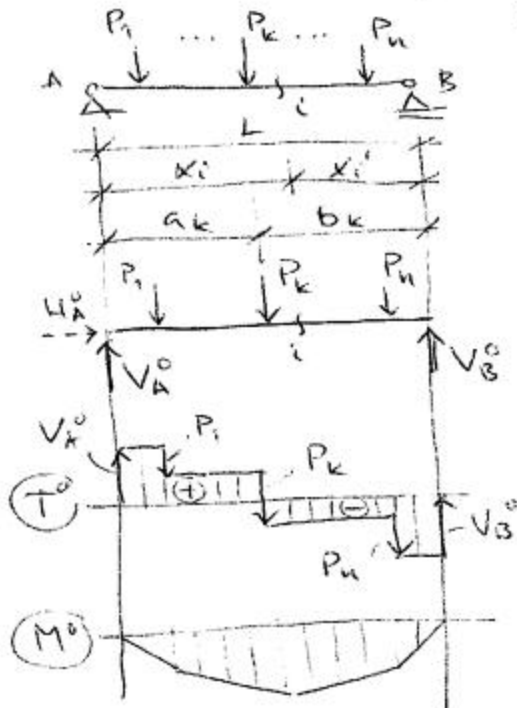


GRINDA DREPTÉ

GRINDA ÎNSEAMNÉ O BARÉ DREPTÉ SOLICITATÉ PREPONDERENT LA ÎNCOVIERÉ, CÉA MAI SIMPLÉ VARIANTÉ ÉSTE GRINDA SIMPLU REZEMATÉ, PENTRU A AFLA REACIUNILE, ACESTE SÚNT EVIDENIATE ÎNVOUIND EFECTUL APARATELOR DE REZEM, CELE VERTICALE:



$$V_A^0 = \sum_A^B \frac{P_k \cdot b_k}{L}$$

$$V_B^0 = \sum_A^B \frac{P_k \cdot a_k}{L}$$

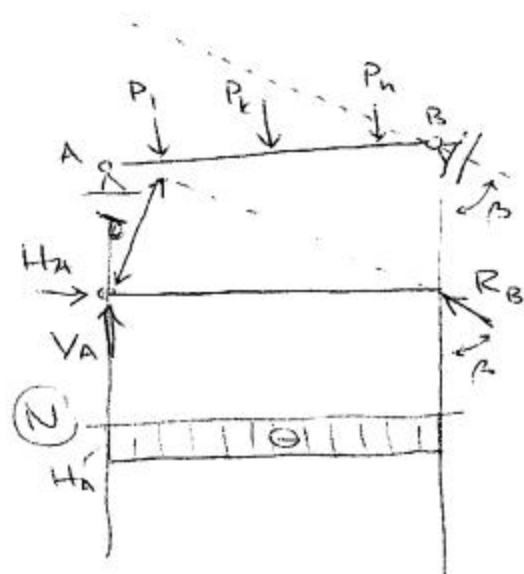
EFORTURILE DIN SECȚIUNEA i SE POT OBTINE ÎN FELUL URZĂTOR:

$$T_i^0 = V_A^0 - \sum_A^i P_k$$

$$M_i^0 = V_A^0 \cdot x_i - \sum_A^i P_k (x_i - a_k)$$

DACĂ NU SÚNT ÎNCĂRCĂRI ÎNCLINATE, ATUNCI $N_i^0 = 0$ ($\text{și } H_A = 0$)

ÎN CAZUL UNUI REZEM ÎNCLINAT (SAU DACÉ EZISTÉ ÎNCĂRCĂRI ÎNCLINATE) VA APARE ȘI O REACȚIUNE ORIZONTALĂ ȘI ÎN GRINDĂ O SĂ FIE ȘI EFORT AXIAL. FORȚA TĂIERURILE ȘI MOMENTUL ÎNCOVIERETOR DIN SECȚIUNEA i VOR AVEA EXPRESII SIMILARE CU CELE DIN CAZUL DE MAI SUS.



