

Modulația în frecvență

Scopul Aplicației

Aplicația propune studiul tehnicilor de modulare și demodulare ale modulațiilor în frecvență. Se vor prezenta câteva tipuri de modatoare și demodatoare MF analogice și digitale respectiv implementarea acestora utilizând SDR (Software defined Radio).

Un alt scop urmărit este evaluarea performanțelor asigurate de modulații în frecvență.

Considerente Teoretice

- Modulația în frecvență - MF – modifică valoarea **deviației frecvenței instantanee a semnalului modulat, în jurul frecvenței purtătoare direct proporțional cu nivelul semnalului modulator**, păstrând amplitudinea semnalului modulat la o valoare constantă.
- considerând semnalul modulator:

$$g(t) = g_M \cdot f(t); \quad f(t) \in [-1; 1] \quad (1)$$

- frecvența instantanee a semnalului modulat MF trebuie să fie:

$$f_i(t) = f_c + k_{FM} \cdot g(t) \quad (2)$$

$$[k_{FM}] = \frac{\text{Hz}}{V}$$

- expresia pulsației instantanee a semnalului MF este:

$$\omega_i(t) = \omega_c + K_{FM} \cdot g_M \cdot f(t) = \omega_c + \Delta\omega_M \cdot f(t); \quad (3)$$

$$[K_{FM}] = \frac{\text{rad}}{s \cdot V}$$

- deoarece faza instantanee $\phi_i(t)$ a semnalului modulat este integrala pulsației instantanee în raport cu timpul

$$\omega_i(t) = \frac{\delta\phi_i(t)}{\delta t} \Rightarrow \phi_i(t) = \int_0^t \omega_i(\tau) d\tau = \int_0^t \omega_c d\tau + \int_0^t \Delta\omega_M \cdot f(\tau) d\tau = \omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (4)$$

expresia semnalului modulat MF este (considerând că amplitudinea semnalului purtător este V_0):

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \quad (5)$$

- $\Delta\omega_M$ reprezintă deviația maximă a pulsației. Indicele de modulație este definită ca

$$\beta = \frac{\Delta\omega_M}{\omega_{mM}} = \frac{2\pi\Delta f_m}{2\pi f_{mM}} = \frac{\Delta f_m}{f_{mM}} \quad (6)$$

- ărgimea de bandă a semnalului modulat FM este infinit de mare. În practică lărgimea de bandă este definită ca fiind banda de frecvență care conține aproximativ 99% din puterea semnalului MF, lărgimea acestei benzi poate fi determinată cu relația (7). Deoarece spectrul semnalului este simetrică față de frecvența purtătoare f_c banda de frecvență a semnalului modulat în frecvență poate fi determinată cu relația (8):

$$LB_{MF} = 2 \cdot f_{mM} (1 + \beta + \sqrt{\beta}) \quad (7)$$

$$BF_{MF} \in \left[f_c - \frac{LB_{MF}}{2}; f_c + \frac{LB_{MF}}{2} \right] \quad (8)$$

- semnalul modulat MF și spectrul său sunt prezentate în Fig. 1. pentru un semnal modulator $g(t) = \text{Acos}(\omega_m t)$, cu $f_m = 4$ Hz, $g_M = 2V$, $\Delta\omega_M = 13$ Hz, și $f_c = 80$ Hz; $\beta = 3.25$, $LB_{MF} = 40.25$ Hz;

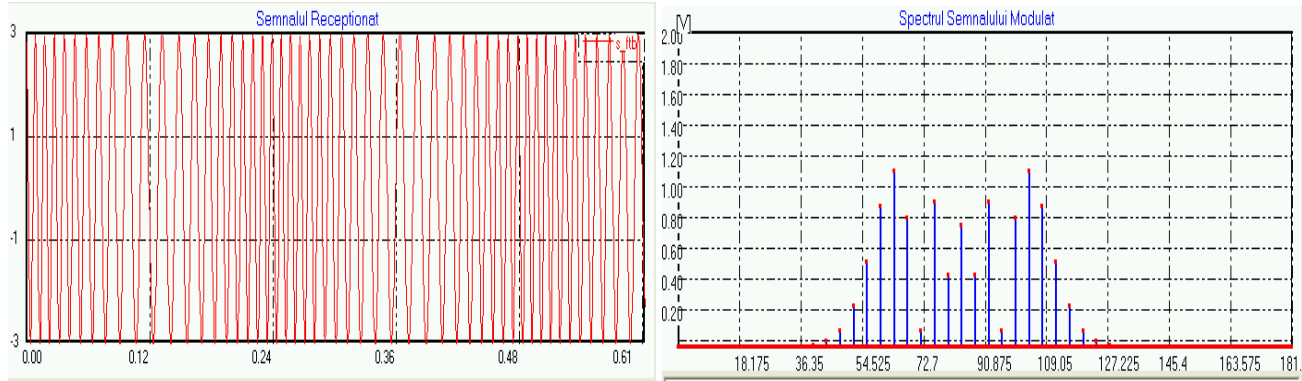


Fig. 1. Semnalul modulat FM (reprezentare în timp și spectru de frecvență) cu semnal modulator cosinusoidal

