2, \dots, N-1. \quad (8)$$

- (8) reprezintă transformata Fourier inversă discretă (IDFT) în N puncte implementată cu algoritmul IFFT, a semnalului format din câte un eșantion al fiecărui nivel modulator; eșantioanele sunt luate succesiv în ordinea crescătoare a subpurtătoarelor dată de indexul k . Deoarece nivelele modulatorie provenite prin maparea multibiților de date, adică setul de numere complexe c_k , $k=0,1,\dots, N-1$, au valori constante pe durata unei perioade de simbol, care conține N perioade de eșantionare, rezultă că utilizarea câte unei singure perechi de eșantioane pentru fiecare nivel modulator $c_k = a_k + jb_k$, de pe subpurtătoarea de index k , este suficientă pentru a-i defini valoarea.

- integrala de definiție a transformatei Fourier inverse trebuie aplicată pe domeniul limitat de frecvențe $0, \dots, (N-1) \cdot f_s$, iar frecvența nu variază continuu, ci ia valori discrete $k \cdot f_s$; mai mult, timpul nu este nici el continuu, luând valori discrete nT_e . De aceea integrala de definiție a transformatei Fourier inverse se transformă într-o sumă finită.

- în (8), n reprezintă indexul timpului discret (multiplu al perioadei de eșantionare), iar k reprezintă indexul frecvenței discrete (multiplu al frecvenței de simbol OFDM).

- simbolurile modulatorie complexe $c_k = a_k + jb_k$, pot fi coordonatele unor semnale de tip A+PSK, sau ale unor semnale de tip DPSK sau ale oricărui tip de semnale care pot fi generate utilizând tehnica QAM;

- rezultă că fiecare subpurtătoare poate fi modulată distinct cu diverse tipuri de modulații, prin "construirea" corespunzătoare a tabelului de mapare al fiecărui cadru (simbol) OFDM; trebuie însă ținut cont de complexitatea realizării tabelului de mapare (și implicit a celui de demapare-decodare, la recepție)
- dacă $a_k = b_k = 0$, atunci subpurtătoarea respectivă are amplitudine nulă.
- pentru a genera N canale unice, este necesară transmiterea de eșantioane complexe.
- ieșirea IDFT-ului (8) poate fi pusă sub forma (9), vezi și (4):

$$z(n) = \sum_{k=1}^n [a_k + jb_k] \left[\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} [(a_k \cos(\omega_k nT_e) - b_k \sin(\omega_k nT_e)) + j(b_k \cos(\omega_k nT_e) + a_k \sin(\omega_k nT_e))] = I(n) + jQ(n)$$

- ieșirile IDFT generează succesiv câte un eșantion în timp (nT_e), $n = 0, \dots, N-1$, al părților reale și imaginare ale semnalului OFDM
- aceste ieșiri (N reale și N imaginare) sunt multiplexate separat pentru a obține o succesiune de N eșantioane complexe pe o perioadă de simbol T_s , vezi figura 4.

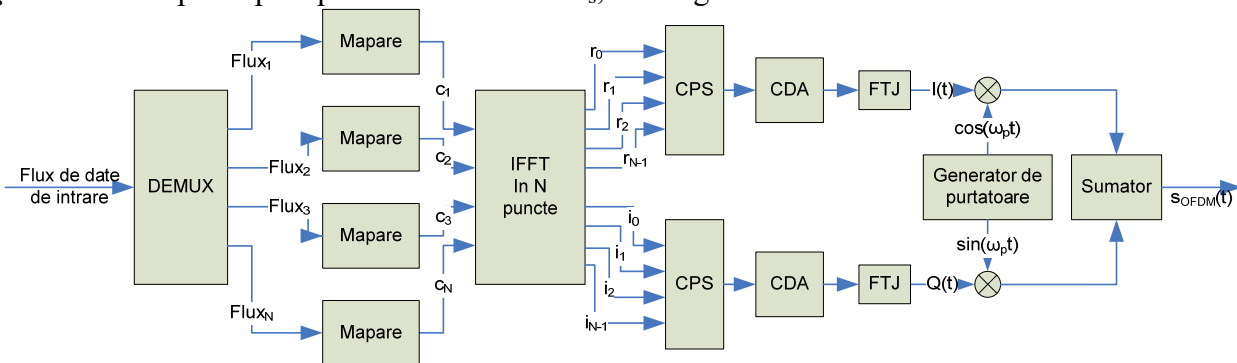


Figura 4. Schema bloc a emițătorului OFDM-QAM realizat cu IFFT.

- după această multiplexare, cele două semnale $I(n)$ și $Q(n)$ sunt convertite D/A și filtrate TJ-RRC pentru a le limita banda de frecvență și a reduce ISI intersimbol OFDM, obținându-se semnalele $I(t)$ și $Q(t)$ care formează împreună semnalul OFDM în banda de bază, vezi ecuația (10):

$$z(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k f_s n T_e} \Rightarrow z(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi k f_s t} = I(t) + jQ(t);$$

- semnalul OFDM-BB este alcătuit din două semnale reale, care sunt părțile reală și imaginară ale IDFT, care ocupă aceeași bandă limitată de frecvență.
- pentru a putea fi transmise simultan, aceste semnale trebuie translatate în banda de frecvență a canalului de transmisie, printr-o modulare QAM pe frecvența purtătoare din canal f_p , vezi curs TM, așa cum se arată în ecuația (11) și figura 4; modulația QAM folosită pentru transmisia semnalului OFDM-BB pe canal transmite doar partea reală a produsului complex dintre semnalul modulator complex OFDM-BB și semnalul purtător complex.

$$I(t) \cos \omega_p t - Q(t) \sin \omega_p t = \text{Re}\{z(t)e^{j\omega_p t}\} = \text{Re}\left\{\sum_{k=0}^{N/2} c_k e^{j2\pi(f_p + k f_s)t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} c_{N-k} e^{j2\pi(f_p + k f_s)t}\right\}$$

- proprietățile spectrale ale semnalului OFDM modulat pe purtătorul din canal, vezi ecuația (11), vor fi discutate într-un paragraf ulterior.