$$R_B = \frac{1}{d} \sum_A^B P_k \cdot a_k$$

$$H_A = R_B \cdot \sin \beta$$

$$V_A = \sum_A^B \frac{P_k \cdot b_k}{L} = V_A^0$$

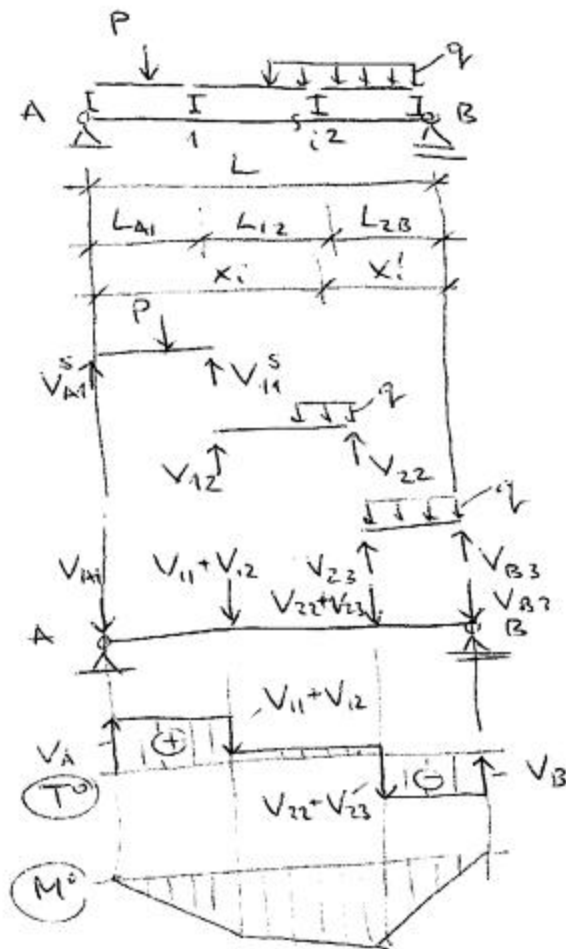
$$\text{DECI } T_i = T_i^0$$

$$M_i = M_i^0$$

ȘI $N_i = H_A$ (DACĂ NU SÚNT ÎNCĂRCĂRI ÎNCLINATE)

ÎN CAZUL UNOR ÎNCĂRCĂRI ÎNCLINATE O SĂ APARÉ SALTURI ÎN DIAGRAMA EFORTULUI AXIAL.

ÎN CAZUL UNOR ÎNCĂRCĂRI APLICATE ÎNDIRECT (PE SISTEME SUPLEMENTARE CARE VOR TRANSFERA ÎNCĂRCĂRILE PE GRINDĂ):



REAȚIUNILE SE OBTIN CA ȘI ÎN CAZUL ÎNȚĂL PREȚENTAT.

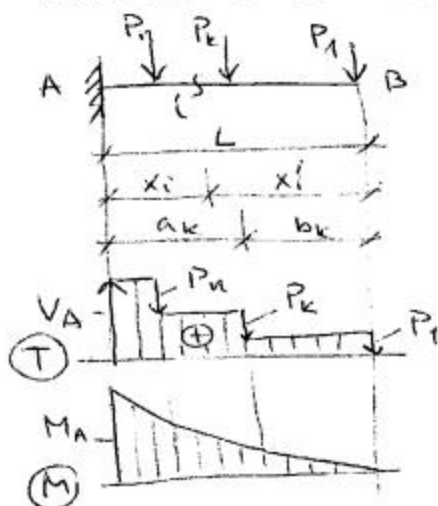
LUNGHEȚILE PE CARE SE APLICĂ ÎNCĂRCĂRILE, SE POT CONSIDERA GRINZI SIMPLU REZEMATE, DETERMINÂND REAȚIUNILE DIN PUNCTELE DE REZEMARE, CA APOI ACESTE REAȚIUNI SĂ FIE CONSIDERATE ÎNCĂRCĂRI (CU SENS CONTRAR) PE GRINDĂ

OBTINEREA EFORTURILOR DIN SECȚIUNEA I SE VA FACE CA ȘI ÎN CAZUL ÎNȚĂL, DIN ACESTE ÎNCĂRCĂRI REZULTATE.

AVÂND ÎN VEDERE CĂ TRANSMITEREA ÎNCĂRCĂRILOR SE REALIZEAZĂ PRIN ELEMENTELE DE CONTACT, DIAGRAMA DE MOMENT ÎNCĂRCĂTOR VA AVEA VARIATĂ ÎNĂRIE.

ÎN CAZUL GRINZILOR ÎNCLINATE, MODUL DE ABORDARE ESTE SIMILAR CU CEL DIN CAZUL GRINZILOR CU REZEM ÎNCLINAT.

ÎN CAZUL GRINZII ÎNCASTRATE LA UN CAPĂT (ȘI LIBERĂ LA CAPĂTUL OPUS) DIAGRAMELE DE EFORTURI SE POT DETERMINA FĂRĂ A CALCULA ÎN PREALABIL REAȚIUNILE, PRIN CONSIDERARE ÎNCĂRCĂRILOR DINSPRE CAPĂTUL LIBER:



$$T_i = \sum_B^i P_k$$

$$M_i = \sum_B^i P_k (x_i - b_k)$$

REAȚIUNILE VOR FI:

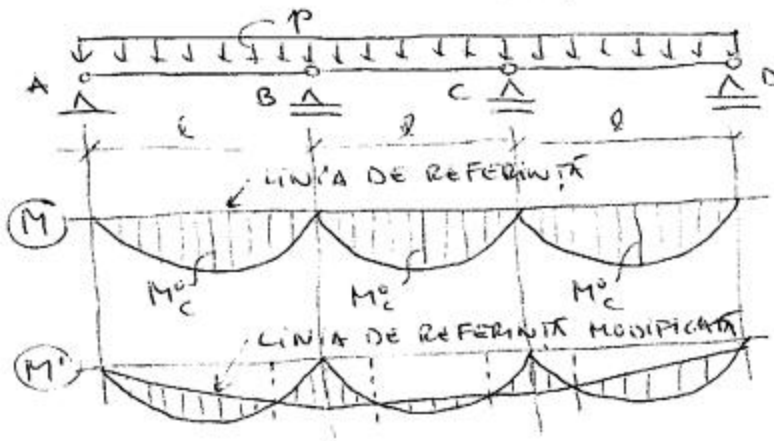
$$V_A = \sum_B^A P_k$$

$$M_A = \sum_B^A P_k \cdot a_k$$

GRINDA CU CONSOLE ȘI ARTICULAȚII

ACESTE TIPURI DE GRINZI SE NUMESC ȘI GRINZI "GERBER" (DUPĂ NUMELE INGINERULUI DE CĂI FERATE GERMAN JOHANN HEINRICH GOTTFRIED GERBER, CARE LE-A PATENTAT ÎN SEC. XIX), CONCEPTUL LOR DE BAZĂ SE LEAGĂ DE TRANSFORMAREA UNUI SISTEM COMPUS DIN GRINZI SIMPLU REZEMATE ALĂTURATE, PRIN TRANSLATAREA PUNCTELOR DE ARTICULARE, ÎNTR-UN SISTEM CONTINUU CU CONSOLE ȘI ARTICULAȚII.

