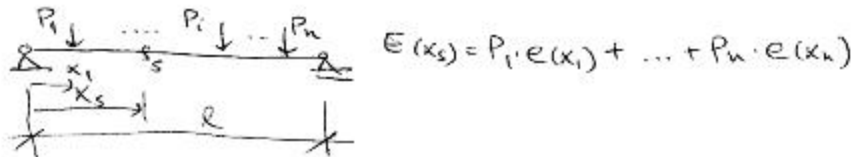


LINII DE INFLUENȚĂ

Liniile de influență sunt diagrame ale căror ordonate reprezintă variația unui efort într-o secțiune aleasă, atunci când o forță unitate parcurge linia de încărcare a structurii. Aceste diagrame se folosesc de regulă în cazul încărcărilor mobile, pentru aflarea situației celei mai defavorabile din punctul de vedere al unui efort într-o secțiune. În mod evident, ele pot fi folosite și pentru calculul eforturilor dintr-o secțiune aleasă. Ordonatele dintr-o diagramă de influență se numesc "coeficienți de influență". Deoarece în cazul structurilor static determinate aceste diagrame au variații liniare, se numesc "linii de influență".

În cazul unei bare simplu rezemate (ilustrată în figura de mai jos), aplicând suprapunerea liniară a efectelor, efortul "E(x<sub>s</sub>)" în secțiunea "s" va fi proporțional cu încărcările "P<sub>i</sub>":



Dacă P<sub>1</sub> = 1 și restul forțelor este nul, atunci E(x<sub>s</sub>) = 1 · e(x<sub>1</sub>), adică, efortul în secțiunea "s" când pe bară acționează forța P<sub>1</sub> = 1 aflată la poziția "x<sub>1</sub>". Descompunând efortul din secțiunea "s" în cele trei componente cunoscute, se pot scrie relațiile:

$$N(x_s) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot n(x_i)$$

$$T(x_s) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot t(x_i)$$

$$M(x_s) = \sum_{i=1}^n P_i \cdot m(x_i)$$

unde n(x<sub>i</sub>), t(x<sub>i</sub>) și m(x<sub>i</sub>) sunt eforturile corespunzătoare unei încărcări P<sub>i</sub> = 1 aflată la poziția "x<sub>i</sub>" pe bară, în secțiunea "s".

Determinarea liniei de influență pentru un anumit efort într-o secțiune se poate face analitic, sau prin deplasări virtuale. Ordonatele (coeficienții de influență) de sub linia de referință se marchează cu semnul "+", iar cele deasupra liniei de referință cu semnul "-".

Exemple analitice:

Se calculează valorile efortului dorit în secțiunea aleasă, considerând pozițiile posibile ale încărcării P = 1 pe structură (în exemplele de mai sus prin condițiile la limite).

Determinarea liniei "m(x)" pentru secțiunea aflată la distanța "x" față de capătul "A" al unei bare simplu rezemate:

- dacă forța P = 1 se află între capătul "A" și secțiune:

$$V_B = \frac{d}{l} \cdot 1$$

$$M_x = V_B \cdot (l-x) = \frac{d}{l} \cdot 1 \cdot (l-x)$$

$$m_x = d - \frac{d}{l} \cdot x$$

Expresia de mai sus reprezintă ecuația unei drepte. Punând condițiile la limite:

$$d=0 \rightarrow m_x = 0$$

$$d=x \rightarrow m_x = \frac{x(l-x)}{l}$$

- dacă forța P = 1 se află între secțiune și capătul "B":