Demodularea

- distorsiunile lineare ale canalului analogic sunt modelate de răspunsul complex h_k pe fiecare subpurtătoare k , acesta indicând distorsiunile de atenuare și fază introduse de transmisia analogică în subbanda de frecvență a subpurtătorului k .
- semnalul analogic recepționat va fi de forma (12); limitele sumării vor fi explicate în paragraful dedicat proprietăților spectrale

$$r(t) = \text{Re}\left[\sum_{k=0}^{N/2} h_k c_k e^{j(\omega_p + \omega_k)t} + \sum_{k=-N/2}^{-1} h_{N-k} c_{N-k} e^{j(\omega_p + k\omega_s)t}\right], 0 \leq t \leq T_s$$

- motivația înmulțirii semnalului modulator complex cu răspunsul complex al canalului, în locul produsului de convoluție dintre ele, va fi dată după explicarea intervalului de gardă.

- înaintea demodulării, la recepție au loc următoarele operații:

- translația semnalului în banda de bază, printr-o demodulare QAM în varianta cu FTJ (vezi cursul de TM); în acest material vom presupune că purtătorul local este perfect sincronizat cu purtătorul recepționat ($\theta(t) \rightarrow 0$).

- conversia analog-digitală a semnalelor de pe cele două căi, în fază și în cuadratură, obținându-se $2N$ valori (N reale, N imaginare) pe o perioadă de simbol OFDM. Se presupune că frecvența de eșantionare a receptorului este egală cu frecvența de eșantionare a emițătorului, iar cele două semnale de eșantionare sunt sincronizate.

- conversia serie-paralel a eșantioanelor semnalului modulat care corespund unui cadru (simbol) OFDM, ceea ce implică sincronizarea unui tact local de simbol OFDM cu frecvența $f_{s\text{OFDM}} = f_e/N$.

- semnalul OFDM complex, după translatarea în BB folosind un oscilator local cu frecvența f_p la demodularea QAM, va fi:

$$z'(t) = \left[\sum_{k=0}^{N-1} h_k c_k e^{j2\pi k t / T_s} \right] = \frac{1}{2} [I'(t) - jQ'(t)] \quad (13)$$

- frecvența maximă a acestui semnal este de f_e , dar el conține atât partea reală cât și cea imaginară, și poate fi eșantionat cu o frecvență f_e . (Teorema eșantionării studiată în anii anteriori se referă numai la semnale reale!).

- dacă în ecuația (13), după o amplificare cu 2 și o schimbare a semnelor lui Q' , se substituie $t = nT_e$ se obține expresia semnalului eșantionat, după translația de pe frecvența purtătoare în banda de bază:

$$z'(nT_e) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k c_k e^{j2\pi k n / N} = \sum_{k=0}^{N-1} h_k c_k e^{j2\pi k n / N}, \quad n=0,1,\dots,N-1 \quad (14)$$

- demodularea propriu-zisă a semnalului OFDM este efectuată prin aplicarea transformatei Fourier discrete (implementată prin algoritmul FFT), în N puncte, semnalului $z'(nT_e)$.

- în integrala de definiție a transformatei Fourier timpul este discontinuu, $t = nT_e$, $dt = T_e$ și este limitat la o perioadă de simbol OFDM, $n = 0, \dots, (N-1)T_s$, ceea ce face ca integrala să se transforme în suma finită de la începutul ecuației (15).

- să arătăm că la ieșirea cu index w a acestui bloc se obțin nivelele demodulate pe subpurtătoarea de index w , pentru orice $w = 0, \dots, N-1$:

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z'_n \cdot e^{-j2\pi w n / N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_w \cdot c_w \cdot e^{\frac{j2\pi w n}{N}} \cdot e^{-\frac{j2\pi w n}{N}} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq w}}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_k \cdot c_k \cdot e^{\frac{j2\pi(k-w)n}{N}} \quad (15)$$

- notând cu $p = (k-w)_{\text{mod}(N)}$, p va lua valori de la 1 până la $N-1$ și ecuația (15) devine:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} z'_n \cdot e^{-j2\pi w n / N} &= \frac{1}{N} \cdot h_w c_w + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} h_p \cdot c_p \cdot e^{\frac{j2\pi p n}{N}} = \\ &= h_w c_w + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h_p \cdot c_p}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{\frac{j2\pi p n}{N}} \right)^n = h_w c_w + \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h_p \cdot c_p}{N} \cdot \frac{e^{\frac{j2\pi p N}{N}} - 1}{e^{\frac{j2\pi p}{N}} - 1} = h_w c_w \end{aligned} \quad (16)$$

- relația (16) arată că DFT furnizează la ieșirea de index w , simbolul complex modulat pe intrarea w de la emisie înmulțit cu coeficientul complex al canalului ($|h_w| \cdot e^{j\phi_w}$) pe frecvența $w \cdot f_s$.

- relația (16) mai arată că, ieșirea de index w nu este influențată de simbolurile modulate pe celelalte subpurtătoare $k \neq w$. Aceasta se datorează ortogonalității subpurtătoarelor;

- demodularea prin aplicarea DFT în domeniul digital este echivalentă cu înmulțirea semnalului complex în banda de bază recepționat cu subpurtătoarea complexă de index w (frecvență $w \cdot f_s$) urmată de filtrarea TJ, aceste operații fiind efectuate simultan pentru toate cele N subpurtătoare.