obs. cel mai uzual exemplu de utilizare a MF este “FM radio”, având parametrii: $f_{mM} = 15 \text{ kHz}$, $\Delta f_M = 50 \text{ kHz}$, $\beta = 3.33$, $LB_{FM} = 184.6 \text{ kHz}$;

Producerea semnalelor MF

Metode analogice

- metodele analogice “clasice” sunt prezentate în [Ed. Nicolau];

Metoda Armstrong

- aproximează semnalul MF:

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right) = V_0 \cos(\omega_c t) \cdot \cos\left[\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right] - V_0 \sin(\omega_c t) \cdot \sin\left[\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \quad (9)$$

$$\text{pentru } \left|\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right| \leq 0.2 \text{ rad} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left[\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \approx 1 \\ \sin\left[\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \approx \Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \end{cases} \quad (10)$$

Utilizând aproximația (10) relația (9) devine:

$$s_{FM}(t) \approx V_0 \cos \omega_c t - V_0 \cdot \left[\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \cdot \sin \omega_c t \quad (11)$$

- condiția impusă în (10), pentru a permite aproximațiile făcute, conduce, pentru un semnal modulator de bandă limitată $[\omega_{mM}, \omega_{mM}]$, la un indice de modulație cu valoare mică, adică:

$$\beta' = \frac{\Delta\omega_M'}{\omega_{mM}} \leq 0.5 \quad (12)$$

- pentru a permite obținerea unor valori mai mari ale lui β , semnalul este mai întâi modulat pe o frecvență intermediară f_c' și cu un indice de modulație β' care să respecte condiția (10)—mai mici decât f_c și respectiv β

- apoi este limitat în amplitudine, iar descompunerea în serie Fourier a semnalului astfel obținut este:

$$s_L(t) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin\left[(2k-1)\omega_c t + (2k-1)\Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right] \quad (13)$$

- impunând pentru cea de a k -a armonică nenulă, condițiile:

$$\left. \begin{aligned} (2k-1)\omega_c &= \omega_c \\ (2k-1)\Delta\omega_M &= \Delta\omega_M \end{aligned} \right\} \Rightarrow (2k-1)\beta' = \beta \quad (14)$$

- rezultă că valorile frecvenței intermediare f_c' și ale indicelui de modulație β' pe care trebuie făcută modularea descrisă de relația (11) sunt date de relațiile:

$$f'_c = \frac{f_c}{2k-1} \tag{15}$$

$$\beta' = \frac{\beta}{2k-1} \leq 0.5$$

- filtrând TB semnalul limitat (13) cu un filtru având $\omega_0 = \omega_c$ și cu o bandă de trecere LB_{FM} se obține semnalul MF pe frecvența purtătoare și cu indicele de modulație impuse
- trebuie însă reținut că factorul $(2k-1)$ nu trebuie să ia valori prea mari (valorile practice sunt cele < 11), deoarece amplitudinea armonicii corespunzătoare în (13) ar putea fi prea scăzută.
- schema bloc a modulatorului Armstrong este prezentată în Fig. 2.

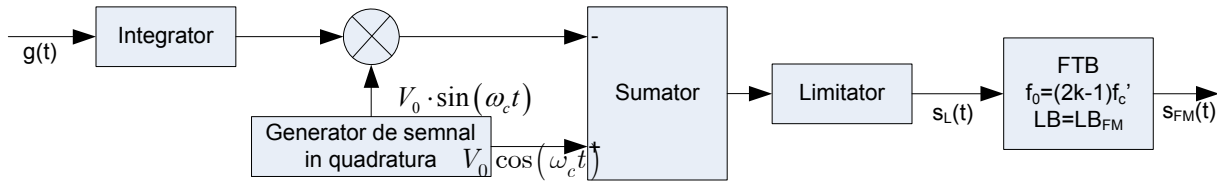


Fig. 2. Modulator MF cu metoda Armstrong

- o altă metodă analogică folosită uzual este comanda frecvenței semnalului de ieșire al unui oscilator comandat în tensiune OCT de către nivelul semnalului modulator [Vătășescu – cap. circuite PLL]

Metodă digitală de producere a semnalului MF

- utilizând metode digitale poate fi calculat cu o precizie arbitrară valoarea funcției $\cos(\cdot)$, deci o metodă de generare a semnalelor modulate cu modulații neliniare constă în generarea unui semnal numeric care reprezintă *faza instantanee (argumentul)* a semnalului modulat, și după aceea aplicarea acestui semnal la intrarea unui bloc care calculează funcția $\cos(\cdot)$.