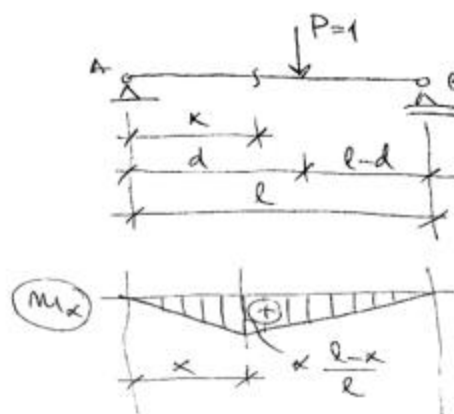
$$V_A = \frac{l-d}{l} \cdot 1$$

$$M_x = V_A \cdot x = \frac{l-d}{l} \cdot x$$

Punând condițiile la limite:

$$d=x \rightarrow m_x = \frac{l-x}{l} \cdot x$$

$$d=l \rightarrow m_x = 0$$



Determinarea liniei "t(x)" pentru secțiunea aflată la distanța "x" față de capătul "A" al unei bare simplu rezemate:

- dacă forța P = 1 se află între capătul "A" și secțiune:

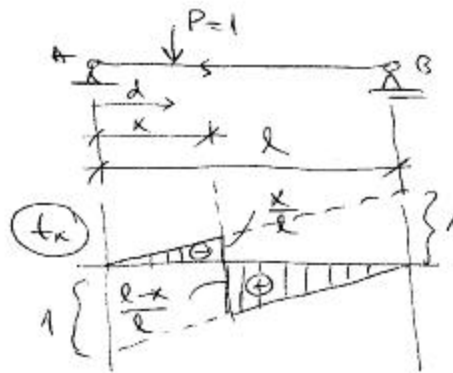
$$T_x = -V_B \quad (= V_A - P)$$

$$t_x = -\frac{d}{l}$$

Expresia de mai sus reprezintă ecuația unei drepte. Punând condițiile la limite:

$$d=0 \rightarrow t_x = 0$$

$$d=x \rightarrow t_x = -\frac{x}{l}$$



- dacă forța P = 1 se află între secțiune și capătul "B":

$$T_x = V_A$$

$$t_x = \frac{l-d}{l}$$

Punând condițiile la limite:

$$d=x \rightarrow t_x = \frac{l-x}{l} = 1 - \frac{x}{l}$$

$$d=l \rightarrow t_x = 0$$

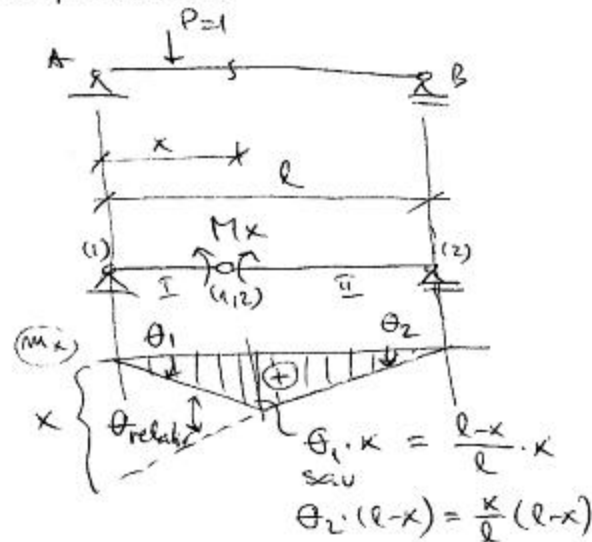
Exemple utilizând deplasări virtuale:

Schema sistemului static determinat trebuie transformată într-o schemă cinematică (reprezentând un mecanism obținut prin suprimarea unei legături și înlocuind acea legătură suprimată cu efortul corespunzător). Astfel, se poate da o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile sistemului. Exprimarea echilibrului se va face scriind lucrul mecanic virtual generat de către forța P = 1 și efortul evidențiat, prin parcurgerea deplasării virtuale:

$$L = -E(x) \cdot \Delta(x) + P_i \cdot v_i = 0$$

În relația de mai sus, "v<sub>i</sub>" reprezintă ordonata (coeficientul de influență) din linia de influență, "E(x)" fiind efortul relevat, iar "Δ(x)" deplasarea virtuală pe direcția (și în sens contrar) efortului evidențiat.