- datorită ortogonalității subpurtătoarelor, semnalul modulator de pe subpurtătoarea w , nu va influența semnalele demodulate pe celelalte subpurtătoare, de index diferit de w .

TEMĂ: Arătați că înmulțirea cu subpurtătorul local complex cu index w va produce ieșiri nule la ieșirile corespuizătoare celorlalte subpurtătoare.

- aceste considerente sunt valabile atâta vreme cât purtătorul local (de frecvență f_p) este perfect sincronizat cu purtătorul recepționat, iar frecvența de simbol și frecvența de eșantionare de la recepție sunt perfect sincronizate cu cele de la emisie.

- în situația reală, când cele două semnale locale nu sunt perfect sincronizate cu cele ale semnalului recepționat, semnalele demodulate suferă distorsionări semnificative.
- efectele recuperării incorecte a purtătorului local sunt similare cu cele de la demodularea QAM pe semnal monopurtător în ceea ce privește interferența între nivelele a_w și b_w modulate pe același subpurtător de indice w ; lor li se adaugă însă interferențele datorate semnalelor modulate pe celelalte subpurtătoare, de indice diferit de w .
- studiul acestor efecte va fi prezentat pe scurt la laborator; o analiză detaliată depășește cadrul cursului de față și va fi efectuată în cadrul studiilor masterale.
- schema bloc a demodulatorului QAM-OFDM este prezentată în figura 5, în care nu au fost reprezentate blocurile de recuperare ale semnalelor de tact, cele decizie-decodificare și serializare sau distribuie către destinatari a datelor demodulate.

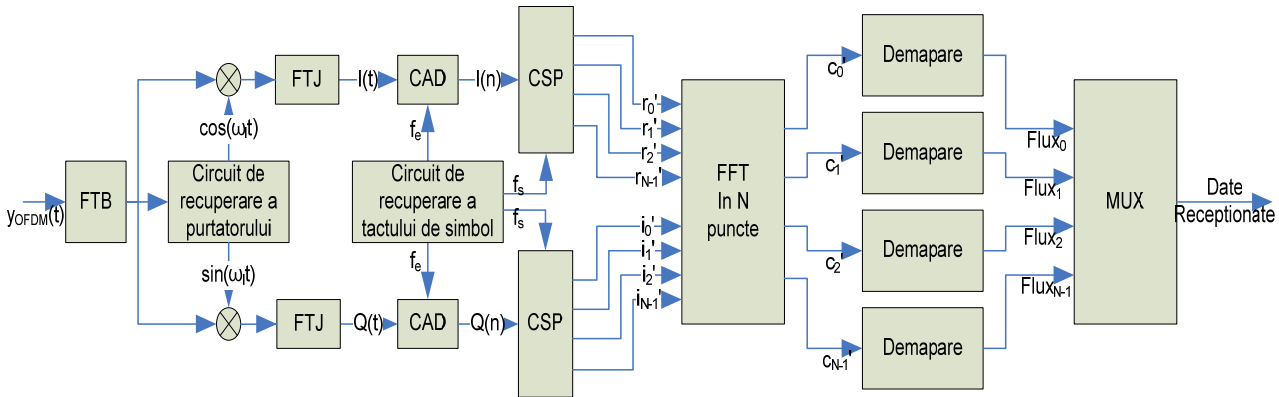


Figura 5. Schema bloc a receptorului QAM-OFDM realizat cu FFT.

- concluzionând, demodularea nivelelor modulate afectate de caracteristica de transfer a canalului, $h_k c_k$, se obține aplicând transformata Fourier discretă (DFT) setului de eșantioane $\{z'_n\}$, $n=0,1,\dots,N-1$.
- dacă se presupune că, atât frecvența purtătoare cât și frecvența de cadru OFDM (și implicit frecvența de eșantionare) au fost corect recuperate la recepție și dacă se ignoră distorsiunile introduse de canal, cele N ieșiri ale DFT-ului sunt nivelele complexe modulate ale fiecărei subpurtătoare și sunt constante pe durata unei perioade de simbol T_s .
- transformatele Fourier discrete (inversă, la emisie, și directă, la recepție) se implementează prin algoritmi IFFT și respectiv FFT.
- din cele de mai sus rezultă că în transmisiile OFDM, alături de operațiile de modulare-demodulare OFDM (IFFT-FFT în N puncte) și de modularea-demodularea QAM (pentru translația pe/de pe purtătoarea canalului radio), sunt necesare următoarele operații de sincronizare:
 - sincronizarea tactului de simbol OFDM, pentru a delimita corect, după translația în BB și eșantionare, eșantioanele ce corespund unei perioade de simbol OFDM,
 - sincronizarea semnalului de eșantionare (în special dacă pe fiecare subpurtătoare se folosesc constelații QAM cu $M > 4$)
 - sincronizarea purtătorului local.

Proprietăți spectrale ale semnalelor OFDM

- semnalul modulator al unei subpurtătoare OFDM este un impuls dreptunghiular, $g(t)$ (17.a), de durată T_s , care este modulată fără a fi filtrat.
- nefiltrarea semnalului modulator este o condiție necesară pentru obținerea modulației OFDM prin utilizarea algoritmului IFFT.
- spectrul corespunzător acestui impuls dreptunghiular va fi un sinus atenuat, vezi (17.b):

$$g(t) = \begin{cases} 1; & t \in \left[-\frac{T_s}{2}, \frac{T_s}{2}\right]; \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}; \quad \text{a.} \quad G(\omega) = T_s \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega T_s}{2}\right)}{\frac{\omega T_s}{2}}; \quad \text{b.} \quad (17)$$

- spectrul semnalului OFDM-BB e format din spectre elementare sinus atenuat, axate pe subpurtătoarele distanțate între ele cu ω_s , după cum se prezintă în figura 6.
- subcanalele OFDM (semnalele modulate pe subpurtătoare) prezintă o suprapunere spectrală accentuată, vezi figura 6, demodularea simbolurilor de pe un anumit canal fiind totuși posibilă datorită ortogonalității subpurtătoarelor.

