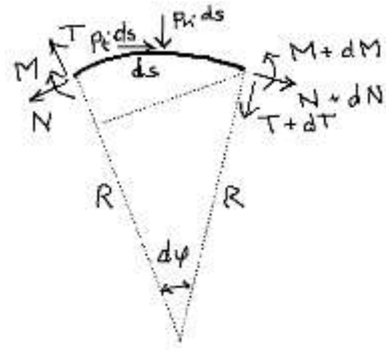
RELAȚII DIFERENȚIALE ÎNTRE ÎNCĂRCĂRI ȘI EFORTURI

În cazul unei bare curbe situate în plan, indiferent de forma curburii barei, se poate lua în considerare un segment cu o lungime ds aproape neglijabilă. Având o lungime atât de mică, se poate considera curbura acesteia de formă circulară (având raza R), iar încărcarea de pe segment se poate considera ca o porțiune dintr-o forță uniform distribuită (având intensitatea p și o orientare oarecare). Această încărcare uniform distribuită se poate descompune într-o componentă tangențială p_t și într-o componentă normală p_n în raport cu direcția axului segmentului de bară. În urma acestei încărcări, starea de eforturi va fi diferită la capetele segmentului. Pentru a stabili diferența dintre starea de eforturi la cele două capete ale segmentului, se pot exprima condițiile echilibrului static (prin ecuații de proiecții și de moment încovoietor):



$$N + dN = N \cdot \cos d\varphi + T \cdot \sin d\varphi - p_t \cdot ds \cdot \cos\frac{d\varphi}{2} - p_n \cdot ds \cdot \sin\frac{d\varphi}{2}$$

$$T + dT = T \cdot \cos d\varphi - N \cdot \sin d\varphi + p_t \cdot ds \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} - p_n \cdot ds \cdot \cos\frac{d\varphi}{2}$$

$$M + dM = M + T \cdot ds \cdot \cos d\varphi - N \cdot ds \cdot \sin d\varphi + p_t \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} - p_n \cdot ds \cdot \frac{ds}{2} \cdot \cos\frac{d\varphi}{2}$$

Având în vedere că segmentul ds și unghiul $d\varphi$ sunt foarte mici, se poate considera $\sin\frac{d\varphi}{2} \cong 0$ și $\frac{ds}{2} \cong 0$, respectiv $\cos\frac{d\varphi}{2} = 1$ și $\cos d\varphi \cong 1$. În consecință, neglijând valorile aproape nule, din ecuațiile de mai sus va rezulta:

$$dN = -p_t \cdot ds + T \cdot \sin d\varphi$$
$$dT = -p_n \cdot \mathrm{ds} - N \cdot \sin d\varphi$$
$$dM = T \cdot ds$$

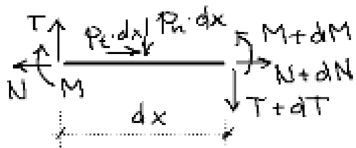
Considerând $\sin d\varphi \cong d\varphi$ iar $d\varphi = \frac{ds}{R}$ se obține:

$$dN = -p_t \cdot ds + T \cdot \frac{ds}{R}$$
$$dT = -p_n \cdot ds - N \cdot \frac{ds}{R}$$
$$dM = T \cdot ds$$

De aici rezultă următoarele relații diferențiale:

$$\frac{dN}{ds} = -p_t + \frac{T}{R}$$
$$\frac{dT}{ds} = -p_n - \frac{N}{R}$$
$$\frac{dM}{ds} = T$$

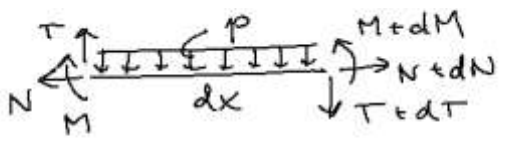
Se poate observa, că nu s-a precizat tipul structurii (static determinat sau static nedeterminat) din care face parte segmentul de bară din care s-a considerat segmentul curb cu lungimea ds, deci relațiile de mai sus sunt valabile pentru toate tipurile de structuri plane.
În cazul unui segment drept ($R \to \infty$) cu lungimea dx, relațiile de mai sus vor fi de forma:



$$\frac{dN}{dx} = -p_t$$
$$\frac{dT}{dx} = -p_n$$
$$\frac{dM}{dx} = T$$

Altfel spus, variația tangentei diagramei de efort axial depinde de componenta tangențială a încărcării, variația tangentei diagramei de forță tăietoare depinde de componenta normală a încărcării, iar variația tangentei diagramei de moment încovoietor depinde de forța tăietoare.