- în practică, pentru valori mai mari a frecvenței centrale (purtătoare) se preferă generarea semnalului cu ajutorul unei modulații MAQ. Ținând cont de egalitatea $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$

expresia semnalului modulat FM (5) poate fi rescrisă în forma:

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \tag{16}$$

$$= V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \cdot \cos(\omega_c t) - V_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \cdot \sin(\omega_c t)$$

Notând cu

$$I_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \tag{17}$$

$$Q_{FM}(t) = V_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right)$$

Semnalul modulat în frecvență devine:

$$s_{FM}(t) = I_{FM}(t) \cdot \cos(\omega_c t) - Q_{FM}(t) \cdot \sin(\omega_c t) \tag{18}$$

obs. semnalul complex $s_{FM-BB}(t) = I_{FM}(t) + j \cdot Q_{FM}(t)$ se numește anvelopa complexă a semnalul FM.

- după eșantionarea $I_{FM}(t)$ și $Q_{FM}(t)$ se obțin semnalele $I_{FM}(nT_e)$ și $Q_{FM}(nT_e)$ care pot fi scrise în formă recursivă, cu pas variabil care depinde de semnalul modulator:

$$\Theta_I(n \cdot T_e) = \Theta_Q(n \cdot T_e) = \Theta_{BB}(n \cdot T_e) = \Delta\omega_M \cdot T_e \cdot \sum_{i=0}^n f(i \cdot T_e) = \tag{19}$$

$$= T_e \cdot \left(\Delta\omega_M \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(i \cdot T_e) + \Delta\omega_M \cdot f(n \cdot T_e) \right) =$$

$$= \Theta_{BB}((n-1) \cdot T_e) + \Theta_{BB-p}(n \cdot T_e)$$

$$\Theta_{p-BB}(n \cdot T_e) = \Delta\omega_M \cdot f(n \cdot T_e) = K_{FM} \cdot g(n \cdot T_e) \quad (20)$$

- schema bloc a modulatorului devine:

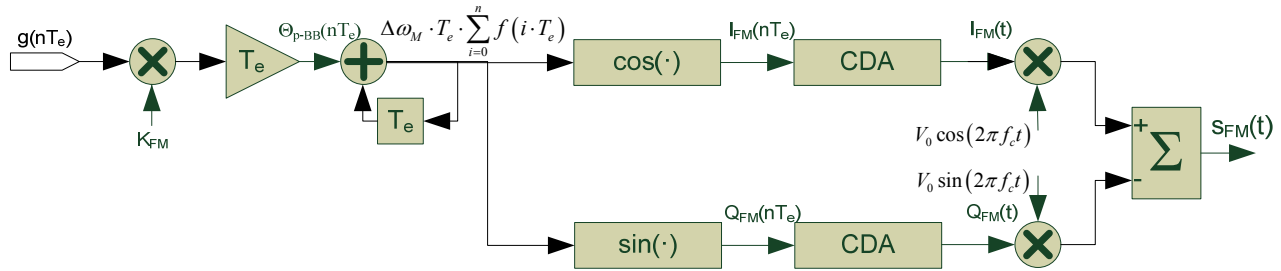


Fig. 3. Modulator digital FM cu ajutorul modulației MAQ

obs. În cazul modulatorului care utilizează modulația QAM frecvența de eșantionare poate să fie mult mai mică decât în cazul generării digitale a semnalului MF direct pe purtătoare. (de obicei $f_{mM} \ll f_p$)

Demodularea semnalelor MF – principii

A. Demodulare prin derivare și detecție de anvelopă

- demodularea semnalelor MF necesită următoarele etape, vezi schema bloc de mai jos,:

- eliminarea modulației “parazite” de amplitudine (MPA), modulație introdusă de canal – semnalul rezultat are o amplitudine constantă
- derivarea semnalului modulat MF– această operație introduce o modulație BLD-P (MA) a semnalului rezultat, pe lângă modulația MF existentă
- detecția de anvelopă a semnalului (sau realizarea unei demodulări ML)
- eliminarea componentei continue

