

Filtrarea semnalelor de date

Necesitate

- unul din efectele limitării benzii unui impuls rectangular de perioadă T_s , datorită filtrării, este „extinderea” sa în timp, care conduce la apariția interferenței intersimbol (Inter-Symbol Interference - ISI).

- dacă a_k este impulsul ce apare în cea de a k -a perioadă de simbol, $x(t)$ este răspunsul la impuls al filtrului, iar τ este întârzierea introdusă de filtru, atunci semnalul la ieșirea filtrului este:

$$y(t) = \sum_{i=-n}^{+n} a_{ki} \cdot x(t - kT_s - iT_s - \tau) = a_{k0}x(t - kT_s - \tau) + \sum_{i=-n, i \neq 0}^n a_{ki} \cdot x(t - kT_s - iT_s - \tau); \quad (1)$$

- din (1) rezultă că impulsul filtrat are un lob principal a_{k0} și o serie de lobi laterali a_{ki} , care apar în perioadele de simbol anterioare, $i < 0$, și în cele ulterioare, $i > 0$; acești lobi laterali afectează simbolurile transmise pe durata perioadelor de simbol respective. Amplitudinile lobului principal și cele ale lobilor laterali depind de expresia răspunsului la impuls al filtrului folosit.

- semnalul obținut prin filtrarea unei succesiuni de impulsuri de date de către un filtru TJ este prezentat în figura 1.

- semnalul filtrat prezintă valori semnificative ale Interferenței Inter-Simbol (ISI)