În cazul unei încărcări normale pe axa barei, fără componentă tangențială ($p_t = 0$), relațiile devin:

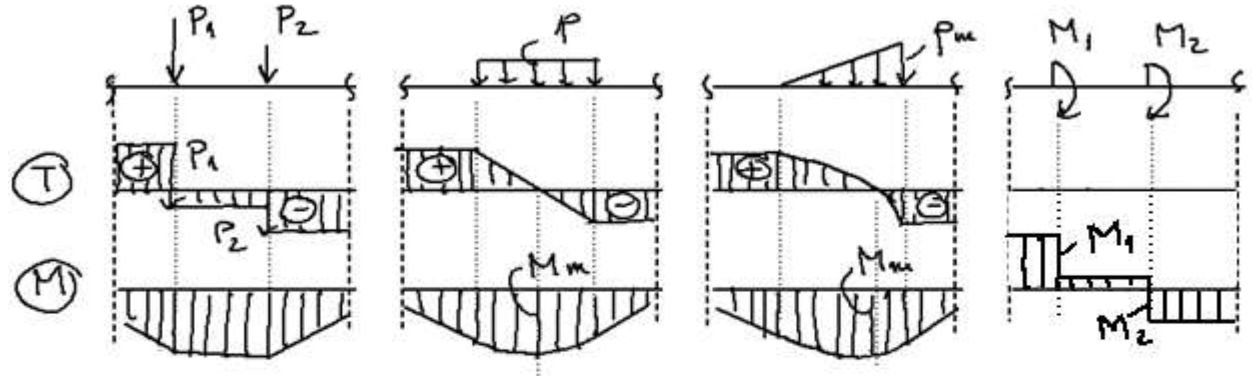


$$\frac{dN}{dx} = 0$$

$$\frac{dT}{dx} = -p$$

$$\frac{dM}{dx} = T$$

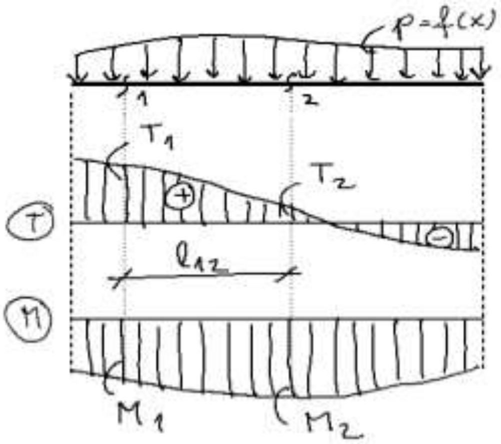
Câteva exemple referitoare la relațiile diferențiale dintre încărcări și eforturi, ilustrate prin diagramele de forță tăietoare și de moment încovoietor:



Sub forțe concentrate perpendiculare la axa barei apare câte un salt în diagrama de forță tăietoare și câte un vârf (schimbare bruscă de tangentă) în diagrama de moment încovoietor. O încărcare perpendiculară uniform distribuită va conduce la o variație liniară a forței tăietoare și la o variație parabolică a diagramei de moment încovoietor (cu tangenta orizontală în punctul în care forța tăietoare trece prin linia de referință). O încărcare distribuită a cărei intensitate variază liniar va conduce la o variație parabolică (de gradul 2) în diagrama de forță tăietoare și la o variație de gradul 3 în diagrama de moment încovoietor. Încărcarea cu momente încovoietoare concentrate nu va avea influență asupra diagramei de forță tăietoare, însă va determina salturi în diagrama de moment încovoietor (tangenta diagramei de moment încovoietor fiind constantă, în concordanță cu alura diagramei de forță tăietoare).