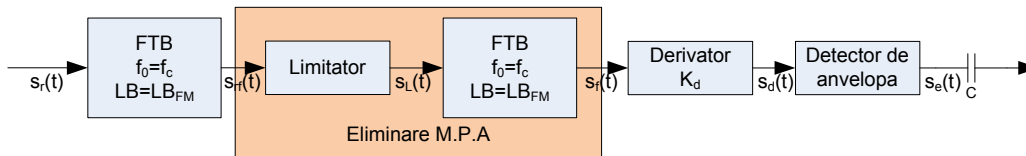


Fig. 4.Schema bloc a demodulatorului FM cu derivator și detecție de anvelopă

- filtrul trece-bandă de intrare are rolul de a îmbunătăți SNR-ul semnalului recepționat

a. Eliminarea modulației “parazite” de amplitudine

- semnalul recepționat este descris de relația (21); remarcați amplitudinea variabilă A(t):

$$s_{rf}(t) = A(t) \cos \left(\omega_c t + \Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \quad (21)$$

- eliminarea M.P.A. se face în două etape: - limitarea semnalului, urmată de o filtrare TB

- semnalul limitat este:

$$s_L(t) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin \left[(2k-1) \cdot \left(\omega_c t + \Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \right] \quad (22)$$

- al doilea FTB reține doar prima armonică din (22), rezultând un semnal MF cu amplitudine constantă:

$$s_f(t) = \frac{4V}{\pi} \sin \left(\omega_c t + \Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right) \quad (23)$$

- pentru realizabilitatea filtrării, spectrele axate pe ω_c și $3\omega_c$ nu trebuie să se suprapună, adică:

$$3\omega_c - \frac{LB(3\Delta\omega_M)}{2} > \omega_c + \frac{LB(\Delta\omega_M)}{2} \Rightarrow \omega_c > \frac{LB(\Delta\omega_M) + LB(3\Delta\omega_M)}{4} \quad (24)$$

-privitor la relația (24) trebuie menționat că deviația maximă de frecvență a modulației MF de pe armonică de index k semnalului limitat are valoarea $\Delta\omega_{M-k} = (2k-1) \Delta\omega_M$, vezi relația (22), ceea ce face ca indicele de

modulație al semnalului MF de pe această armonică să fie $\beta_k = (2k-1)\beta$. Rezultă că lărgimea de bandă ocupată de semnalul modulat MF pe armonica k se calculează cu acest indice folosind relația (7).

b. Efectuarea derivării semnalului modulat MF

- derivarea semnalului MF are rolul de a introduce o modulare suplimentară BLD-P, alături de cea MF:

$$s_d(t) = k_d \frac{4V}{\pi} (\omega_c + \Delta\omega_M f(t)) \cdot \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \quad (25)$$

- rezultă că fiecare componentă spectrală a unui semnal MF va fi modulată BLD-P

c. Detecția de anvelopă

- extrage un semnal proporțional cu anvelopa lui (25):

$$s_o(t) = k_d \cdot k_e \frac{4V}{\pi} [\omega_c + \Delta\omega_M f(t)] = k_d \cdot k_e \frac{4V}{\pi} \omega_c + k_d \cdot k_e \frac{4V}{\pi} \Delta\omega_M f(t) \quad (26)$$

d. Eliminarea componentei continue

- condensatorul C împreună cu Z_{in} a amplificatorului audio, formează un FTS, care dă la ieșire un semnal proporțional cu semnalul modulator:

$$s_o(t) = k_d \cdot k_e \frac{4V}{\pi} \Delta\omega_M f(t) \quad (27)$$

B. Demodulare cu bucla PLL

PLL – este un ansamblu de circuite care generează un semnal a cărei fază este aliniată cu faza unui semnal de referință. Schema bloc a unui buclei PLL este prezentată în Fig. 5.

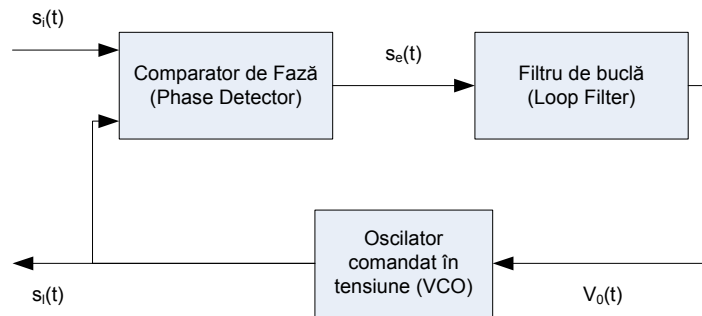


Fig. 5. Schema bloc a buclei PLL

Comparatorul de fază generează la ieșire un semnal proporțional (cazul ideal) cu diferența de fază dintre cele două semnale de intrare. Filtrul de buclă extrage componentele de joasă frecvență a acestui semnal de eroare (de ex. elimină erorile datorată zgomotelor) și generează astfel o tensiune de comandă, care modifică frecvența semnalului generat local de către oscilatorul comandat în tensiune. Sistemul ajunge în echilibru când semnalul de eroare $s_e(t)$ este constantă, care înseamnă că frecvența semnalului generat local coincide cu frecvența semnalului de referință.