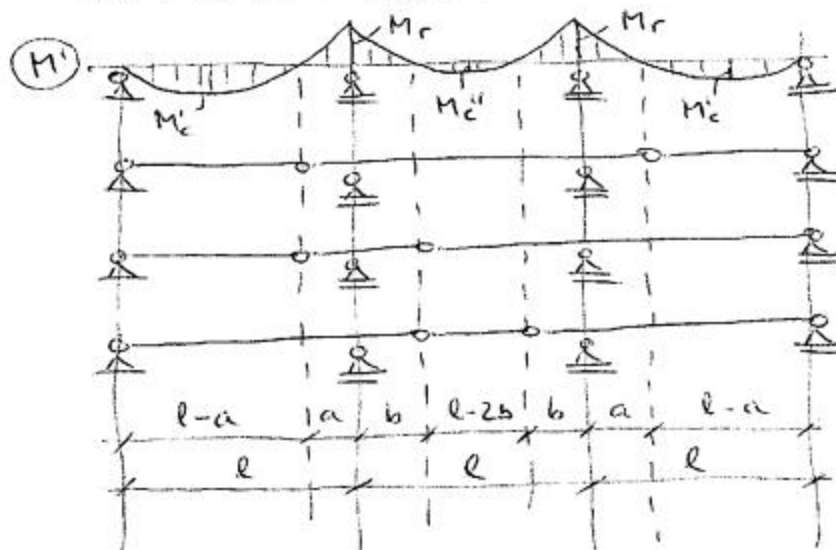
VOM DISCUȚA CAZUL UNEI DESCHIDERI CU TREI SEGMENTE EGALE (CAZUL DE FRECVENȚĂ ÎNTĂLNIT LA PODOBILE PESTE RĂURI).



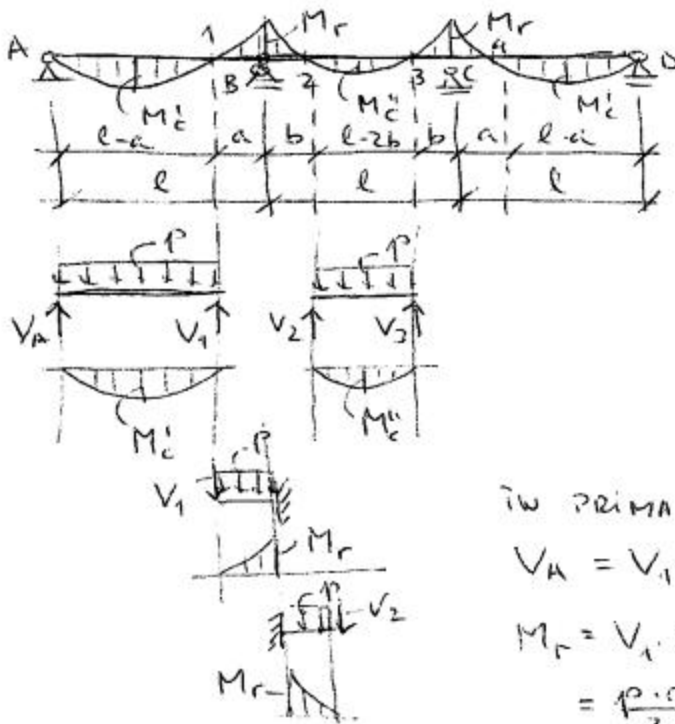
CONSIDERÂND O ÎNCĂRCĂRE UNIFORM DISTRIBUȚĂ PE ORIZZONTALĂ, VOR REZULTA TREI SECVENȚE PARABOLICE IDENTICE PENTRU DIAGRAMA DE MOMENTE ÎNCOVUIETORĂ, VALORILE MAXIME ÎN CAMP FIIND:

$$M_c^0 = \frac{p \cdot l^2}{8}$$

PENTRU UTILIZAREA MAI EFICIENTĂ A MATERIALULUI DIN SECȚIUNI, AR TREBUI MODIFICATĂ LINIA DE REFERINȚĂ DIN DIAGRAMA DE MOMENTE ÎNCOVUIETORĂ (CA ÎN FIGURA DE MAI SUS), ASTFEL ÎNȚIT SĂ FIE SOLICITATE ȘI ZONELE DINSPRE REAZEME, ACEST LUCRU SE POATE REALIZA PRIN MUTAREA ARTICULAȚIILOR ÎN PUNCTELE ÎN CARE DORIM CA LINIA DE REFERINȚĂ SĂ FIE INTERSECTATĂ DE DIAGRAMA MOMENTELOR ÎNCOVUIETORĂ. DESIGUR, EXISTĂ MĂI MULTE ASEMENEA VARIANTE POSIBILE, ÎNSĂ NU TOATE SUNT LA FEL DE SIGURE:



PENTRU APRECIEREA SIGURANȚEI, TREBUIE VĂZUT ÎN CE MĂSURĂ AR FI AFECTATĂ ÎN TREAGA STRUCTURĂ ÎN URMA CEDĂRII UNEI PĂRȚI. DINTRE CELE TREI EXEMPLE ILUSTRATE, CEA DE A TREIA PREZINTĂ CEA MAI MARE SIGURANȚĂ (DAR, ASTA NU EXCLUDE POSIBILITATEA UTILIZĂRII ȘI A CEORILORLTE VARIANTE).



