

Noțiuni de Teoria Semnalelor

Considerente Teoretice

Schema bloc de principiu a unui sistem de telecomunicații, care transportă informația cu ajutorul semnalelor electromagnetice, este prezentată în Fig. 1.

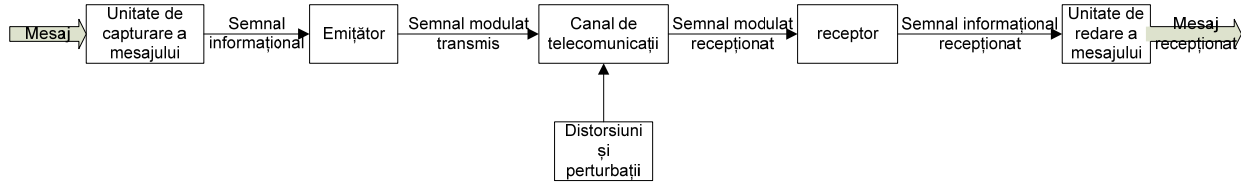


Fig. 1. Schema bloc de principiu a unui sistem de telecomunicații

Mesajul original (unde sonore, imagini,...) este captat și translatat în semnal electromagnetic de către **unitatea de capturare a mesajului**. Acest semnal electromagnetic generat de către unitatea de captură reprezintă semnalul informațional care trebuie ”transportat” la destinație.

Semnalul (de obicei o tensiune variabilă în timp) informațional poate fi descris ca:

$$g(t) = g_c + g_M \cdot f(t) \tag{1}$$

unde g_c este valoarea medie a semnalului (*componenta continuă*), constanta reală g_M reprezintă amplitudinea semnalului, iar $f(t)$ este o funcție reală cu următoarele proprietăți:

$$f(t) \in [-1;1] \tag{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0 \tag{3}$$

obs. Relațiile (2) și (3) arată că $f(t)$ este o funcție cu valoarea medie nulă, și amplitudine unitară.

Ex. Uns semnal periodic cosinusoidal are expresia dată de ecuația (4), iar reprezentarea in domeniul timp este prezentată în figura Fig. 2.

$$s(t) = A_c \cdot \cos\left(\underbrace{2\pi f_c t}_{\omega_c} + \varphi\right) \tag{4}$$

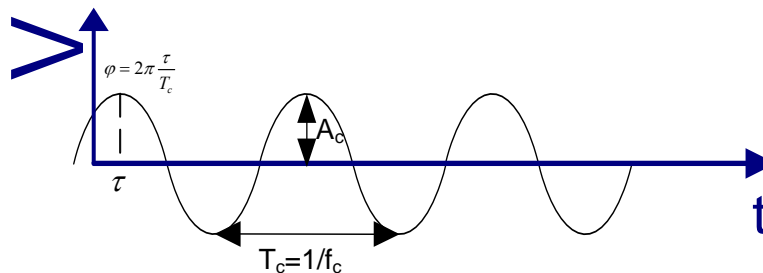


Fig. 2. Reprezenatarea în timp a unui semnal cosinusoidal

def. amplitudine - deviația maximă (a tensiunii) față de valoarea medie

def. perioada – intervalul de timp după care semnalul se repetă

def. frecvența – numărul de repetiții pe unitate de timp

Energia semnalului informațional este definită ca:

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = g_M^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{5}$$

obs. definiția energiei dată de (5) este de fapt energia disipată pe o sarcină unitară, iar energia disipată pe o sarcină oarecare Z poate fi determinat ca $E = \frac{E_s}{Z}$

Puterea semnalului informațional este:

$$P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |g(t)|^2 dt = g_M^2 \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) dt = g_M^2 \cdot \overline{f^2(t)} \quad (6)$$

obs. (6) definește puterea disipată pe sarcina unitară, iar puterea disipată pe o sarcină Z este $P = \frac{P_s}{Z}$

Spectrul semnalului informațional este descrisă de funcția *complexă* $G(\omega)$ care se obține prin transformata Fourier a ecuației (1):

$$G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i2\pi ft} dt; \quad (7)$$

În cazul semnalelor reale pe baza ecuației (7) putem scrie ca:

$$g(t) = \sum_k a_k e^{i2\pi f_k t} = \sum_k c_k \cos(2\pi f_k t) + i \sum_k s_k \sin(2\pi f_k t);$$

$$a_k = f_k \int_{-1/(2f)}^{1/(2f)} g(t) e^{-i2\pi f_k t} dt$$

$$c_k = 2f_k \int_{-1/(2f)}^{1/(2f)} g(t) \cos(2\pi f_k t) dt$$

$$s_k = 2f_k \int_{-1/(2f)}^{1/(2f)} g(t) \sin(2\pi f_k t) dt \quad (8)$$

Ecuția (8) arată că semnalele reale sunt compuse din semnale sinusoidale/cosinusoidale de diferite frecvențe.