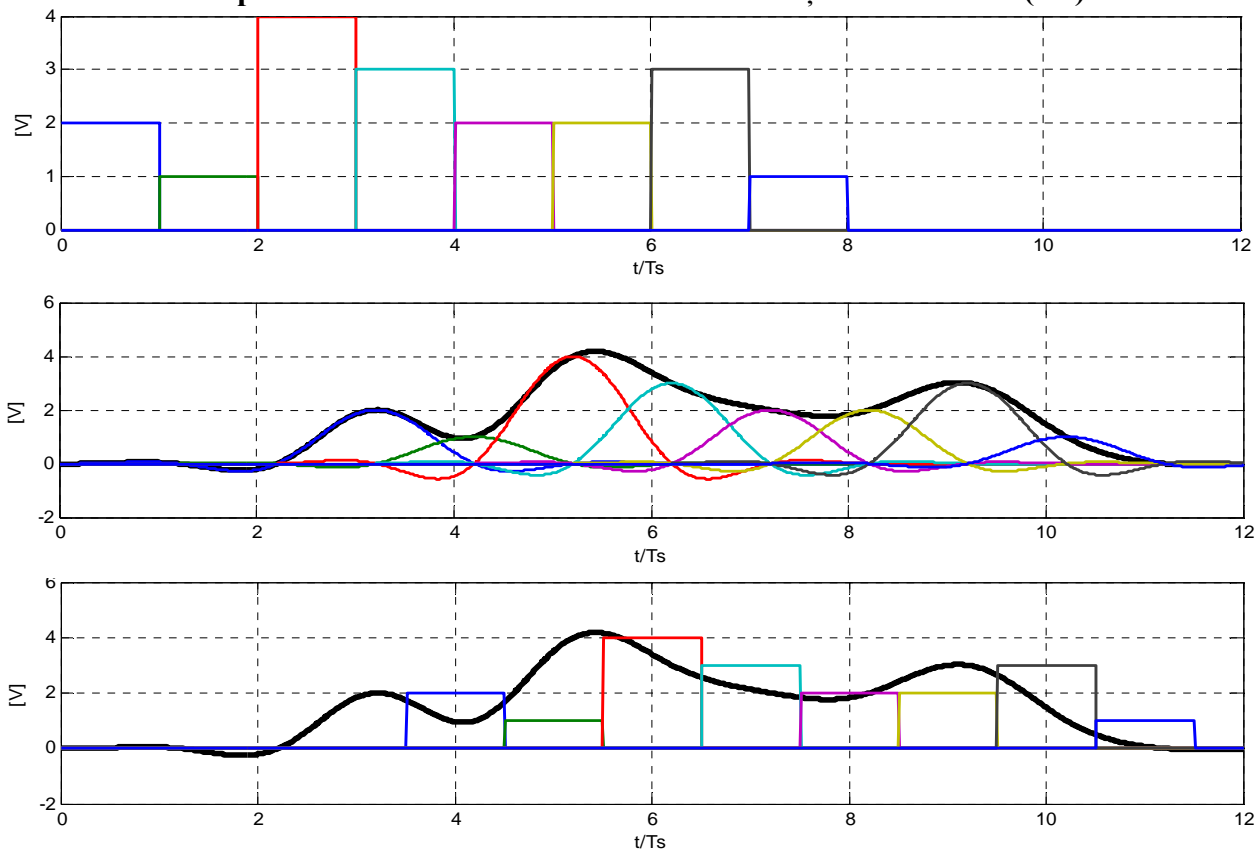


Figura 1 Filtrarea semnalului de date cu un filtru TJ care nu asigură eliminarea ISI.
a. nivele de date b. Impulsurile inividuale filtrate și semnalul rezultat c. sondarea semnalului filtrat

Criteriile de filtrare ale lui Nyquist

- pentru a reduce efectele distorsionante ale ISI asupra semnalului filtrat, răspunsul la impuls al filtrului va trebui să fie nul la momente de timp bine definite, numite momente de sondare, cu excepția unuia, numit moment principal de sondare.

- Nyquist a arătat că, pentru a transmite simboluri cu perioadă T_s , într-o bandă de frecvență $[0, f_N = 1/2T_s = f_s/2]$ cu ISI = 0 în momentele de sondare, impulsurile trebuie filtrate cu un filtru ce are caracteristica de frecvență și răspunsul la impuls definite de relațiile (2.a) și, respectiv, (2.b).

- caracteristica de frecvență și răspunsul la impuls ale (2) sunt prezentate în figurile 2 și 3.

$$X(\omega) = \begin{cases} 1; & \omega \leq \omega_N; \\ 0; & \omega > \omega_N; \end{cases}; \quad \text{a.} \quad x(t) = \frac{\sin \pi t/T_s}{\pi t/T_s}; \quad \text{b.} \quad (2)$$