ÎN CONTINUAȚIE SE VA DISCUȚA STABILIZAREA POZIȚIILOR ARTICULAȚIILOR, URMĂRIND ANUMITE CRITERII.

SE POATE OBSERVA CĂ ÎN DESCINDERILE MARGINALE ȘI ÎN CEA DIN MIJLOC AVEM ZONE PE CARE PUTEM CONSIDERA GRINZI SIMPLU REZEMATE ($l-a$ ȘI $l-2b$), ȘI CONSOLE (a ȘI b).

ÎN PRIMA DESCINDERE (A-B):

$$V_A = V_1 = p \cdot \frac{l-a}{2} \quad \text{IAR } M_c' = p \cdot \frac{(l-a)^2}{8}$$

$$M_r = V_1 \cdot a + p \cdot a \cdot \frac{a}{2} = p \cdot \frac{l-a}{2} \cdot a + p \cdot \frac{a^2}{2} = p \cdot \frac{a}{2} (l-a+a) = p \cdot \frac{a \cdot l}{2}$$

ÎN DESCINDEREA CENTRALĂ: $V_2 = V_3 = p \cdot \frac{l-2b}{2}$; $M_c'' = p \cdot \frac{(l-2b)^2}{8}$
 $M_r = V_2 \cdot b + p \cdot b \cdot \frac{b}{2} = p \cdot \frac{(l-2b)}{2} \cdot b + p \cdot \frac{b^2}{2} = p \cdot \frac{b}{2} (l-2b+b) = p \cdot \frac{b}{2} (l-b)$

AVÂND ÎN VEDERE CĂ MOMENTUL PE REAZEMUL "B" ESTE IDENTIC ÎN CELE DOUĂ EXPRIMĂRI PRECEDENTE, REZULTĂ URMĂTOAREA RELATIE ÎNTRE DISTANȚELE a ȘI b :

$$\frac{p \cdot a}{2} l = \frac{p \cdot b}{2} (l-b)$$

ADICĂ: $a = b \cdot \frac{l-b}{l} = b - \frac{b^2}{l}$

ÎN CONSECINȚĂ, ALEGÂND O VALOARE PENTRU b , VA REZULTA ÎMPLICIT O VALOARE PENTRU a (ȘI VICE VERSA).

ASTFEL, ÎN CAZUL ÎN CARE SE DOREȘTE CA MOMENTELE ÎNCOVIERTOARE MAXIME DIN CÂMPURILE MARGINALE SĂ FIE EGALE CU VALOAREA CU MOMENTELE ÎNCOVIERTOARE DE DEASUPRA REAZEMELOR:

$$M_c' = M_r \quad \text{ADICĂ } p \cdot \frac{(l-a)^2}{8} = p \cdot \frac{a \cdot l}{2}$$

$$l^2 - 2la + a^2 = 4al$$

$$a^2 - 6al + l^2 = 0$$

REZULTĂ O ECUAȚIE DE GRADUL 2 ÎN CARE SE VOIE OBTINE 2 VALORI PENTRU a , ÎNSĂ DOAR VALOAREA SITUATĂ ÎN ÎNTERVALUL $(0, l)$ POATE FI CONSIDERATĂ SOLUȚIE.

ÎN CAZUL ÎN CARE SE URMĂREȘTE EGALITATEA MOMENTELOR ÎNCOVIERTOARE MAXIME ÎN CELE 3 CÂMPURI:

$$M_c' = M_c'' \quad \text{ADICĂ } p \cdot \frac{(l-a)^2}{8} = p \cdot \frac{(l-2b)^2}{8} \quad \text{VA REZULTA RELATIA}$$

$$a = 2 \cdot b$$

ÎN CAZUL ÎN CARE SE URMĂREȘTE CA MOMENTELE ÎNCOVIERTOARE DE DEASUPRA REAZEMELOR SĂ AIBĂ VALOAREA EGALĂ CU CEA A MOMEN-

TULUI ÎNCOVICIETOR DIN CÂMPUL CENTRAL :

$$M_r = M_c \quad \text{ADICĂ} \quad p \cdot \frac{b(l-b)}{2} = p \cdot \frac{(l-2b)^2}{8}$$