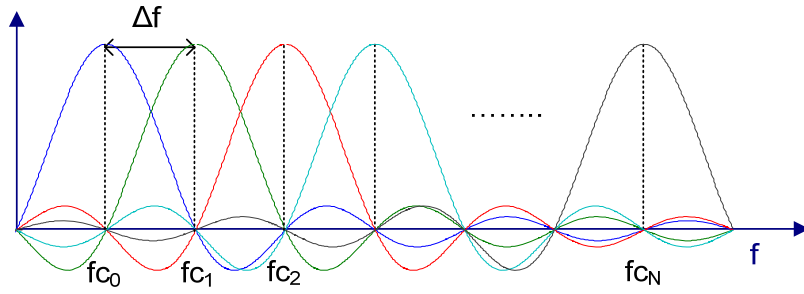


Figura 6. Suprapunerea spectrală a semnalelor OFDM.

- lărgimea de bandă a semnalului OFDM banda de bază, considerând strict necesar pentru o demodulare corectă numai lobul principal de pe fiecare sub-purtătoare, este:

$$LB_{OFDM-BB} = N \cdot f_s \quad (18)$$

- eșantionând semnalul cu lărgimea de bandă dată de ecuația (18), aparent nu se respectă teorema eșantionării semnalelor reale, dar dacă se consideră că semnalul modulat pe o sub-purtătoare este un semnal complex de forma:

$$s_k(t) = x_k(t) \cdot e^{j\omega_k t}; \quad x_k(t) = c_k \cdot g(t); \quad \omega_k = 2\pi f_k; \quad (19)$$

- spectrul semnalului modulat pe sub-purtătoarea k va fi, pe baza teoremei convoluției:

$$S_k(\omega) = c_k \cdot G(\omega) * [2\pi\delta(\omega + \omega_k)] = 2\pi \cdot G(\omega + \omega_k) \quad (20)$$

unde $\delta(\bullet)$ este funcția Dirac, [37]. Pe baza relației (20) spectrul semnalului OFDM este descris de:

$$S_{OFDM}(\omega) = 2\pi \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot G(\omega + \omega_k) \quad (21)$$

- considerând că semnalul modulator este un semnal cu banda de frecvență finită, relația(1.21) arată că semnalul OFDM bandă de bază are componente spectrale numai în domeniul frecvențelor pozitive, vezi figura 7.a.

- în cazul în care semnalul modulat pe o sub-purtătoare ar fi un semnal real descris de (22), spectrul semnalului OFDM va fi descris de ecuația (23) [37], adică spectrul de frecvență a semnalului are atât componente în domeniul negativ cât și în domeniul pozitiv a frecvențelor, vezi figura 7.b.

$$\sum_{k=0}^{N-1} Re\{c_k \cdot e^{j\omega_k t}\} = \sum_{k=0}^{N-1} (a_k \cos \omega_k t - b_k \sin \omega_k t) \quad (22)$$

$$S_{OFDM}(\omega) = 2\pi \left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k(\omega - \omega_k) + \sum_{k=0}^{N-1} X_k(\omega + \omega_k) \right] \quad (23)$$

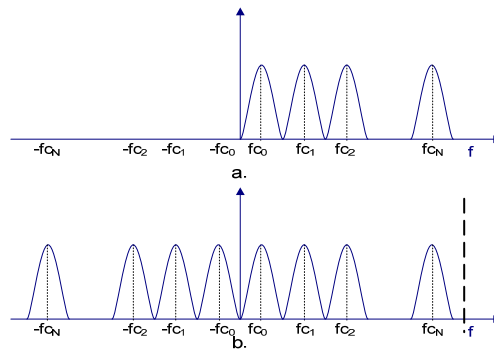


Figura 7. Spectrul semnalului OFDM+BB cu produs complex(a.) și cu partea reală (b.)

- semnalul OFDM în banda de bază este generat digital cu frecvența de eșantionare f_e . De aceea spectrul său unilateral (21) trebuie înmulțit cu $\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j \cdot i \cdot \omega_e}$; rezultă că spectrul unilateral dat de (21) va

apărea atât pe multiplii pozitivi ai lui f_c cât și pe cei negativi, ceea ce face ca spectrul semnalului OFDM-BB generat digital să aibă componente atât în domeniul frecvențelor pozitive, cât și în domeniul frecvențelor negative

- ținând cont de considerentele de mai sus și de relația (21) și de figura 7.a rezultă că *spectrul semnalelor componente OFDM-BB nu va mai prezenta simetrie față de axa Oy, datorită transmiterii produselor complexe $c_k \cdot e^{j\omega k t}$ pe fiecare subpurtătoare*

- aceasta face ca subpurtătoarea de index $N-m$ din spectrul semnalului OFDM-BB, care a fost modulată cu nivelul modulator c_{N-m} , să se afle în spectrul semnalului modulat pe purtătoarea f_p din canal la frecvența $f_p - m f_s$, vezi figura 8