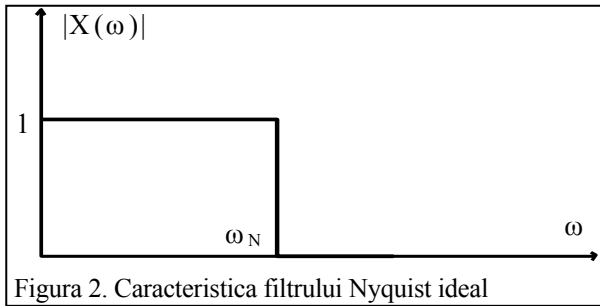


Figura 2. Caracteristica filtrului Nyquist ideal

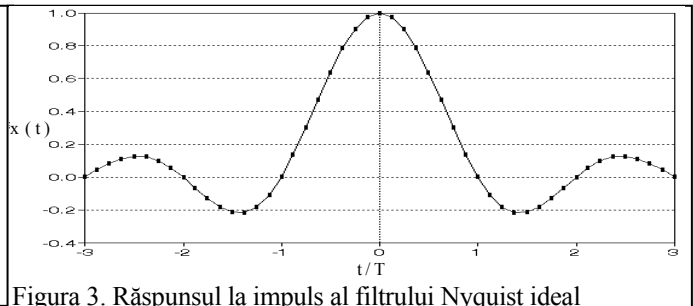


Figura 3. Răspunsul la impuls al filtrului Nyquist ideal

- această caracteristică este numită caracteristica Nyquist ideală, deoarece nu este realizabilă
- răspunsul la impuls al filtrului Nyquist ideal se anulează o dată în fiecare perioadă de simbol, la mijlocul acesteia (momente de sondare), cu excepția unei perioade de simbol, în care impulsul filtrat își atinge valoarea nominală la momentul de sondare.
- datorită acestei proprietăți, impulsul filtrat nu va afecta, în momentele de sondare, valorile impulsurilor transmise în perioadele de simbol anterioare și ulterioare, asigurând astfel o ISI nulă în momentele de sondare.
- pentru a obține o caracteristică de filtrare realizabilă trebuie să “relaxăm” una din condițiile impuse de filtrarea Nyquist ideală;
- cele trei posibilități de “relaxare” sunt:
 - a) mărirea lărgimii de bandă (BW) a caracteristicii de filtrare Nyquist;
 - b) acceptarea unei ISI nenule, controlate;
 - c) scăderea debitului de simbol, adică a lui f_s ;
- îndeplinirea condiției a) conduce la primul criteriu de filtrare a lui Nyquist;
- îndeplinirea condiției b) conduce la al doilea criteriu de filtrare a lui Nyquist – se obțin astfel așa numitele Tehnici cu Răspuns Parțial (PR);
- îndeplinirea condiției c) nu este acceptabilă deoarece conduce la scăderea debitului binar.

Primul criteriu de filtrare al lui Nyquist. Caracteristica în cosinus ridicat (Raised-Cosine – RC)

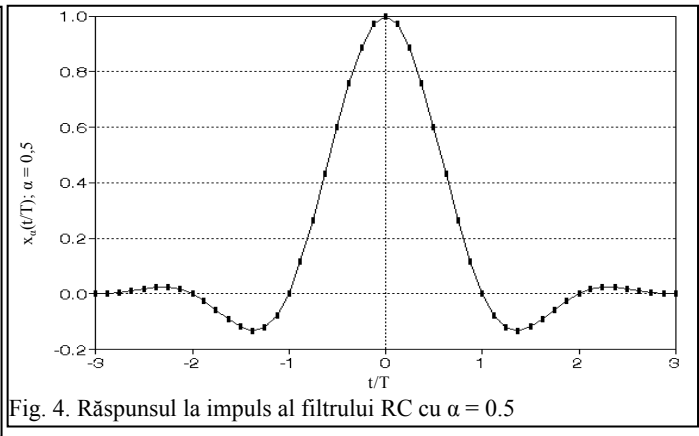
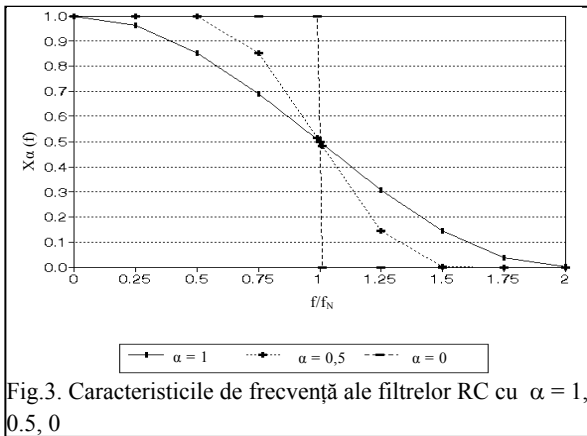
- caracteristica de frecvență a acestui filtru este dată de (3), unde prin α s-a notat factorul de exces de bandă -“roll-off factor”;
- acesta este raportul dintre banda suplimentară de frecvență introdusă și banda minimă necesară, care e egală cu f_N .
- modulul caracteristicii este prezentat în figura 4 pentru $\alpha = 0$ (caracteristica ideală – aproximativ), 0,5 și 1.
- deoarece expresia sa este un cosinus pătrat această caracteristică se numește “cosinus ridicat” - “raised cosine” (RC).
- caracteristica ideală $X(\omega)$ (2), care nu necesită un exces de bandă se obține făcând $\alpha \rightarrow 0$ in (3).