Schema unui demodulator MF cu PLL este prezentată în Fig. 6

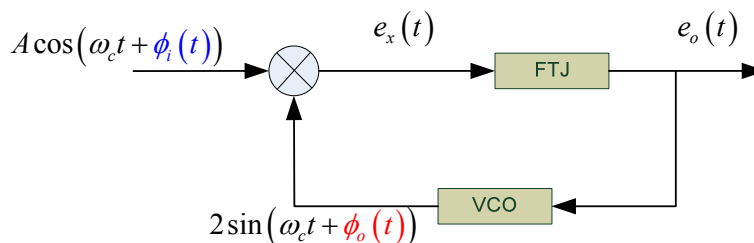


Fig. 6. Demodulator MF cu PLL

Semnalul de eroare $e_x(t)$ se obține prin înmulțirea semnalului recepționat cu semnalul generat local:

$$\begin{aligned} e_x(t) &= A \cos(\omega_c t + \phi_i(t)) \cdot 2 \sin(\omega_c t + \phi_o(t)) = \\ &= A \sin(2\omega_c t + \phi_i(t) + \phi_o(t)) + A \sin(\phi_i(t) - \phi_o(t)) \end{aligned} \quad (28)$$

Filtrul trece jos elimină componentele axate pe $2\omega_c$ și la ieșirea lui avem:

$$e_o(t) = A \sin(\phi_i(t) - \phi_o(t)) = A \sin(\phi_e(t)) \quad (29)$$

unde $\phi_e(t)$ sa notat diferența de fază $\phi_i(t) - \phi_o(t)$.

$$\phi_e(t) = \phi_i(t) - \phi_o(t) \quad (30)$$

Deoarece semnalul de referință (semnalul recepționat) este un semnal modulat în frecvență pe baza (4) rezultă că:

$$\phi_i(t) = \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \quad (31)$$

Înlocuind (31) în (30) putem scrie ca

$$\phi_o(t) = \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau - \phi_e(t) \quad (32)$$

Oscilatorul comandat în tensiune este de fapt un modulator în frecvență care la ieșire generează un semnal a cărui frecvență variază proporțional cu nivelul semnalului de comandă în jurul frecvenței de oscilație liberă. Pulsația semnalului generat la ieșirea VCO este

$$\omega_l = \omega_c + K \cdot e_o(t) \quad (33)$$

Deoarece pulsația este derivata fazei

$$\phi_o'(t) = K \cdot e_o(t) \quad (34)$$

De unde rezultă că

$$e_o(t) = \frac{1}{K} \phi_o'(t) \quad (35)$$

Înlocuind relația (32) în (35) obținem

$$\begin{aligned} e_o(t) &= \frac{1}{K} \left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau - \phi_e(t) \right)' = \frac{1}{K} \left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau \right)' + \frac{1}{K} \phi_e'(t) = \\ &= \frac{\Delta\omega_M}{K} f(t) + \frac{1}{K} \phi_e'(t) \approx \frac{\Delta\omega_M}{K} f(t) \end{aligned} \quad (36)$$

Relația (36) arată că semnalul de eroare filtrat este proporțional cu viteza de variație a fazei semnalului recepționat, care în cazul semnalelor modulate în frecvență este proporțională cu nivelul semnalului modulator.

- Aproximarea din (36) putem face dacă diferența de fază dintre semnalul recepționat și cel generat local este relativ redusă, pentru asta caracteristica filtrului din bucla PLL trebuie aleasă astfel încât bucla să poată urmări variațiile de fază ale semnalului recepționat.

Considerații privitoare la translația descendentă în frecvență a semnalelor ML și MF

- semnalele modulate MF sunt transmise pe diverse frecvențe purtătoare; pentru efectuarea demodulării receptorul MF ar trebui să modifice frecvențele centrale ale celor două FTB, (păstrând lărgimile de bandă constante!) și ar trebui să modifice parametrii circuitelor de derivare și detecție de anvelopă în cazul demodulării prin derivare și detecție de anvelopă, respectiv frecvența de oscilație liberă în cazul demodulării cu PLL.

- aceste cerințe implică probleme tehnologice considerabile, conducând la o implementare complicată.