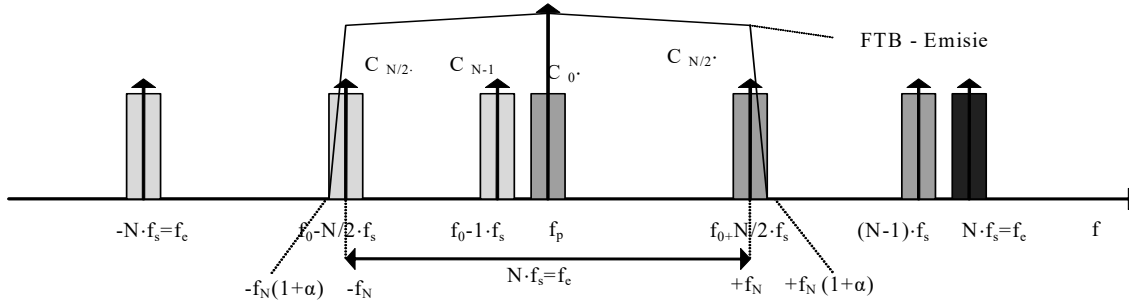


Figura 8.
Spectrul semnalului OFDM generat digital și translatat în banda canalului de transmisie

- datorită acestei proprietăți, din spectrul semnalului modulat prezintă interes doar banda $\left[f_p - \frac{N}{2} \cdot f_s; f_p + \frac{N}{2} \cdot f_s \right] = N \cdot f_s$. Deci lărgimea de bandă a semnalului OFDM pe purtătoare este egală cu lărgimea de bandă a semnalului modulator OFDM-BB, datorită transmiterii produselor complexe pe fiecare subpurtătoare.

- semnalul translatat va fi filtrat trece-bandă, $[f_0 - Nf_s/2, f_0 + Nf_s/2]$

- la translatarea pe purtătoarea canalului f_p , datorită acestei nesimetrii, subcanalele vor fi dispuse, în raport cu frecvența purtătoare, în felul următor (vezi fig. 8):

• subcanalele 1 până la $N/2 - 1$, vor fi plasate în banda laterală superioară, iar canalele $N/2 + 1$ până la $N-1$ vor fi plasate în banda laterală inferioară, în ordine crescătoare înspre purtătoare, adică:

$$\text{la } \omega_p - m \cdot f_s \Rightarrow c_{-m} = c_{N-m} \text{ pt } m \leq N/2 \quad (24)$$

• canalul $N/2$, va avea partea inferioară în banda superioară a semnalului translatat și partea superioară în banda inferioară a semnalului translatat.

• canalul 0 va fi axat pe purtătoarea f_p .

- datorită realizării practice a filtrului TB de ieșire, canalul $N/2$, va fi transmis în ambele benzi laterale, ceea ce face ca după translatarea în BB la recepție el să apară distorsionat. De aceea se impune precauție în modularea acestui canal.

- de asemenea, canalul 0 (și câteva din canalele învecinate) este (sunt) lăsat(e) uneori nemodulat(e), pentru a se transmite un semnal pilot pe frecvența purtătoare.

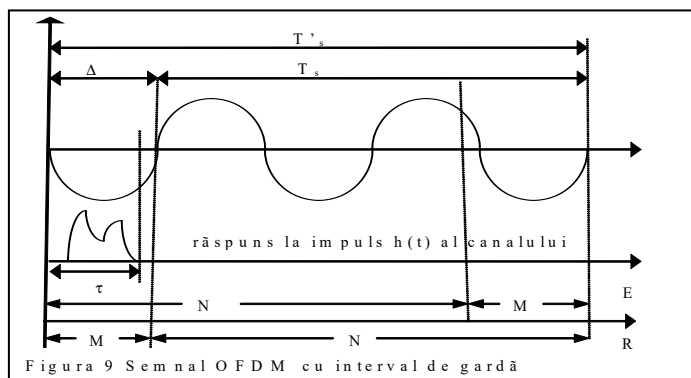
Intervalul de gardă

- o condiție esențială pentru demodularea corectă a simbolurilor transmise cu modulația OFDM este legată de menținerea ortogonalității subpurtătoarelor, aceasta fiind singura posibilitate de a se elimina efectul suprapunerii spectrale între subcanale.

- datorită propagării multicale și întârzierilor diferite introduse de aceasta, apare interferență intersimbol între simbolurile OFDM transmise; prin simbol OFDM se înțelege suma tuturor semnalelor de pe toate subpurtătoarele, transmise pe durata T_s , a perioadei de simbol a datelor paralele.

- această interferență se manifestă prin extinderea în timp a simbolurilor OFDM, ceea ce duce la suprapunerea parțială, în timp, a acestor simboluri. Datorită debitului redus al simbolurilor OFDM această interferență, raportată la perioada de simbol T_s , nu este mare, dar totuși o parte a simbolului OFDM va fi afectată, conducând la pierderea ortogonalității subpurtătoarelor și demodularea eronată a datelor transmise. - **vezi desen pe tablă**

- această pierdere a ortogonalității este cauzată de distorsionarea unei părți din eșantioanele semnalului OFDM care vor intra în blocul FFT. Relațiile (15) și (16) arată că fiecare eșantion de timp al semnalului OFDM influențează fiecare ieșire FFT, și implicit fiecare simbol complex c_k demodulat, deoarece el reprezintă un eșantion al sumei semnalelor modulate pe fiecare subpurtătoare.



- o metodă de a reduce efectul propagării multicale, și implicit a ISI introduse de aceasta, constă în inserarea unui interval de gardă între simbolurile OFDM, adică în mărirea duratei simbolului OFDM fără a mări numărul de subpurătoare și implicit, fără a micșora separația de frecvență f_s dintre ele.