$$X_\alpha(\omega) = \begin{cases} 1; & 0 \leq \omega \leq \omega_N(1-\alpha); \\ \frac{1 - \sin[T_s(\omega - \omega_N)/2\alpha]}{2} = \\ = \cos^2\left(\frac{\pi\omega}{4\alpha\omega_N} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right); & \omega \in (\omega_N(1-\alpha), \omega_N(1+\alpha)); \\ 0; & \omega \geq \omega_N(1+\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

- expresia (3) este o caracteristică de tip trece-jos
- expresia caracteristicii RC trece-bandă, centrată pe semnalul purtător f_p , se obține înlocuind în (3) ω cu $(\omega - \omega_p)$.
- banda de trecere a semnalului filtrat TJ este: $B = [\omega_p - \omega_N(1+\alpha); \omega_p + \omega_N(1+\alpha)]$; (4)
- răspunsul la impuls al filtrului RC este definit de relația (5), reprezentată în figura 5 pentru $\alpha = 0.5$.

$$x_\alpha(t) = \frac{\sin \pi t/T_s}{\pi t/T_s} \cdot \frac{\cos \alpha \pi t/T_s}{1 - 4\alpha^2 t^2/T_s^2}; \quad (5)$$

- comparând expresiile (2.b) și (5) sau figurile 3 și 5, rezultă că lobii laterali ai răspunsului filtrului cu banda extinsă sunt sensibil mai mici decât cei ai răspunsului filtrului ideal; aceasta datorită celui de al doilea factor din (5), generat de banda de frecvență suplimentară utilizată.



- atenuarea lobilor laterali crește odată cu creșterea factorului de exces de bandă.
- dacă $t = kT_s - T_s/2$ este considerat începutul perioadei de simbol, atunci momentul de sondare este întârziat cu $T_s/2$ și apare la mijlocul perioadei de simbol; deci momentele de sondare sunt $t = kT_s$.
- Momentele de sondare au aceleași proprietăți ca și cele descrise la filtrul Nyquist ideal.
- Figura 6 prezintă semnalul obținut prin filtrarea cu RC-FTJ a unei succesiuni de impulsuri de date
- semnalul filtrat are ISI = 0 la momentele de sondare, când sunt atinse valorile nominale