RELAȚII DE RECURENȚĂ PENTRU EFORTURI

Se consideră un segment drept dintr-o bară cu o încărcare perpendiculară distribuită variabil pe axa ei, încărcarea având intensitatea $p = f(x)$, după cum este ilustrat în figura de mai jos.

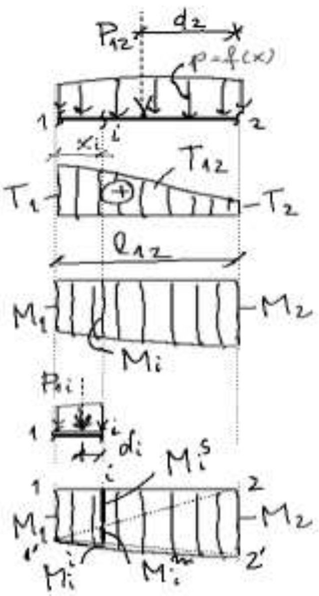


Observând că din relațiile diferențiale anterior discutate, în cazul unei bare drepte cu încărcare perpendiculară pe ax și uniform distribuită, diferența valorilor forței tăietoare și a momentului încovoietor la capetele unui segment se pot exprima sub forma $dT = -p \cdot dx$ și $dM = T \cdot dx$, în secțiunea 2 aceste eforturi se pot exprima în funcție de valorile lor din secțiunea 1, în felul următor:

$$T_2 = T_1 - \int_1^2 p \cdot dx \quad \text{și} \quad M_2 = M_1 + \int_1^2 T \cdot dx$$

Integrala pe intervalul 1–2 reprezintă aria diagramei încărcării p, respectiv aria diagramei T dintre cele două secțiuni, ceea ce ne conduce la exprimarea eforturilor în secțiunea 2 sub forma:

$$T_2 = T_1 - P_{12} \quad \text{și} \quad M_2 = M_1 + T_{12}$$



Pe de altă parte, izolând segmentul 1–2, din condiția de echilibru static momentul încovoietor din secțiunea 2 se poate exprima și sub forma:

$$M_2 = M_1 + T_1 \cdot l_{12} - P_{12} \cdot d_2$$

unde P_{12} reprezintă rezultanta încărcării $p = f(x)$ pe segmentul 1–2, iar d_2 este distanța acestei rezultante față de secțiunea 2. Utilizând această relație pentru a exprima valoarea forței tăietoare în secțiunea 1, se obține:

$$T_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_{12}} + P_{12} \cdot \frac{d_2}{l_{12}}$$

Considerând o secțiune i pe segmentul 1–2, valoarea momentului încovoietor din această secțiune se poate scrie similar, exprimând echilibrul static:

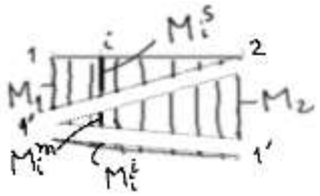
$$M_i = M_1 + T_1 \cdot x_i - P_{1i} \cdot d_i$$

unde P_{1i} reprezintă rezultanta încărcării $p = f(x)$ pe segmentul 1–i, iar d_i este distanța acestei rezultante față de secțiunea i. Înlocuind în această expresie T_1 cu relația anterioară, se obține:

$$M_i = M_1 + \left(\frac{M_2 - M_1}{l_{12}} + P_{12} \cdot \frac{d_2}{l_{12}}\right) \cdot x_i - P_{1i} \cdot d_i =$$

$$= M_1 + (M_2 - M_1) \cdot \frac{x_i}{l_{12}} + P_{12} \cdot \frac{d_2}{l_{12}} \cdot x_i - P_{1i} \cdot d_i$$

Pe de altă parte, expresia valorii acestui moment încovoietor se poate exprima și geometric (din suprafața diagramei de moment încovoietor aferentă segmentului 1–2), divizând suprafața în două triunghiuri (1-1'-2, 1-2'-2) și o a treia suprafață cu o față curbă (sub linia 1'-2'). Astfel, momentul încovoietor din secțiunea i va fi:



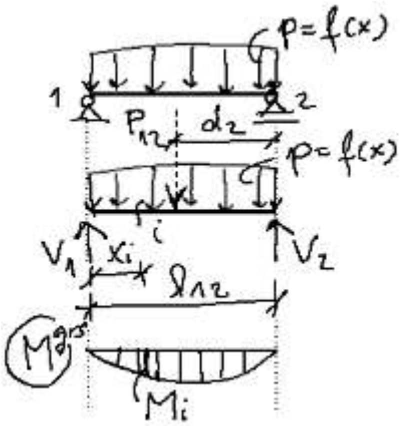
$$M_i = M_i^s + M_i^m + M_i^i = \frac{(l_{12} - x_i)}{l_{12}} \cdot M_1 + \frac{x_i}{l_{12}} \cdot M_2 + M_i^i =$$

$$= M_1 - \frac{x_i}{l_{12}} \cdot M_1 + \frac{x_i}{l_{12}} \cdot M_2 + M_i^i = M_1 + (M_2 - M_1) \cdot \frac{x_i}{l_{12}} + M_i^i$$

Comparând această relație cu cea anterioară scrisă pentru M_i, rezultă:

$$M_i^i = P_{12} \cdot \frac{d_2}{l_{12}} \cdot x_i - P_{1i} \cdot d_i$$

În cazul în care am avea o grindă simplu rezemată, de lungime l_{12}, încărcată cu $p = f(x)$, momentul încovoietor într-o secțiune i (aflată la distanța x_i față de capătul din stânga, notat cu 1) ar rezulta din condiția de echilibru static:

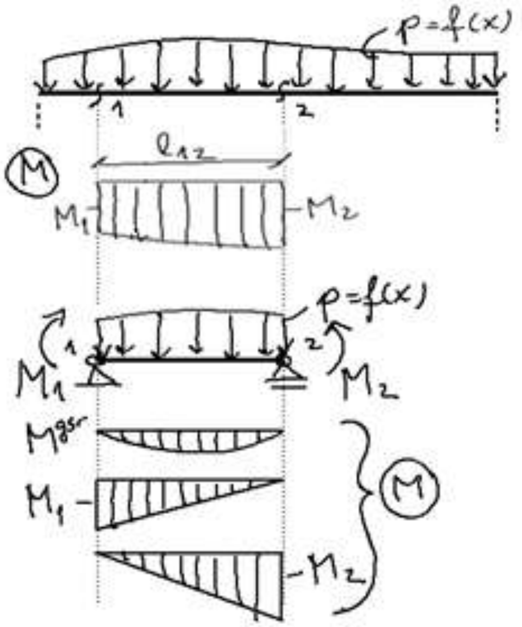


$$M_i^{gsr} = V_1 \cdot x_i - P_{1i} \cdot d_i$$

Unde reacțiunea din capătul 1 ar avea expresia:

$$V_1 = P_{12} \cdot \frac{d_2}{l_{12}}$$

În concluzie, segmentul inferior din M_i (notat cu M_i^i) reprezintă de fapt valoarea momentului încovoietor din punctul corespunzător secțiunii i de pe segmentul 1–2, aflată pe o grindă simplu rezemată cu deschiderea l_{12}, încărcată cu $p = f(x)$ (identic cu încărcarea de pe segmentul 1–2). Altfel spus, dacă dintr-o diagramă de moment încovoietor se extrag două triunghiuri ca în exemplul prezentat, porțiunea care va rămâne coincide cu diagrama de moment încovoietor de la o grindă simplu rezemată, cu aceeași încărcare.



În consecință, orice porțiune de bară dreaptă poate fi extrasă dintr-o structură (cu încărcările aferente porțiunii) și tratată ca o grindă simplu rezemată care, în plus față de încărcările aferente, va fi acționată și de momentele încovoietoare M_1 și M_2 la capete.