- durata acestui interval de gardă ($\Delta = u \cdot T_s$; $u < 1$, sau $M \cdot T_c$ eşantioane, $M < N$; $u = M/N$) trebuie să fie mai mare decât întârzierea maximă a propagării multicale τ_M , adică $\Delta > \tau_M$

- partea anterioară a unui simbol OFDM care se estimează că va fi distorsionată de interferența intersimbol introdusă de simbolul anterior nu va fi folosită în demodulare. Cele M eşantioane componente vor fi transmise încă o dată la sfârșitul simbolului respectiv, vezi figura 9.

- inserarea unei porțiuni din semnalul modulat pe durata Δ a intervalului de gardă, cu păstrarea continuității semnalului modulat pe durata $T_s' = T_s(1+u)$, se numește *prefix ciclic*.

- dacă durata intervalului de gardă se alege mai mare decât τ_M întârzierilor introduse de canalul cu propagare multicale, simbolurile OFDM vor fi transmise practic fără interferență intersimbol.

- la recepție, primele M eşantioane vor sosi distorsionate de ISI introdus de canal și vor fi șterse, iar receptorul va folosi ultimele N eşantioane. Acest grup conține toate eşantioanele necesare demodulării datelor, dintr-o perioadă de simbol T_s' , dar ele sunt dispuse în următoarea ordine: $M, N-1, 0, \dots, M-1$. Această situație impune introducerea unei operații de reordonare a eşantioanelor sosite la recepție.

- introducerea intervalului de gardă și a prefixului ciclic pe durata acestuia va afecta distribuția spectrală și eficiența spectrală a semnalului modulat OFDM, Aceasta conduce la reducerea gradului de suprapunere spectrală între semnalele de pe subpurătoarele kf_s . - **vezi explicații pe tablă si figura 6**

- datorită periodicității semnalului transmis (cauzată de introducerea intervalului de gardă în maniera descrisă anterior) va apărea o convoluție ciclică (în locul unei convoluții liniare) între răspunsul la impuls al canalului și semnalul transmis. Aceasta va face ca efectul canalului să fie redus la o multiplicare element cu element între transformata Fourier a răspunsului la impuls al canalului (h_w - coeficientul canalului pe subpurătoare w) și semnalul transmis, ceea ce va introduce atenuări și întârzieri constante pe fiecare sub-bandă f_s , dacă $T_s' = T_s(1+u)$ e mai mic decât T_c , timpul de coerență al canalului. Aceste câștiguri și întârzieri vor putea fi apoi eliminate la recepție cu un egalizor, eliminându-se astfel și interferența între subcanale (InterChannel Interference - ICI) introdusă de propagarea multicale.

- frecvența de simbol utilă f_s' (25) va fi însă mai mică decât f_s :

$$f_s' = f_s / (1+u) < f_s; \quad \text{- vezi desen pe tablă} \quad (25)$$

Schema bloc simplificată a lanțului de transmisie OFDM

- Schema bloc simplificată a unui sistem OFDM care realizează operațiile descrise mai sus este dată în figura 10

Eficiența spectrală a transmisiilor OFDM

- pentru a calcula debitul binar al transmisiei considerăm că numărul de subcanale utile N_u ($N_u \leq N$) este împărțit în G grupuri a câte g_i subpurătoare/grup și că fiecare subpurătoare din cadrul unui grup este modulată cu o constelație cu n_i biți/simbol QAM;

- dacă transmisia are frecvența de simbol f_s , în urma inserării intervalului de gardă frecvența de simbol efectivă (utilă) devine f_s' , dată de relația (25).

- în aceste ipoteze debitul binar nominal al transmisiei este:

$$D_n = f_s' \cdot \sum_{i=1}^G g_i \cdot n_i = \frac{f_s}{1+u} \sum_{i=1}^G g_i \cdot n_i; \quad \sum_{i=1}^G g_i = N_u; \quad (26)$$

- pentru cazul în care toate cele N_u subpurătoare se modulează cu același număr n de biți/simbol QAM, adică $G = 1$, relația (26) devine:

$$D_n = f_s' \cdot N_u \cdot n = \frac{f_s \cdot N_u \cdot n}{1+u}; \quad (27)$$

- banda de frecvență ocupată de semnalul OFDM după filtrare este uneori aproximată prin $BW_{OFDM} \approx (N+3)f_s$, însă banda ocupată depinde de caracteristica de filtrare folosită. În multe studii lărgimea de bandă utilizată se consideră a fi egală $BW_{OFDM} = N \cdot f_s$.