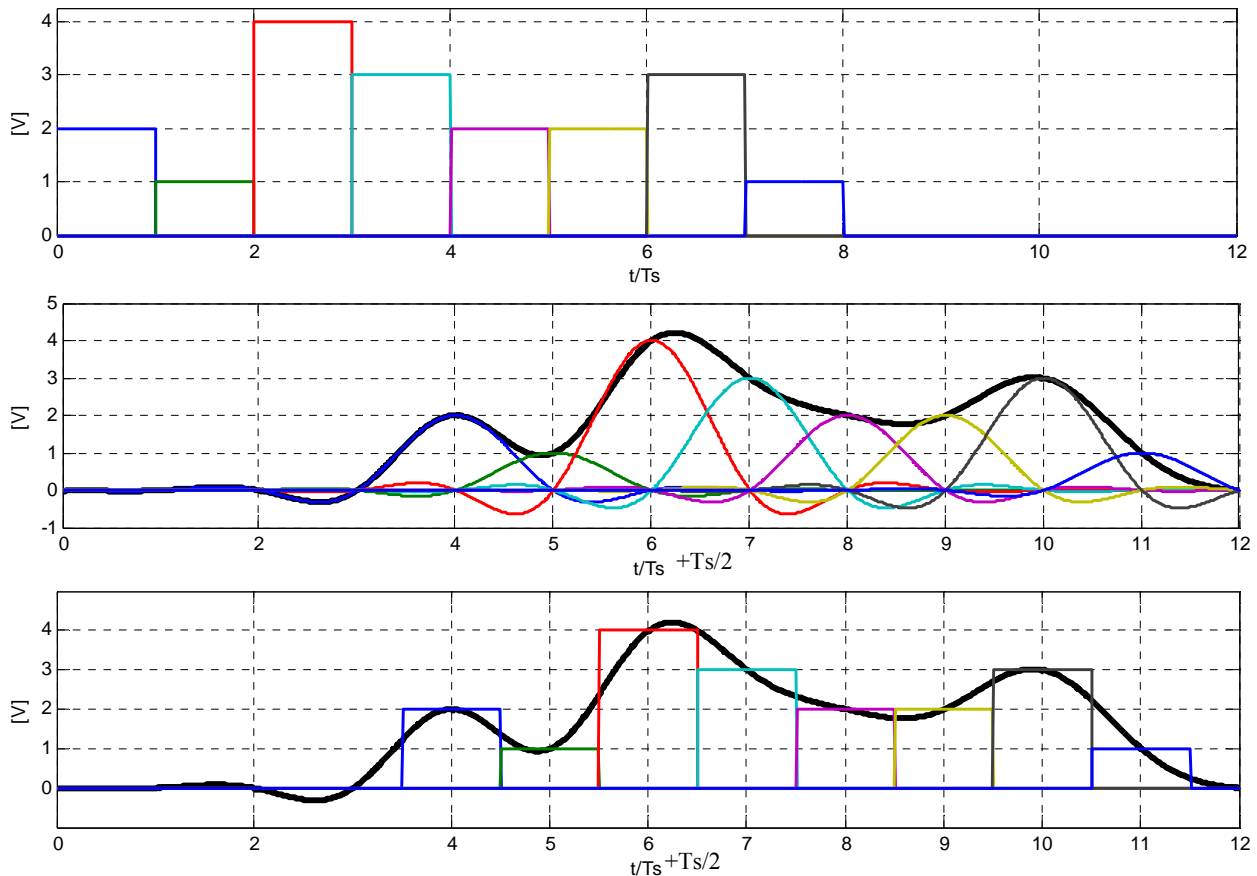


Figura 6 . Filtrarea RC-FTJ a semnalelor de date.
a. nivelele de date. b. impulsurile individuale filtrate si semnalul rezultat. c. sondarea semnalului filtrat

Caracteristica de filtrare radical din cosinus ridicat - Root-Raised Cosine (RRC)

- pentru a asigura cele mai bune performanțe în prezența zgomotului, caracteristica de filtrare RC este repartizată în mod egal între emisie și recepție.
- aceasta implică filtrarea semnalului, atât la emisie cât și la recepție cu caracteristicile G_E și G_R , care sunt egale cu $X_\alpha^{1/2}$, vezi (6).

$$X_\alpha(\omega) = G_E(\omega) \cdot G_R(\omega); G_E(\omega) = G_R(\omega) = X_\alpha^{1/2}(\omega); \quad (6)$$

- dacă filtrul de la recepție este plasat înaintea demodulatorului, la intrarea acestuia, semnalul este filtrat cu produsul $G_E \cdot G_R$, adică cu o caracteristică RC.

- implementarea unei caracteristici RC este echivalentă cu implementarea a două caracteristici RRC, fie ele de tip TJ sau TB.
- expresia matematică a caracteristicii RRC e dată de (7) și reprezentată în figura 7, pentru $\alpha = 0.5$ și 1; caracteristica Nyquist ideală este și ea reprezentată, pentru comparație.

$$X_{\alpha}^{1/2}(\omega) = \begin{cases} 1; & 0 \leq \omega \leq \omega_N(1-\alpha); \\ \cos\left(\frac{\pi\omega}{4\alpha\omega_N} - \frac{\pi(1-\alpha)}{4\alpha}\right); & \omega \in [\omega_N(1-\alpha), \omega_N(1+\alpha)]; \\ 0; & \omega > \omega_N(1+\alpha) \end{cases} \quad (7)$$