Ex. Aplicând relația (8) asupra unui semnal cosinusoidal $g(t) = A \cos(2\pi f_1 t + \varphi)$ obținem:

$$g(t) = \frac{A}{2} e^{-i(2\pi f_1 t + \varphi)} + \frac{A}{2} e^{i(2\pi f_1 t + \varphi)} \quad (9)$$

Iar reprezentarea semnalului în domeniul frecvență va fi:

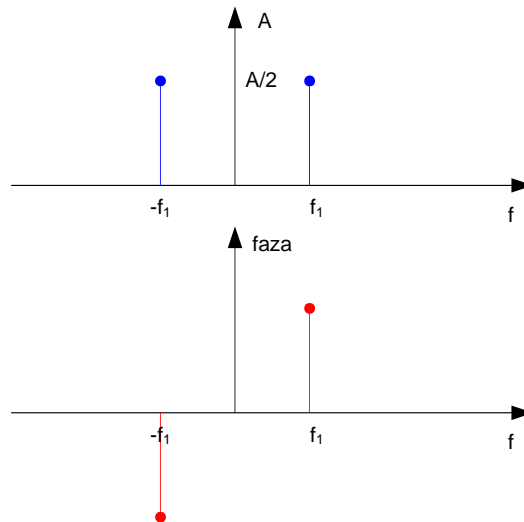


Fig. 3. Reprezentarea în domeniul frecvență a semnalului cosinusoidal

Ex. Considerând un semnal dreptunghiular cu valoarea medie nulă și factor de umplere 50%, cu frecvența f_{dr} și amplitudinea A_{dr} pe baza relației (8) obținem:

$$g_{dr}(t) = \frac{4A_{dr}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \cos(2\pi(2k-1)f_{dr}t) \quad (10)$$

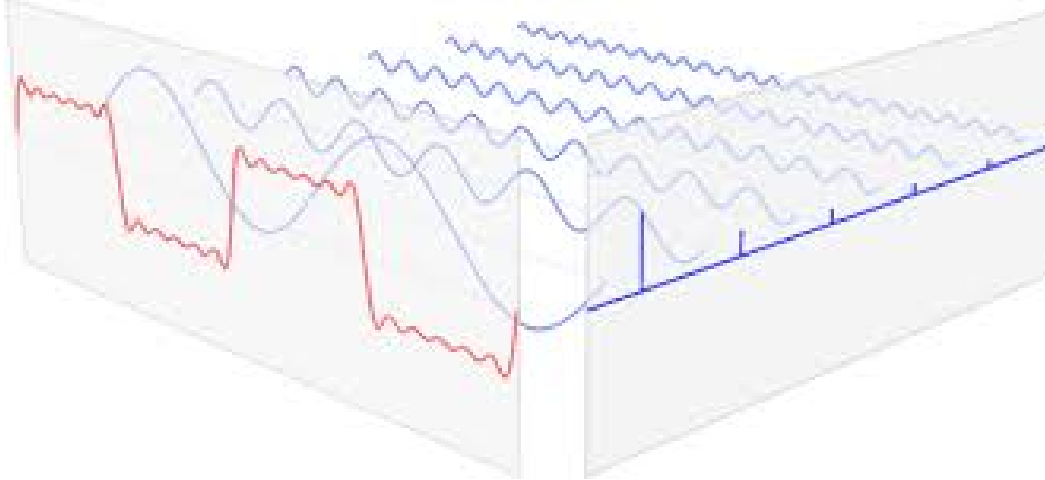


Fig. 4. Reprezentarea in domeniul timp si frecvență a unui semnal dreptunghiular format din șase componente spectrale[2]