$$4bl - 4b^2 = l^2 - 4bl + 4b^2$$

$$8b^2 - 8lb + l^2 = 0$$

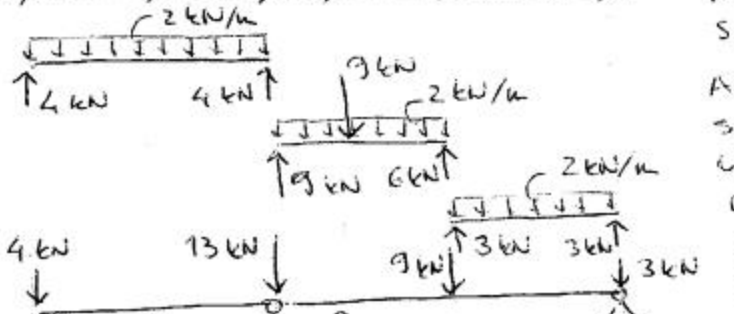
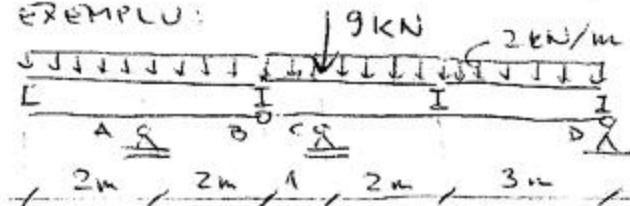
SE AJUNGE LA O ECUAȚIE DE GRADUL 2 DIN CARE SE POT OBTINE 2 VALORI PENTRU b , ÎNSĂ DOAR CEA SITUATĂ ÎN INTERVALUL $(0, l)$ VA FI SOLUȚIE.

VARIANTA OBTINERII UNOR VALORI EGALE PENTRU MOMENTELE ÎNCOVICIETARE DIN CÂMPURI (MARGINALE ȘI CENTRAL) ȘI DE DEASUPRA REZEMELOR NU ESTE POSIBILĂ FĂRĂ MODIFICAREA DESCHIDERII l A CÂMPULUI CENTRAL (ȘI IMPLICIT, A DESCHIDERILOR l ALE CÂMPURILOR MARGINALE).

INCĂRCĂRI APLICATE INDIRECT

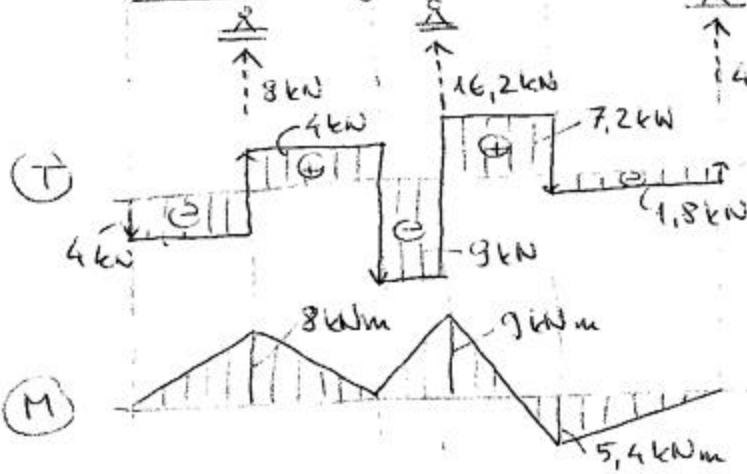
CA ȘI ÎN CAZUL GRINDILOR DREPT (PREZENTATE ANTERIOR), TRANSFERUL ÎNCĂRCĂRII SE VA REALIZA DOAR ÎN PUNCTELE DE CONTACT ÎNTRU SISTEMUL SECUNДАР ȘI CEL PRINCIPAL.

EXEMPLU:



DUPĂ REZOLVAREA SISTEMELOR SECUNDATE, REACȚIUNILE OBTINUTE VOR DEVENI ÎNCĂRCĂRI PE SISTEMUL PRINCIPAL (CU SENȘ CONTRAR).

APLICÂND ACESTE ÎNCĂRCĂRI, SE VOR DETERMINA REACȚIUNILE DIN LEGĂTURILE EXTERIOARE, ÎNTRU DUPĂ CE SE CUNOȘTE TOATE FORȚELE CE ACȚIONEAZĂ PE STRUCTURĂ, EFORȚURILE.



CADRE PLANE

SUNT STRUCTURI ALCĂTUITE DIN BAZE (SOLICITATE PREPUNDENT LA ÎNCOVIERE) CU NODURI RIGIDE. VARIANTELE STATIC DETERMINATE SE ÎNTÂLNESC FOARTE RAR ÎN REALITATE, ÎNSĂ ACESTEA STAU LA BAZA ANALIZEI CADRELOR STATIC NEDETERMINATE.

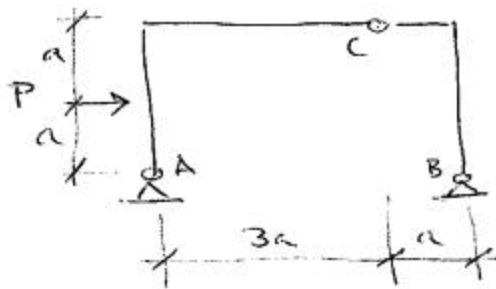
EXEMPLU:

CADRUL STATIC NEDETERMINAT DIN FIGURĂ POATE FI TRANSFORMAT ÎNTR-O SCHEMĂ STATIC DETERMINATĂ, ÎN MĂI MULTE VARIANTE:

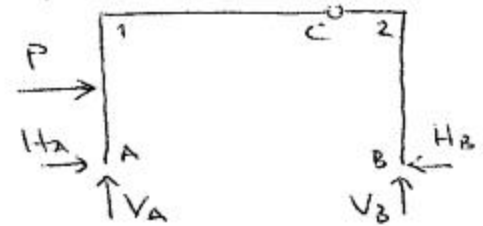


TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORȚURI SE FACE CONFORM CELOR STUDIIATE LA BAZE DREPTE (DUPĂ DETERMINAREA REACȚIUNILOR). PENTRU ORICARE NOD ÎZOLAT (SAU SECȚIUNE) SE PUT SCRIE TREI ECUAȚII PRIN CARE SE EXPRESSĂ ECHILIBRUL STATIC (DOUĂ ECUAȚII DE PROIEȚII ALE COMPONENTELOR FORȚELOR ȘI O ECUAȚIE DE MOMENT ÎNCOVIERE).

EXEMPLU:



PRIMUL PAS VA FI EVIDENȚIEREA REACȚIUNILOR, PENTRU A LE PUTEA DETERMINA:



$$\sum M_B = 0 \quad V_A \cdot 4a + P \cdot a = 0 \quad V_A = -\frac{P}{4} \quad (\text{SEMUL REZULTĂ ESTE CONTRAR CELUI MARCATE ÎNȚAL})$$

$$\sum M_A = 0 \quad V_B \cdot 4a - P \cdot a = 0 \quad V_B = \frac{P}{4}$$

$$\sum M_C^{ST} = 0 \quad V_A \cdot 3a - H_A \cdot 2a - P \cdot a = 0$$

$$H_A = \frac{3}{2} V_A - \frac{P}{2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{P}{4} - \frac{P}{2} = -\frac{7}{8} P \quad (\text{SEMUL CONTRAR})$$

$$\sum M_C^{DR} = 0 \quad H_B \cdot 2a - V_B \cdot a = 0 \quad H_B = \frac{V_B}{2} = \frac{P}{8}$$

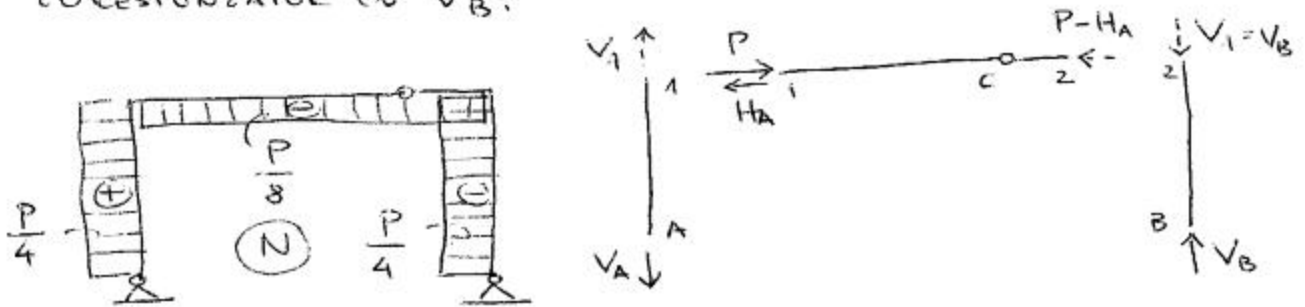
VERIFICAREA VALORILOR OBTINUTE:

$$\sum X = 0 \quad P = -H_A + H_B \quad P = \frac{7}{8} P + \frac{P}{8} \quad \checkmark$$

$$\sum Z = 0 \quad V_A + V_B = 0 \quad -\frac{P}{4} + \frac{P}{4} = 0 \quad \checkmark$$

PENTRU TRASAREA DIAGRAMELOR DE EFORȚ SE POATE ALEGE UN SENS DE PARCURGERE A BARELOR (EX.: A-1, 1-C, C-2 ȘI 2-B).

PENTRU BAZA A-1 EFORTUL AXIAL VA REZULTA DIN V_A , PENTRU ZONA 1-C-2 DIN P ȘI H_A , IAR ÎN FINAL, REDUCÂND FORȚELE ÎN NODUL 2, ÎN BAZA 2-B AR TREBUI SĂ OBTINEM UN EFORT AXIAL CORESPUNZĂTOR CU V_B :



PENTRU DIAGRAMA FORȚELOR TĂIETDARE SE VA PROCEDA ÎN MODUL ÎNSEMĂNĂTOR, LUÂND ÎN CONSIDERARE FORȚELE NORMALE LA AXA BAZELOR:

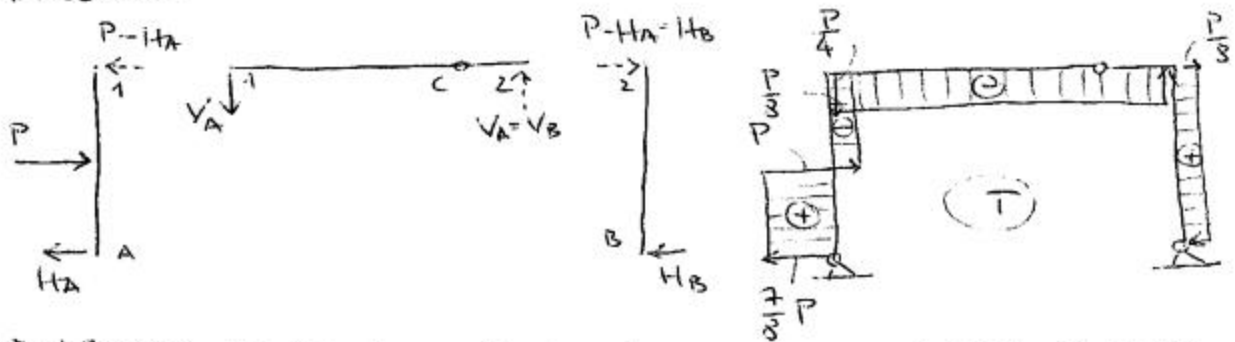
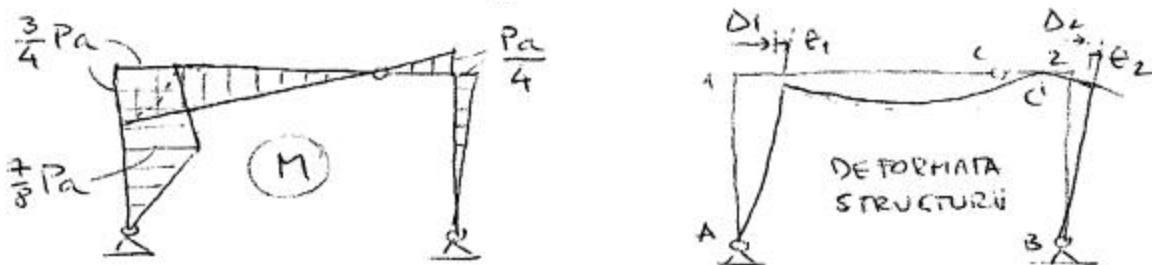
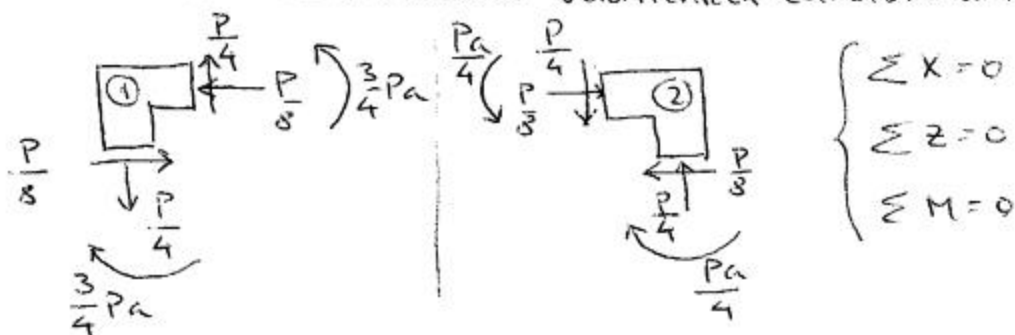


DIAGRAMA MOMENTELOR INDUCIETDARE NE VA SUGERA ȘI ALUZĂ DEFORMĂȚĂ A STRUCTURII (FIIND REPREZENTATĂ PE PARTEA ÎNȚINSĂ)



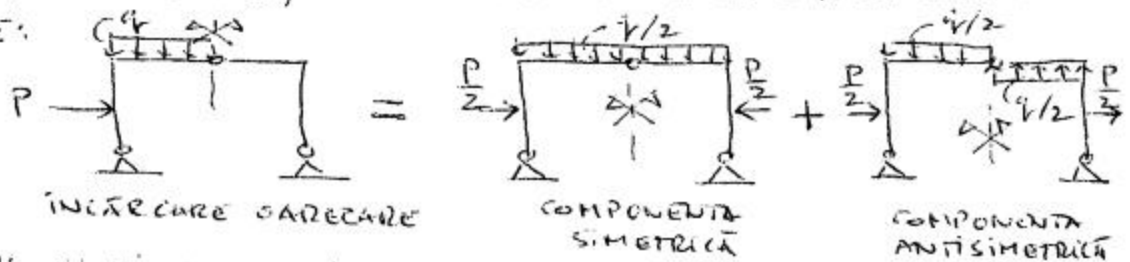
ÎN FINAL ESTE RECOMANDABILĂ VERIFICAREA ECHILIBRULUI PE NODURI:



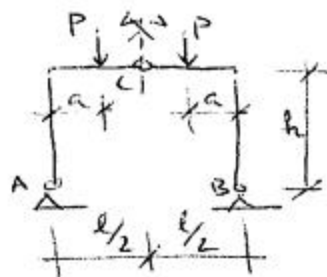
CU PREZENTAREA EFORTURILOR DIN DIAGRAMELE OBTINUTE (EFORTUL AXIAL NEGATIV VA ÎMPINGE NODUL, CEL POSITIV VA TRĂGE DE FATA NODULUI, FORȚA TĂIETDARE POSITIVĂ VA ROTI ÎN SENS ORAR, IAR CEL NEGATIV ÎN SENS ANTIORAR FATA NODULUI).