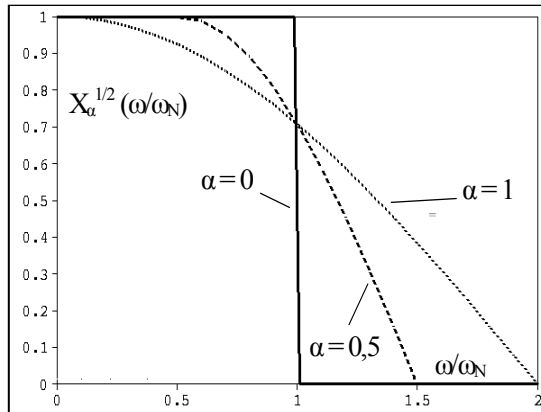


Figura 7. Caracteristicile de frecvență ale filtrelor RRC cu $\alpha = 0.5$ și 1 și al filtrului Nyquist ideal

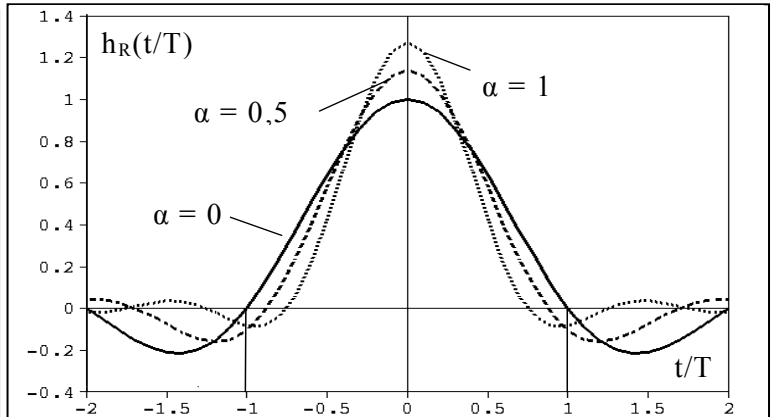


Figura 8. Răspunsurile la impuls ale filtrelor RRC $\alpha = 0.5$, 1 și al filtrului Nyquist ideal $\alpha = 0$

- această caracteristică mai este denumită și caracteristica “în cosinus”.
- caracteristica definită în (7) este una TJ; - cea TB-RRC se obține similar cu caracteristica RC, iar banda semnalului filtrat este exprimată tot de (4).
- răspunsul la impuls al acestei caracteristici este definit de (8) și este prezentat în figura 8.

$$h_{R\alpha}(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T}\right)^2} \left[\frac{\sin(\pi(1-\alpha)t/T)}{\pi t/T} + \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \cos(\pi(1+\alpha)t/T) \right]; \quad (8)$$

Rețineți că:

- răspunsul la impuls al filtrului RRC, $\alpha > 0$, nu are valori nule în momentele de sondare;
- amplitudinea semnalului filtrat este mai mare decât 1 în momentul principal de sondare; amplitudinea semnalului filtrat, în acest moment, crește cu creșterea lui α .
- amplitudinile lobilor laterali scad cu creșterea lui α .
- deși semnalul filtrat transmis în canal are ISI nenulă în momentele de sondare, semnalul de la intrarea demodulatorului are ISI = 0 în aceste momente, datorită filtrării RRC efectuată în receptor, adică răspunsul global la impuls este (4), asigurându-se ISI = 0 în toate momentele de sondare, cu excepția celui principal, $t = 0$.