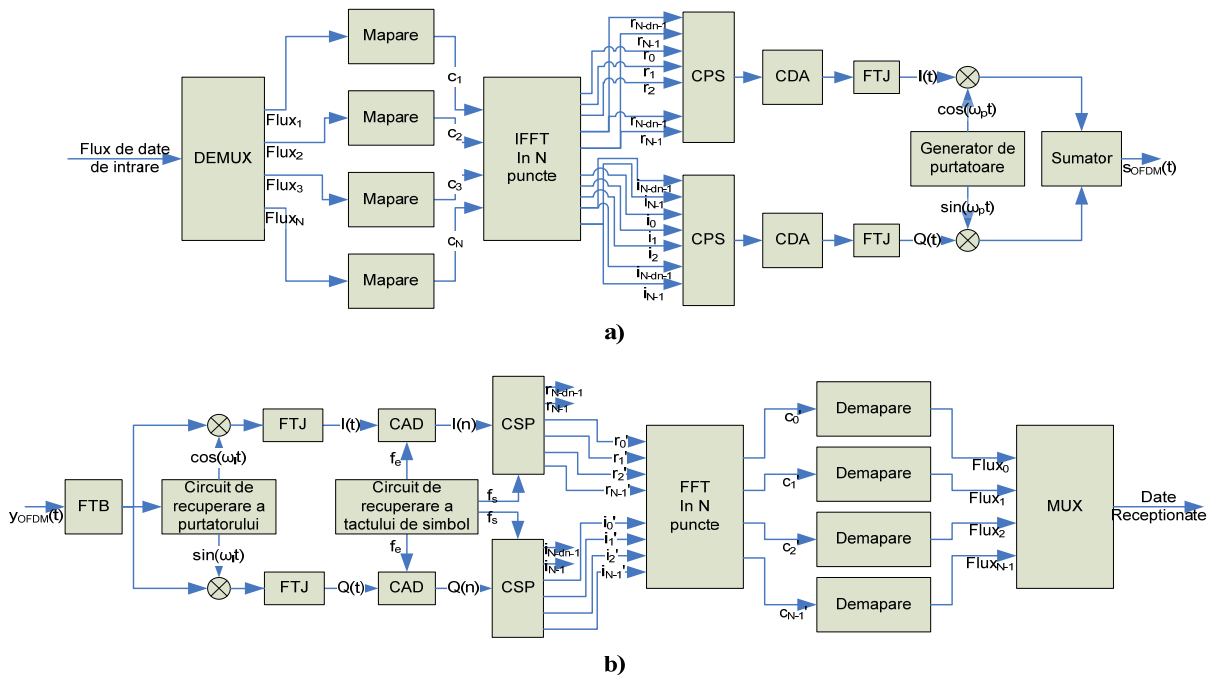


Figura 10 Lanțul de transmisie simplificat al unui sistem OFDM; a. emisia; b. recepția

- eficiența spectrală nominală a transmisiei este :

$$\beta_{n\text{OFDM}} = \frac{D_n}{BW_{\text{OFDM}}} = \frac{f_s \cdot N_u \cdot n}{(1+u)(N+3) \cdot f_s} = \frac{N_u \cdot n}{(1+u)(N+3)} \approx \frac{n}{(1+u)} \cdot \frac{N_u}{N}; \quad \text{pt. } N \text{ foarte mare}; \quad (28)$$

- relația (28) arată că eficiența spectrală nominală scade de circa $(1+u)$ ori; acesta este „prețul” plătit pentru eliminarea ISI între simbolurile OFDM, prin introducerea intervalului de gardă.

- de asemenea, eficiența spectrală mai este micșorată de procentul de subpurtătoare „de serviciu” din numărul total de subpurtătoare transmise.

- expresia (28) a eficienței spectrale nominale nu include „calitatea” biților demodulați, măsurată prin BER.

- dacă se consideră doar biții corect recepționați, atunci transmisia este caracterizată de debitul binar efectiv (throughput) care are expresia (29); eficiența spectrală efectivă se obține împărțind throughputul la banda de frecvență ocupată BW_{OFDM} .

$$\Theta(\text{SNR}) = D_n \cdot (1 - \text{BER}(\text{SNR})); \quad (29)$$

- în ipoteza recuperării și sincronizării perfecte a purtătorului local, a tactului de simbol și a celui de eșantionare în receptor, transmisia OFDM poate fi privită ca o suprapunere de semnale modulate QAM (cu constelații DPSK sau A+PSK) nefiltrate.

- probabilitatea de eroare asigurată de transmisia OFDM în prezența zgomotului gaussian depinde de probabilitatea de eroare de bit BER_i asigurată de constelația utilizată (n_i biți/simbol) pe fiecare grup de g_i subpurtătoare, care la rândul ei depinde de valoarea SNR_i a raportului semnal/zgomot de pe acel grup de subpurtătoare. Ea se calculează folosind relațiile definite pentru constelațiile utilizate în cazul transmisiei pe o singură purtătoare pe canal AWGN, vezi cursul TM.

- pentru calculul SNR, puterea semnalului va fi egală cu puterea medie a constelației utilizate pe subpurtătoarea respectivă, iar banda de frecvență utilă a semnalului modulat (necesară pentru calculul puterii zgomotului) se va considera egală cu f_s .

- presupunând o mapare multibit fazor de tip Gray, BER a OFDM ar avea expresia:

$$\text{BER} = \frac{\sum_{i=1}^G p_{ei}(\text{SNR}_i) \cdot g_i}{\sum_{i=1}^G n_i \cdot g_i}; \quad (30)$$

- dacă toate subpurtătoarele folosesc aceeași constelație, probabilitatea de eroare este exprimată de (31);

$$\text{pt. } n_i = n \Rightarrow \text{BER} = \frac{\sum_{i=1}^{N_u} p_{ei}(\text{SNR}_i)}{N_u n}; \quad \text{pt. } G = 1, g_1 = N_u \text{ si } \text{SNR}_i = \text{SNR} \Rightarrow \text{BER} = \frac{p_e}{n} \quad (31)$$

- rețineți că în general nu se poate presupune că toate grupurile de subpurtătoare au același SNR. În acest ultim caz, probabilitatea de eroare a OFDM e media aritmetică a probabilităților de eroare asigurate de constelația utilizată pentru valorile SNR de pe fiecare subpurtătoare.

- calculul probabilității de eroare de bit asigurată de transmisia OFDM ce utilizează constelații QAM sau DPSK pe canale cu fading Rayleigh sau Rice și selective sau neselective în frecvență este complex și nu este tratat în cursul de față. Trebuie însă menționat că valorile uzuale ale BER pe aceste canale sunt de ordinul 10^{-2} - 10^{-4} , ceea ce face ca OFDM să fie utilizată numai în combinație cu coduri corectoare de erori, generând transmisii COFDM.

Considerații privind PAPR

- datorită faptului că semnalul modulat OFDM este o sumă de semnale modulate A+PSK, amplitudinea semnalului rezultat are variații foarte mari, în special pentru număr mare de subpurtătoare, și implicit valori ridicate ale raportului dintre puterea de vârf și puterea medie ale semnalului modulat.