- pentru a elimina acest neajuns, demodularea este efectuată pe o frecvență fixă, numită frecvență intermediară f_i .

- translația semnalelor modulate de pe frecvența purtătoare din canal f_c pe frecvența intermediară f_i , fără a modifica parametrul modulat, este realizată în două etape:

- înmulțirea semnalului recepționat cu un semnal cosinusoidal generat local numit semnal de translație, având frecvența f_i :

$$s_x(t) = \frac{V(t) \cos(\omega_c t + \Phi(t))}{V_{ref}} \cdot A \cos(\omega_i t) = \quad (37)$$

$$= V'(t) \cos(\omega_c t + \Phi(t) - \omega_i t) + V'(t) \cos(\omega_c t + \Phi(t) + \omega_i t);$$

- filtrarea TB care reține doar banda de frecvențe axată pe f_i

- deoarece f_i este mai mică decât f_c , rezultă că f_i trebuie să fie mai mare decât f_i ; rezultă că al doilea termen este plasat la frecvențe ridicate și va fi suprimat de filtrarea TB, care va reține doar primul termen din (37), semnalul translatat.

- dacă se impune ca:

$$|\omega_c - \omega_i| = \omega_i \quad (38)$$

rezultă două alternative:

$$\omega_c > \omega_i \Rightarrow \omega_i = \omega_c - \omega_i \text{ si } s_i(t) = k_f V' \cos(\omega_i t + \Phi(t)); \text{ a.} \quad (39)$$

$$\omega_c < \omega_i \Rightarrow \omega_i = \omega_c + \omega_i \text{ si } s_i(t) = k_f V' \cos(\omega_i t - \Phi(t)); \text{ b.}$$

- alternativa a. utilizează o frecvență de translație mai mică și nu modifică semnul fazei semnalului translatat, pe când alternativa b. modifică semnul acestei faze și utilizează o f_i mai mare.

- filtrul TB trebuie să aibă frecvența centrală și lărgimea de bandă:

$$f_0 = f_i \quad (40)$$

$$\Delta\omega = LB_{MF}$$

- condiția de a asigura separabilitatea spectrelor din relația (37) poate fi dedusă ușor;

- deoarece multiplicatoarele analogice nu sunt disponibile la frecvențe foarte mari, multiplicarea poate fi realizată cu un chopper echilibrat sau neechilibrat,

- ansamblul chopper plus FTB realizat cu un circuit RLC paralel acordat mai este numit și mixer

Demodulatoare MF digitale

Considerăm că semnalul recepționat modulat în frecvență este:

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\omega_c t + \Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \quad (41)$$

Ținând cont de egalitatea $\cos(a+b) = \cos(a) \cdot \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(b)$ relația (41) poate fi scrisă ca

$$s_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \cdot \cos(\omega_c t) - V_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \cdot \sin(\omega_c t) = \quad (42)$$

$$= I_{FM}(t) \cdot \cos(\omega_c t) - Q_{FM}(t) \cdot \sin(\omega_c t)$$

Cu ajutorul unui demodulator MAQ se extrag componentele $I_{FM}(t)$ și $Q_{FM}(t)$

$$I_{FM}(t) = V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) \quad (43)$$

$$Q_{FM}(t) = -V_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right)$$

Aceste semnale reprezintă partea reală și partea imaginară a anvelopei complexe:

$$\begin{aligned}
 s_{FM-BB}(t) &= I_{FM}(t) + jQ_{FM}(t) = \\
 &= V_0 \cos\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) - jV_0 \sin\left(\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \\
 &= V_0 e^{j\Delta\omega_M \cdot \int_0^t f(\tau) d\tau}
 \end{aligned} \tag{44}$$

Cu ajutorul convertoarelor analog-digitale (CAD) aceste semnale sunt convertite în semnale numerice:

$$\begin{aligned}
 s_{FM-BB}(nT_e) &= I_{FM}(nT_e) + jQ_{FM}(nT_e) = \\
 &= V_0 e^{j\Delta\omega_M \sum_{x=0}^n f(x)}
 \end{aligned} \tag{45}$$

Variația de fază a anvelopei complexe este de fapt variația fazei semnalului recepționat datorită modulației,

$$\phi_n = \angle(s_{FM-BB}(nT_e)) = \tan^{-1}\left(\frac{Q_{FM}(nT_e)}{I_{FM}(nT_e)}\right) = \Delta\omega_M \sum_{x=0}^n f(xT_e) \tag{46}$$

Relația (46) poate fi scrisă ca

$$\phi_n = \Delta\omega_M \sum_{x=0}^n f(xT_e) = \Delta\omega_M \sum_{x=0}^{n-1} f(xT_e) + \Delta\omega_M f(nT_e) = \phi_{n-1} + \Delta\omega_M f(nT_e) \tag{47}$$