Considerații privind implementarea caracteristicilor de filtrare

- caracteristicile Nyquist (RC, RRC) pot fi implementate atât cu structuri de filtrare analogice cât și digitale.
- implementarea analogică cu componente pasive necesită filtre LC de ordin ridicat; proiectarea acestor filtre este dificilă datorită cerințelor impuse caracteristicii de timp de propagare de grup (ISI=0). Filtrele care au aceste caracteristici necesită o tehnologie destul de pretențioasă.
- implementarea analogică cu structuri active RC necesită un număr destul de mare de componente pasive cu toleranță scăzută. De aceea, implementarea analogică cu se utilizează numai la frecvențe mari, unde implementarea digitală nu este posibilă.
- pentru factori de exces de bandă mici, implementarea analogică este extrem de dificilă și introduce erori relativ mari de implementare.
- o metodă de implementare mai adecvată este cea digitală folosind structuri de tip Finite Impulse Response (FIR) care asigură o variație liniară a fazei cu frecvența. Implementarea se poate face pe procesoare digitale de semnal (DSP-uri) sau pe circuite specializate, datorită numărului relativ mare de celule (taps) necesare.

- caracteristicile de filtrare ce conțin caracteristica Hilbert pot fi implementate numai cu aceste structuri digitale, dacă se dorește asigurarea unei precizii rezonabile.
- *Implementarea caracteristicilor de filtrare cu structuri digitale de tip FIR*- se va trata la cursul de PNS

Acest paragraf reprezintă doar o prezentare de principiu, nefiind o tratare detaliată

Chestiuni generale

- structura transversală FIR din figura 9, este descrisă de ecuația cu diferențe finite (9), în care:
 - $x(n-i)$ este eșantionul curent al semnalului de intrare, eșantionat cu frecvența f_e la momentele $t = nT_e$ și întârziat cu i perioade de eșantionare;
 - h_i , reprezintă coeficienții filtrului;
 - $y(n)$ este eșantionul curent al semnalului filtrat de ieșire.

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} h_i \cdot x(n-i) \quad (15)$$

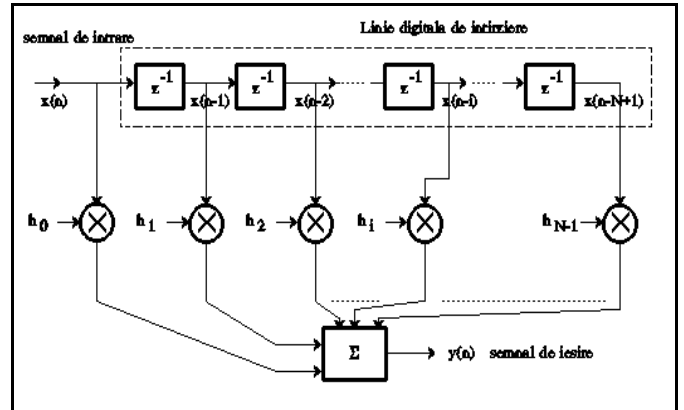


Fig. 9. Schema de principiu al structurii transversale FIR de filtrare

- răspunsul la impuls al acestei structuri are o durată finită, el anulându-se după N perioade de eșantionare.
- valorile coeficienților reprezintă eșantioanele ($t = iT_e$) răspunsului la impuls al caracteristicii ce trebuie implementate; aceasta se verifică introducând în (9) un impuls unitar de durată T_e .
- această structură este stabilă deoarece nu are poli în funcția de transfer

Condiții pentru asigurarea variației liniare a fazei cu frecvența

- sunt necesare pentru a asigura o caracteristică liniară timp de grup vs. frecvență
- dacă se impune condiția (10) se obține un răspuns la impuls simetric și o valoare constantă a timpului de propagare de grup dată de (11):

$$h_i = h_{N-1-i}; \quad (10); \quad \Phi(\theta) = -\frac{N-1}{2} \cdot \omega T_e; \quad a. \tau_g = -\frac{d\Phi}{d\omega} = \frac{N-1}{2} \cdot T_e; \quad b. \quad (11)$$