Ex. Semnalul vocal

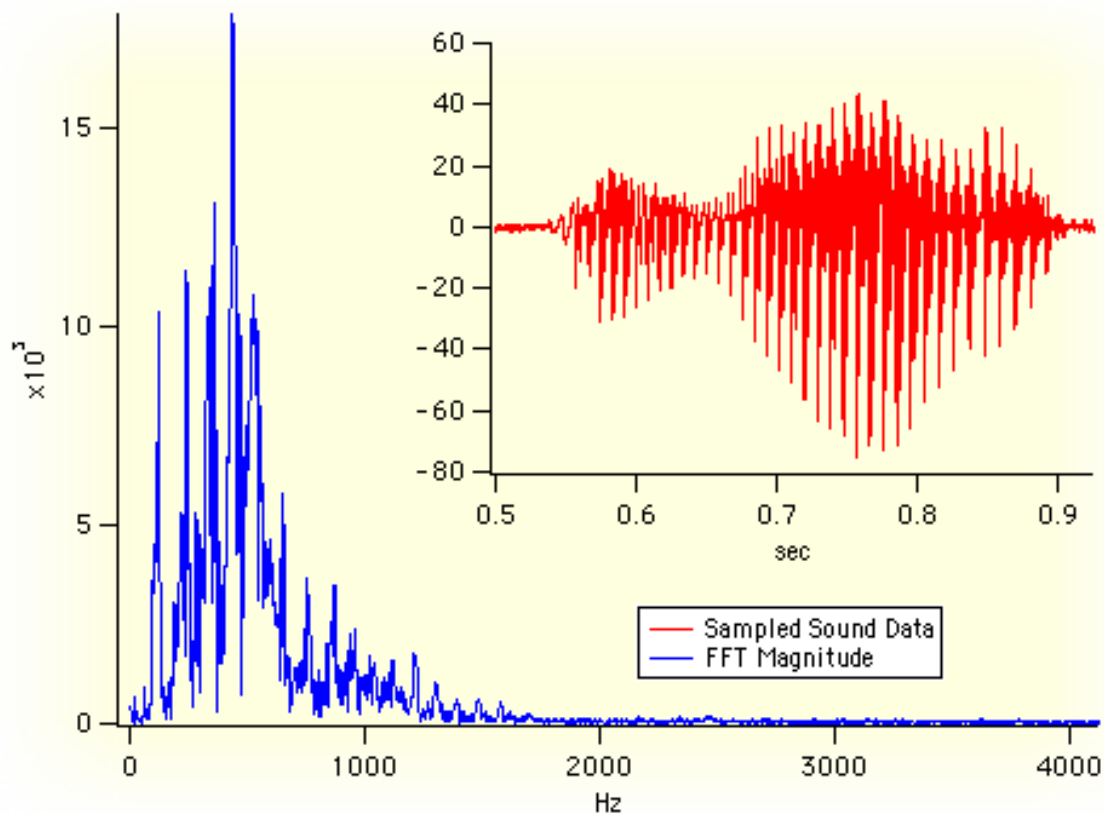


Fig. 5. Reprezentarea în timp și frecvență a unui semnal vocal[2]

Dacă semnalul informațional este semnal analogic (ex. semnal vocal, semnal audio, semnal video...) de obicei spectrul semnalului are o lărgime finită, adică:

$$|G(\omega)| = \begin{cases} \neq 0; & \omega \in [\omega_m; \omega_M] \\ 0 & ; \omega \notin [\omega_m; \omega_M] \end{cases} \quad (11)$$

def. banda de frecvență (BF) a unui semnal este **intervalul** de frecvență care conține componentele spectrale cu amplitudine diferită de zero.

$$BF = \left[\frac{\omega_m}{2\pi}; \frac{\omega_M}{2\pi} \right] = [f_m; f_M] \quad (12)$$

def. lărgime de bandă (LB) –este lățimea benzii de frecvență (lățimea intervalului):

$$LB = f_M - f_m \tag{13}$$

în cazuri semnalelor informaționale digitale banda de frecvență este infinit de mare ($BF = (-\infty; +\infty)$), dar de obicei majoritatea energiei este concentrată într-o bandă cu lățime finită.

Semnale numerice – secvențe de numere care reprezintă eșantioanele unui semnal.

def. prin eșantionare timpul continuu t este înlocuit cu timpul discret nT_e , adică este păstrat valoarea semnalului numai în momentele nT_e .