Pe baza relației (47) semnalului informațional recepționat poate fi determinat pe baza relației recursive:

$$f(nT_e) = \frac{\phi_n - \phi_{n-1}}{\Delta\omega_M} \tag{48}$$

Pe baza relațiilor de mai sus schema bloc a unui receptor MF digital este:

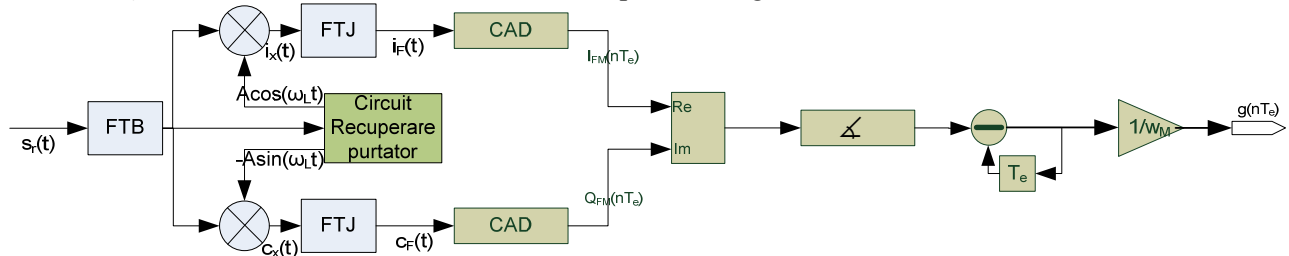


Fig. 7. Demodulator FM digital

Performanțele MF în prezența zgomotului (performanțe de SNR)

- considerăm că semnalul MF de intrare are puterea P_s iar zgomotul Gaussian aditiv are puterea $P_n = N_0 \cdot LB_{FM}$, ambele după eliminarea M.P.A.;
- performanțele de SNR ale MF sunt evaluate prin raportul dintre valoarea raportului semnal/zgomot de la ieșirea demodulatorului și valoarea aceluiași raport la intrarea demodulatorului.
- raportul S/Zg (S/N – signal to noise) în exprimare liniară va fi notat cu ρ , iar în exprimare logaritmică cu SNR [dB]

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\rho_o}{\rho_i}; \\
 \rho_o &= \frac{P_{so}}{P_{No}};
 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\rho_i = \frac{P_{si}}{P_{Ni}} = \frac{V_0^2 f^2(t)}{2N_0 \cdot LB_{FM}};$$

- punând expresia semnalului MF sub forma:

$$s_i(t) = V(t) \cos \left(\omega_c t + \Delta \omega_M \int_0^t f(\tau) d\tau \right) = V(t) \cos(\omega_c t + \Phi(t)) \quad (50)$$

- semnalul de zgomot poate fi exprimat sub aceeași formă:

$$n_i(t) = R(t) \cos(\omega_c t + \Psi(t)) \quad (51)$$

- deoarece semnalul de la intrarea demodulatorului este o sumă dintre $s_{MF}(t)$, și semnalul de zgomot, el poate fi exprimat sub forma:

$$\begin{aligned} s_r(t) &= s_i(t) + n_i(t) = V(t) \sin[\omega_c t + \Phi(t)] + R(t) \cos[\omega_c t + \Psi(t)] = A(t) \cos[\omega_c t + \varphi_r(t)]; \\ \varphi_r(t) &= \Phi(t) + \arctg \frac{U(t)}{V_0}; \\ U(t) &= R(t) \sin[\Psi(t) - \Phi(t)]; \end{aligned} \quad (52)$$

- datorită E.M.P.A. amplitudinea semnalului rezultat va fi constantă, iar purtătorul va fi sinusoidal;

- demodularea MF va extrage doar o tensiune $U_{LF}(t)$, proporțională cu variația frecvenței semnalului rezultat, care reprezintă semnalul de ieșire $s_o(t)$:

$$U_{LF}(t) = A \frac{d\varphi_r(t)}{dt} = A \left[\Phi(t) + \arctg \frac{R(t) \sin(\Psi(t) - \Phi(t))}{V_0} \right]' \quad (53)$$

- în funcție de valorile SNR_i , semnalul de ieșire $U_{LF}(t)$ trebuie analizat pentru două cazuri „extreme”:

1. SNR_i foarte mic, adică $R(t) \gg V_0 \rightarrow SNR_i < 0$ dB

- în acest caz probabilitatea ca amplitudinea $R(t)$ a zgomotului să fie mai mare decât V_0 este apropiată de 1, generând un semnal de ieșire care nu conține nici un termen care să fie proporțional cu semnalul modulator, vezi [Ed. Nicolau], ci doar termeni care „sunt captați” de zgomot:

$$P(R(t) > V_0) \approx 1 \Rightarrow U_{LF}(t) = A \frac{d\phi_r(t)}{dt} = A \frac{d \left[\arctg \frac{R(t) \sin(\Psi(t) - \Phi(t))}{V_0} \right]}{dt}; \quad (54)$$

de aceea, în acest domeniu de valori ale SNR_i , recepția este “captată” de zgomot, iar valoarea $SNR_i = 0$ dB (pentru FM cu $\beta = 3.33$) se numește prag “de captare a recepției de către zgomot”, PCZ.

- pentru $SNR_i = 0$ dB, valoarea corespunzătoare a $SNR_0 = 10$ dB, iar valoarea SNR_0 , pentru $SNR_i < 0$ dB, este:

$$SNR_0 [dB] = 10dB + k_1 \cdot SNR_i [dB] \quad (55)$$

2. SNR_i mare, adică $R(t) \ll V_0 \rightarrow SNR_i > 10$ dB (5 dB)

- pentru $SNR_i \geq 10$ dB (5 dB), $P(R(t) < V_0) > 0.996$ și valoarea SNR_0 la ieșire este semnificativ mai mare decât cea a de la intrarea SNR_i ;

- această situație conduce la relațiile (56), în exprimare liniară și logaritmică:

$$\begin{aligned} P(R(t) < V_0) \approx 1 \Rightarrow \eta &= \frac{\rho_o}{\rho_i} = k_3 \cdot 3 \cdot \beta^2 \cdot \frac{LB_{FM}}{2 \cdot f_{mM}}; \quad \text{pentru } \rho_i > 10 \Rightarrow \\ SNR_0 [dB] &= 17dB + 10 \lg \left(3 \cdot \beta^2 \cdot \frac{LB_{FM}}{2 \cdot f_{mM}} \right) + SNR_i [dB] \quad \text{pt. } SNR_i > 10dB; \end{aligned} \quad (56)$$

- în reprezentarea logaritmică din (56) k_3 , care este panta dreptei din intervalul (0,10), a fost calculată pentru $\beta = 3,3$

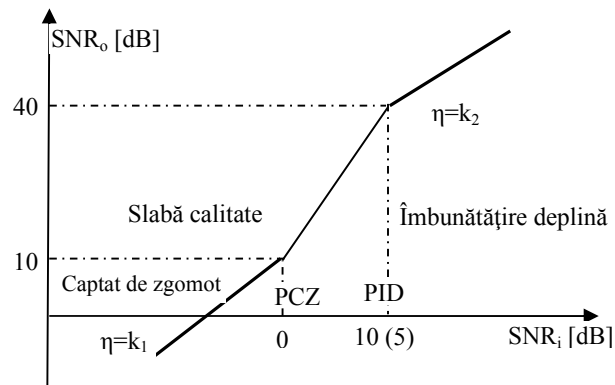


Fig. 8. Câștigul demodulatorului MF (reprezentarea aproximativă)

- acest fenomen este numit “îmbunătățire deplină” iar nivelul $SNR_i = 10$ dB (5 dB) este denumit prag de îmbunătățire deplină, P.I.D.
- P.I.D. = 10 dB pentru demodulatoarele care nu au buclă de reacție, cum sunt cele studiate mai sus;
- P.I.D. = 5 dB pentru demodulatoarele cu buclă de reacție, cum sunt cele cu PLL, [Ed. Nicolau].
- pentru valori ale SNR_i între cele două praguri ($0 < SNR_i < 10$ dB), valoarea lui SNR_i se mărește cu un factor de multiplicare, vezi Fig. 8.
- în domeniul $SNR_i \in [0, 10]$ dB, semnalul demodulat e de slabă calitate, dar nu e captat de zgomot.
- metoda translației în frecvență este utilizată și pentru semnalele MA, dar valoarea frecvenței intermediare pe care se face demodularea este $f_i = 455$ kHz.

Referințe:

- Ed. Nicolau, coord. ”Manualul Inginerului electronist. Radiotehnica vol.III”, Ed. Tehnică, 1989
- <https://ccrma.stanford.edu/software/snd/snd/fm.html>
- John G Proakis , Masoud Salehi, ”Fundamentals Of Communication Systems” Prentice Hall 2004
- B.P. Lathi, “Modern Digital and Analog Communication Systems” Third Edition, Oxford University Press, 1998
- Simon Haykin ”Communication Systems” 4th edition, John Wiley & Sons, 2001