- dacă se impune condiția (12) se obține un răspuns la impuls anti-simetric; variația fazei și a timpului de grup cu frecvența sunt exprimate de (13):

$$h_i = -h_{N-1-i}; \quad (18); \quad \Phi(\theta) = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \cdot \omega T_e; \quad a. \tau_g = \frac{N-1}{2} \cdot T_e; \quad b. \quad (19)$$

Implementarea caracteristicilor de filtrare RC și RRC

- coeficienții filtrului FIR se obțin calculând valorile răspunsului la impuls al caracteristicii dorite la momentele de timp $t = iT_e$
- pentru implementarea răspunsurilor în timp ale caracteristicilor RC și RRC, care sunt infinite, durata lor în timp este trunchiată la un număr finit L de perioade de simbol.
- deoarece răspunsurile lor în timp sunt simetrice, față de momentul principal de sondare $t = 0$, numărul de perioade de simbol L trebuie să fie par, iar $h_i = h_{-i}$, (10), astfel încât timpul de grup să fie constant cu frecvența.
- dacă folosim m eșantioane per perioada de simbol, iar frecvența de eșantionare respectă condiția (14), numărul de eșantioane (ordinul filtrului) este dat de (15).

$$f_e = m \cdot f_s \rightarrow T = m \cdot T_e; \quad f_s = 1/T; \quad (14); \quad N = m \cdot L + 1 \quad (15)$$

Caracteristica RC

- eșantionând răspunsul la impuls al caracteristicii RC (5) la momente de timp echidistante $t/T_s = -(mL/2) + i/m$ obținem coeficienții h_i (16). Datorită simetriei răspunsului la impuls (10), trebuie să calculăm doar h_i , $i \geq 0$;

$$h_{\alpha,i} = \frac{1}{m} \cdot \frac{\sin \frac{\pi i}{m}}{\frac{\pi i}{m}} \cdot \frac{\cos \frac{\pi i}{m}}{1 - \left(\frac{2\alpha i}{m}\right)^2}; \quad i \in \{0, \dots, (N-1)/2\}; \quad h_{\alpha,-i} = h_{\alpha,i} \quad (16)$$

$$h_{\alpha,0} = \frac{1}{m}; \quad h_{\alpha,m/2\alpha} = \frac{1}{2m} \sin \frac{\pi}{2\alpha}; \quad \text{pt. } \frac{m}{2\alpha} \in N$$

- coeficienții cu indici 0 și $i = m/2\alpha$, pentru $m/(2\alpha) \in \mathbb{N}$, se calculează cu regula lui l'Hospital, vezi (16)

- timpul de propagare de grup inserat de această structură este:

$$\tau_g = -T_e(N-1)/2 = -T_s(N-1)/(2m) = -T_s \cdot L/2 ; \quad (17)$$

- *Caracteristica RRC*

– prin eșantionarea răspunsului la impuls al caracteristicii RRC (8), se obțin coeficienții structurii FIR care o implementează, (18). Numărul de coeficienți care trebuie calculați este similar cu cel al filtrului RC.

$$h_{R\alpha i} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{1 - (\frac{4\alpha i}{m})^2} \cdot \left\{ \frac{\sin[\frac{\pi i}{m}(1-\alpha)]}{\frac{\pi i}{m}} + \frac{4\alpha}{\pi} \cos[\frac{\pi i}{m}(1+\alpha)] \right\}; \quad i \in \{0, \dots, \frac{N-1}{2}\} \quad (18)$$

$$h_{R\alpha 0} = \frac{1}{m} \left(1 - \alpha + \frac{4\alpha}{\pi} \right);$$

- coeficienții cu indici 0 și $i = m/4\alpha$, pentru $m/(4\alpha) \in \mathbb{N}$, se calculează cu regula lui l'Hospital, vezi (18)

- întârzierea introdusă de această implementare este tot cea dată de (17).