Considerând semnalul cu banda limitată

$$x(t) = \sum_k c_k \cos(2\pi f_k t) \tag{14}$$

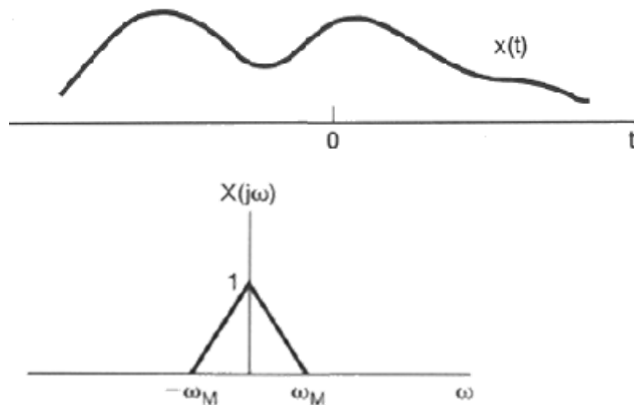


Fig. 6. Reprezentarea în domeniul timp și frecvență a semnalului analogic

Înlocuirea timpului continuu cu timpul discret înseamnă înmulțirea semnalului analogic cu trenul de impulsuri $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} 1; & t = kT \\ 0; & \text{in rest} \end{cases} \tag{15}$$

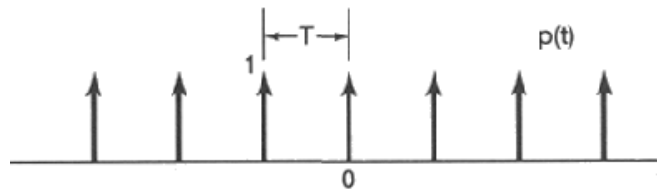


Fig. 7. Reprezentarea în domeniul timp a trenului de impulsuri $p(t)$

Semnalul eșantionat va fi:

$$x(n) = x(t) \cdot p(t) \tag{16}$$

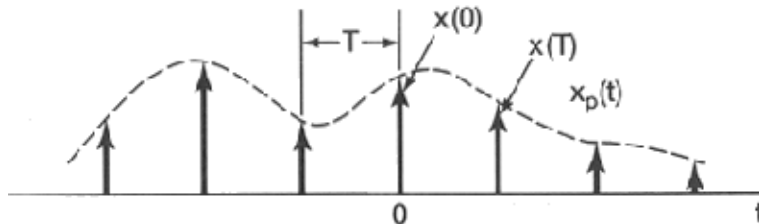


Fig. 8. Semnalul eșantionat

Ținând cont că descompunerea în serie Fourier a semnalului $p(t)$ este:

$$p(t) = \frac{2\pi}{T} \sum_j \cos(2\pi j f_s t); \quad f_s = \frac{1}{T} \tag{17}$$

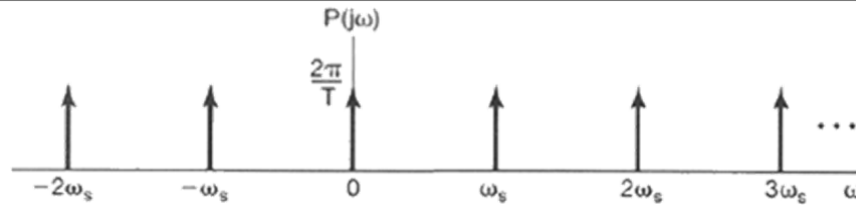


Fig. 9. Spectrul semnalului p(t)

Înlocuind (17) și (14) în relația (16) și ținând cont că $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(b-a)$ obținem:

$$x(n) = x(t) \cdot p(t) = \frac{\pi}{T} \sum_j \sum_k c_k \cos(2\pi(jf_s + f_k)t) + \frac{\pi}{T} \sum_j \sum_k c_k \cos(2\pi(jf_s - f_k)t) \tag{18}$$

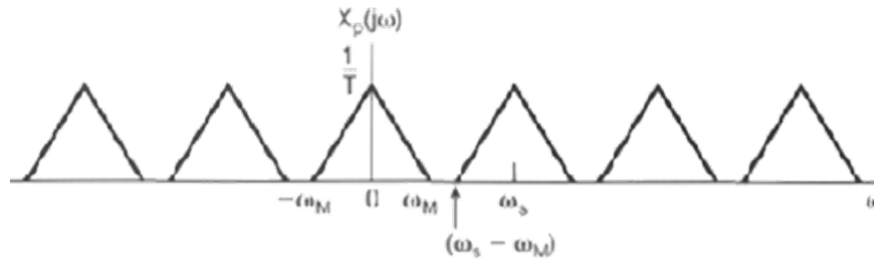


Fig. 10. Spectrul semnalului eșantionat

Din figura Fig. 10. se poate observa ca pentru o refacere corectă a semnalului analogic frecvența de eșantionare f_s trebuie să îndeplinească condiția (teorema eșantionării)

$$f_s - f_M > f_M \Rightarrow f_s > 2f_M \tag{19}$$

adică frecvența de eșantionare trebuie să fie de două ori mai mare frecvența maximă a semnalului analogic