- această caracteristică introduce distorsiuni semnificative ale semnalului modulat la trecerea prin amplificatoarele HP-RF;

- există numeroase metode de reducere a efectelor HP-RF asupra semnalului modulat, dar cu toate acestea efectele rămân semnificative și trebuie luate în considerare la calculul BER.

- din acest motiv în unele sisteme de transmisiuni s-a trecut la utilizarea unei tehnici de transmisie numită SC-FDM, în locul tehnicii OFDM, pentru sensul Uplink, unde amplificatorul final al stației mobile prezintă neliniarități mai pronunțate.

Modulația OFDM codată (Coded OFDM) - COFDM

- pe canale radio probabilitățile de eroare asigurate de transmisiile OFDM sunt de ordinul 10^{-2} – 10^{-4} și de aceea modulația OFDM trebuie utilizată împreună cu coduri corectoare de erori, generând modulația Coded OFDM (COFDM)

- modulațiile codate utilizate sunt, cel mai adesea modulații codate cu extensie de bandă; transmisia codată utilizează aceleași constelații ca și cea necodată, biții de control ai codului utilizat fiind transmiși pe un număr de purtătoare suplimentare (față de numărul de subpurtătoare necesar pentru a transmite doar biții informaționali).

- în multe aplicații modulația OFDM utilizează coduri concatenate, codul exterior fiind destinat corectării pachetelor de erori.

- datorită structurii sale paralele, modulația OFDM asigură o întrețesere a datelor ce urmează a fi transmise, întrețesere care îmbunătățește performanțele codurilor concatenate.

Avantaje și dezavantaje ale tehnicii OFDM

În concluzie, sistemele multipurtătoare bazate pe OFDM prezintă următoarele avantaje:

- eficiență spectrală ridicată
- implementare digitală simplă prin utilizarea IFFT/FFT
- receptor cu complexitate relativ redusă, eliminarea simplă a ISI și ICI, datorate întârzierilor, prin introducerea prefixului ciclic
- posibilitatea utilizării a adaptive a diverselor modulații, pe diferite sub-purtătoare, în funcție de caracteristicile canalului

Dezavantajele sistemelor OFDM sunt:

- datorită factorului PAPR(peak-to-average power ratio) ridicat, transmisia semnalelor multipurtătoare necesită utilizarea unor amplificatoare lineare de radiofrecvență - nu se poate asigura la echipamentele mobile “handheld”!
- eficiența spectrală diminuată datorită introducerii intervalului de gardă
- sensibilitate mai mare la împrăștierea Doppler decât transmisiile monopurtător
- zgomotul de fază, datorat imperfecțiunilor de implementare a emițătorului și receptorului, reduce performanțele sistemului.
- este necesară o sincronizare foarte precisă a fazei purtătorului și a semnalelor de tact locale, folosite în receptor

Aplicații ale modulației COFDM

- principalele aplicații ale modulației COFDM, cu particularitățile aferente, sunt:

- în sistemele de transmisie terestră a televiziunii digitale DVB-T; se utilizează 6800 sau 1800 purtătoare utile codate cu coduri convoluționale și RS. Noile standarde DVB-T2 utilizează 16000 sau 32000 subpurtătoare și coduri LDPC; DVB-H[49], T-DMB[50] și ISDB-T[51]
- în sistemele de transmisie terestră a programelor radio digitale DAB (Digital Audio Broadcast)
- în sistemele de transmisii TV și radio digitale pe satelit DVB-S și DVB-S2; primul utilizează coduri convoluționale concatenate cu coduri RS, iar cel de al doilea, coduri LDPC concatenate cu coduri BCH
- în sistemele de transmisii wireless (nomadice) – sistemele WiFi, IEEE 802.11 a și g,
- Rețele MAN (Metropolitan area network) wireless: IEEE 802.16 sau WiMAX
- modulațiile COFDM sunt utilizate în soluțiile propuse pentru legătura downlink a interfeței radio a generației de transmisii radio mobile (4G), și anume LTE-A; Sistemul LTE-A utilizează o altă tehnică de transmisie pentru conexiunea uplink, SC-FDMA, care va fi discutată în cursul de la master.
- Sisteme MBWA (Mobile Broadband Wireless Access): IEEE 802.20
- Sisteme celulare Flash-OFDM.
- WiMedia Alliance's Ultra wideband (UWB)
- Sisteme PLC (Power line communication).
- Sistemele ADSL(Asymmetric Digital Subscriber Line) și VDSL(Very High Speed DSL), sisteme de acces de bandă largă pe legătura de abonat POTS, care utilizează DMT, variantă a OFDM utilizată în banda de bază și care transmite un semnal real - **vezi cursul următor**

- în prezent se fac cercetări privitoare la utilizarea unei variante a OFDM care să nu folosească intervalul de gardă pentru eliminarea interferenței inter-simbol OFDM datorată propagării multicale. Se analizează posibilitatea de a reduce ISI prin utilizarea unei combinații între metode de estimare a acestei interferențe și metode de compensare ale ei. O astfel de abordare ar mări mult eficiența transmisiei, deoarece durata intervalului de gardă poate reprezenta până la 25% din perioada utilă a unui simbol OFDM.

- se mai efectuează studii privitoare la utilizarea constelațiilor Offset-QAM (similare cu OQPSK studiată în cursul de TM), care au un coeficient PAPR mai redus și care sunt mai puțin afectate de neliniaritățile amplificatoarelor finale de radiofrecvență.

- aceste aspecte sunt considerate pentru tehnicile de transmisie de urmează a fi utilizate în sistemele 5G și “beyond 5G”.