FOLOSIREA SIMETRIEI

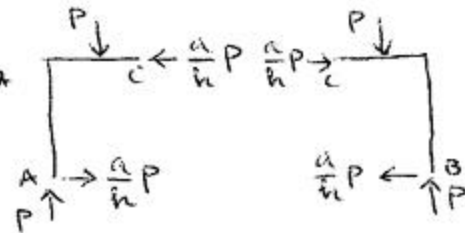
MULTE STRUCTURI SUNT SIMETRICE (DIN DIVERSE MOTIVE) CEA CE PERMITE SIMPLIFICAREA CALCULULUI LOR. SIMETRIA (FAȚĂ DE O AXĂ) A UNEI STRUCTURI ÎNSEAMNĂ ATĂT SIMETRIA GEOMETRIEI ȘI A CARACTERISTICILOR BARELOR (SECȚIUNI ȘI MATERIALE) CĂT ȘI A LEGĂTURILOR. ORICI ÎNCĂRCARE APLICATĂ UNEI STRUCTURI SIMETRICE SE POATE DESCOMPUNE ÎNTR-O COMPONENTĂ SIMETRICĂ ȘI ÎNTR-UNA ANTISIMETRICĂ, IAR EFECTELE ACESTOR COMPONENTE SE POT SUPRA-PUNE LINIAR PENTRU A OBTINE EFORTURILE DIN BARELE STRUCTURII, DE EXEMPLU, UN CADRU SIMETRIC CU O ÎNCĂRCARE OARECARE:



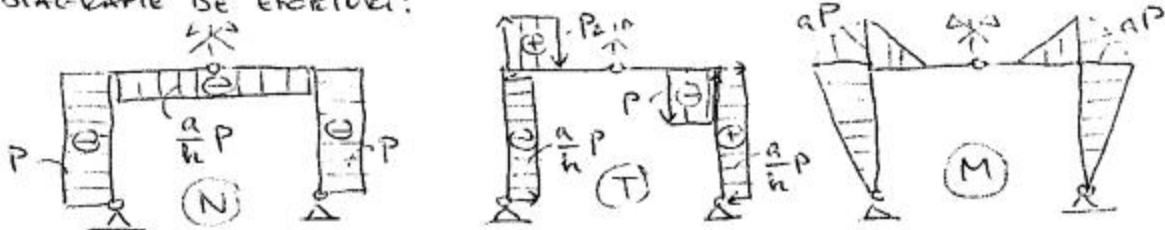
CAZUL UNEI STRUCTURI SIMETRICE, CU ÎNCĂRCĂRI SIMETRICE:



REAȚIUNI:
(VOR REZULTA SIMETRICE)

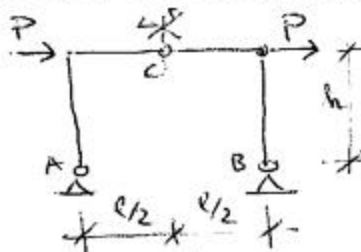


DIAGrame DE EFORTURI:

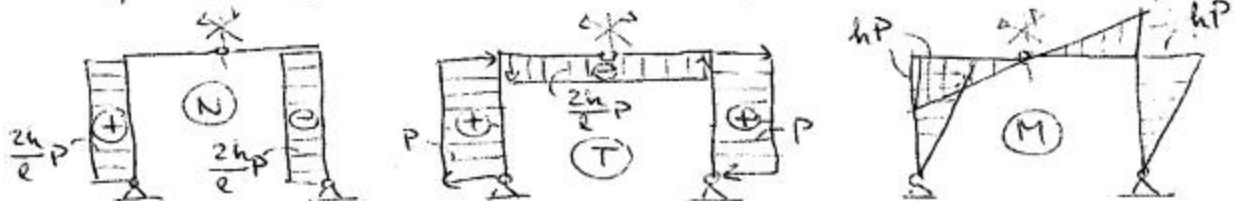
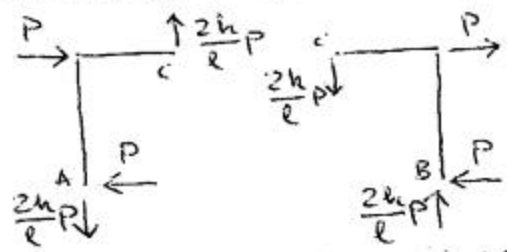


DUPĂ CUM SE POATE OBSERVA, REAȚIUNILE VOR REZULTA SIMETRICE ȘI ÎN CONSECINȚĂ DIAGrameLE (N) ȘI (M) VOR FI SIMETRICE, IAR (T) ANTISIMETRICE.

CAZUL UNEI STRUCTURI SIMETRICE, CU ÎNCĂRCĂRI ANTISIMETRICE:



REAȚIUNI:
(VOR REZULTA ANTISIMETRICE)



DUPĂ CUM SE POATE OBSERVA, REACȚIUNILE VOR REZULTA ANTI-SIMETRICE ȘI ÎN CONSECINȚĂ DIAGRAMELE (N) ȘI (M) VOR FI TOT ANTI-SIMETRICE, ÎAR (T) SIMETRICĂ.

ÎN CONCLUZIE, FOLOSIND SIMETRIA STRUCTURII, PENTRU ORICE ÎNCĂRCARE DESCOMPUSĂ ÎN CELE DOUĂ COMPONENTE (SIMETRICĂ ȘI ANTI-SIMETRICĂ), EFORTURILE SE POT DETERMINA PE O JUMĂTATE DIN STRUCTURĂ, ÎAR APCI TRANSPUSE ȘI PE CEALALTĂ JUMĂTATE.