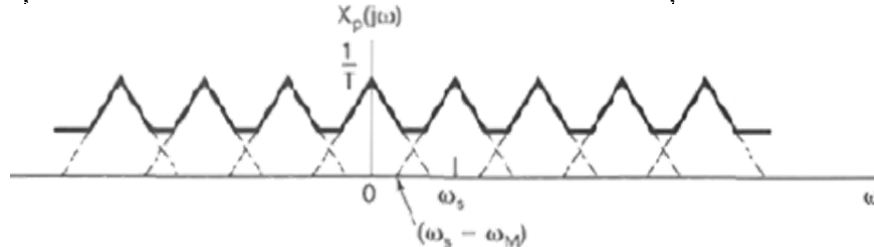


Fig. 11. Spectrul semnalului eșantionat dacă nu este respectată teorema eșantionării

Emițătorul pe baza semnalului informațional, generează *semnalul modulat*, care este un semnal adaptat la caracteristicile canalului utilizat. Semnalul modulat trebuie generat astfel încât, receptorul să fie capabil să extragă semnalul informațional din semnalul modulat recepționat, și procesul de transmisie să fie cât se poate de *eficient*.

Canalul de telecomunicații (ex: canalul radio, fire torsadate(cablu UTP), sistemul de telefonie (PSTN)...) poate fi considerat ca fiind un circuit care distorsionează semnalul transmis, și îl adună cu un semnal aleator numit *zgomot*.

Semnalul obținut la ieșirea canalului (semnalul modulat recepționat) $s_r(t)$ poate fi descris ca:

$$s_r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_t(t-\tau) \cdot h(\tau) d\tau + n(t) = s_t(t) \odot h(t) + n(t) \tag{20}$$

unde $s_t(t)$ este semnalul modulat transmis, $h(t)$ este răspunsul la impuls a canalului și $n(t)$ este semnalul de zgomot, iar cu \odot s-a notat produsul convoluțional.

Canalul de telecomunicații utilizat impune și anumite restricții semnalului transmis, cum ar fi puterea medie și maximă, lărgimea de bandă, distribuția spectrală, etc.

Receptorul are rolul de a recupera semnalul informațional din semnalul modulat recepționat afectat de perturbațiile și distorsiunile introduse de canal.

Zgomotul Gaussian alb

Considerând că semnalul modulat este transmis pe un canal plat, ecuația (20) poate fi rescris ca:

$$s_r(t) = s_t(t) + n(t) \tag{21}$$

De obicei în analizele teoretice a performanțelor asigurate de diferite modulații semnalul de zgomot $n(t)$ se modelează cu un semnal alb aleatoriu cu distribuție Gaussiană AWGN(Additive White Gaussian Noise).

def. Un zgomot este alb dacă distribuția spectrală a puterii este uniformă indiferent de valoarea frecvenței.

- densitatea spectrală de putere a zgomotului alb se notează N_0 , și definește puterea medie a componentelor spectrale dintr-o bandă de frecvență cu o lărgime de bandă dată. De obicei unitatea de măsură a lui N_0 este:

$$[N_0] = \frac{dBm}{kHz} \tag{22}$$

def. zgomot Gaussian – un semnal aleatoriu cu distribuție normală sau Gaussină, adică probabilitatea valoarea lui $n(t)$ în momentul t să ia valoarea x este $pdf(x, \sigma, \mu)$:

$$P(n(t) = x) = pdf(x, \sigma, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{23}$$

unde μ este valoarea medie iar σ este dispersia zgomotului.

obs. valoarea medie a zgomotului AWGN este zero $\mu = 0$.

- probabilitatea ca valoarea zgomotului în momentul t să fie mai mic decât x ($cdf(x)$) este dată de relația

$$P(n(t) < x) = cdf(x, \sigma, \mu) = \int_{-\infty}^x pdf(\tau, \sigma, \mu) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(\tau-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) d\tau = \frac{1}{2} \left[1 + erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \tag{24}$$

unde $erf(\cdot)$ (error function) este funcția descrisă de (25):

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\tau^2} d\tau \tag{25}$$

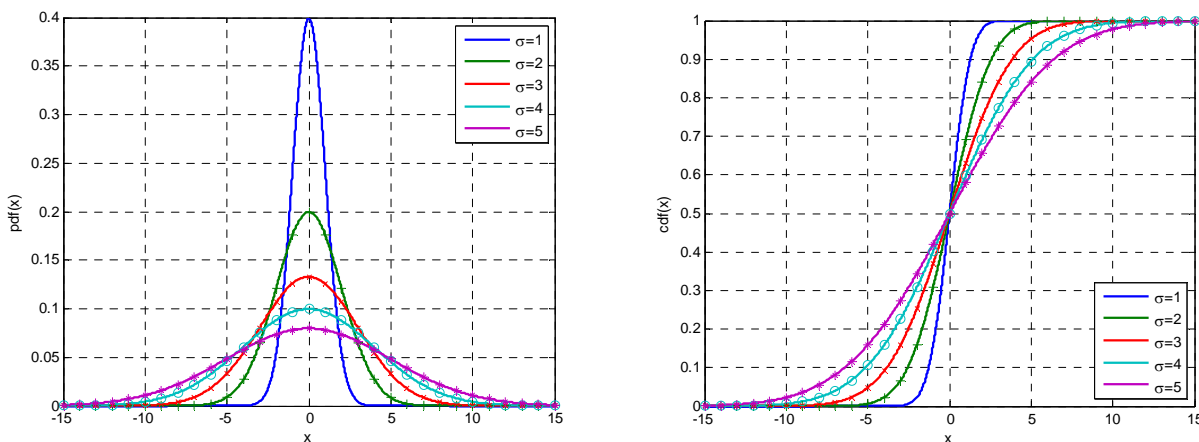


Fig. 1. Funcțiile pdf și cdf a zgomotului Gaussian pentru diferite valori a σ ($\mu = 0$)

- un interes deosebit pentru comunicații reprezintă probabilitatea ca valoarea zgomotului în momentul t să fie mai mare decât o valoarea x , această probabilitate este dată de funcția $Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$:

$$P(n(t) > x) = Q\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \int_x^{\infty} pdf(\tau, \sigma, \mu) d\tau = 1 - cdf(x, \sigma, \mu) = \frac{1}{2} \left[1 - erf\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right] \tag{26}$$

Deoarece semnalul recepționat este filtrat trece bandă, se consideră că banda de trecere a filtrului FTB este egală cu lărgimea de bandă LB a semnalului modulat, semnalul recepționat filtrat este adunat de un zgomot cu bandă îngustă (narrowband).

-puterea zgomotului de bandă îngustă (P_N) (ținând cont că transmisia este afectată de un zgomot alb) este:

$$P_N = N_0 \cdot LB \quad (27)$$

- se poate arăta [Haykin] că zgomotul cu bandă îngustă poate fi scris ca un semnal modulat QAM:

$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (28)$$

- $n_I(t)$ și $n_Q(t)$ sunt semnale aleatoare cu distribuție Gaussiană, și dispersia σ filtrate trece jos, cu componente spectrale nenule până la $LB/2$, iar densitatea de putere a acestor este N_0 .

- considerând că:

$$a \cdot \cos(x) - b \cdot \sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos\left(x - \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)\right) \quad (29)$$

semnalul definit de relația (28) poate fi scrisă în forma [Proakis1]:

$$n(t) = R(t) \cdot \cos(\omega_c t + \Psi(t)) \quad (30)$$

unde

$$R(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)} \quad (31)$$

$$\Psi(t) = -\tan^{-1}\left(\frac{n_I(t)}{n_Q(t)}\right) \quad (32)$$

anvelopa zgomotului filtrat trece bandă, descrisă de relația (31), este un semnal aleatoriu cu distribuție Rayleigh [Lathi] [Haykin]:

$$P_R(x) = \frac{x}{\sigma_R^2} e^{-x^2/2\sigma_R^2} \quad (33)$$

-defazajul introdus, $\Psi(t)$, are distribuție uniformă din intervalul $[0, 2\pi]$.

Bibliografie

- Ed.Nicolau, coord. - Manualul Inginerului electronist. Radiotehnica vol.III, Editura Tehnică, 1989
- https://en.wikipedia.org/wiki/Frequency_domain
- B.P. Lathi, "Modern Digital and Analog Communication Systems", Oxford University Press, 1998