Determinarea liniei "m(x)" pentru secțiunea aflată la distanța "x" față de capătul "A" al unei bare simplu rezemate:



Pentru linia "m(x)" se consideră o rotire relativă (între fețele secțiunii)  $\Theta_{relativ} = 1$  rezultând astfel:

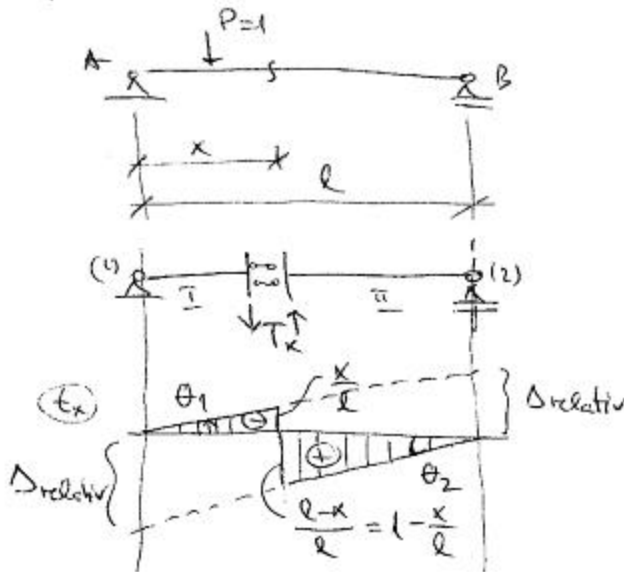
$$\Theta_2 = \frac{x}{l}$$

$$\Theta_1 = \frac{l-x}{l}$$

$$\Theta_1 \cdot x = \frac{l-x}{l} \cdot x$$

$$\Theta_2 \cdot (l-x) = \frac{x}{l} \cdot (l-x)$$

Determinarea liniei "t(x)" pentru secțiunea aflată la distanța "x" față de capătul "A" al unei bare simplu rezemate:



Pentru linia "t(x)" se consideră o deplasare relativă (între fețele secțiunii)  $\Delta_{relativ} = 1$  rezultând astfel:

$$\theta_2 = \frac{1}{l}$$

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{l}$$

Cu aceste rotiri virtuale se pot obține ordonatele din preajma secțiunii:

$$\theta_2 \cdot (l-x) = \frac{l-x}{l}$$

$$\theta_1 \cdot x = \frac{x}{l}$$

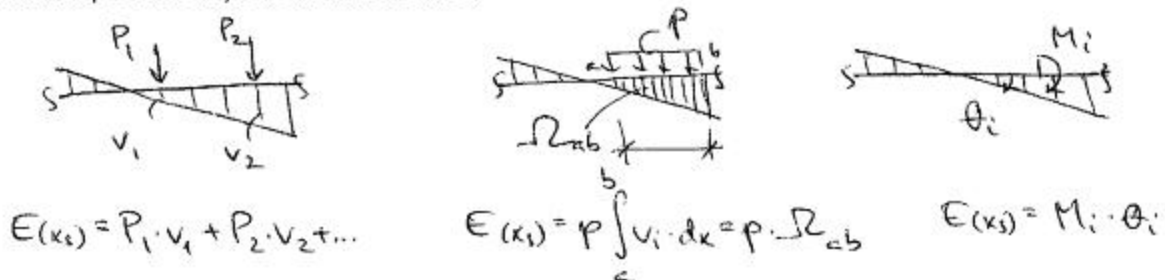
În concluzie, relația  $E(x_s) = 1 \cdot v_i$  (în care 1 este valoarea încărcării mobile P) reprezintă ecuația generală a liniilor de influență. Altfel spus, linia de influență a efortului "E" în secțiunea "s" (aflată la distanța "x<sub>s</sub>" de capătul "A") este dată de diagrama deplasărilor liniei de încărcare (a sistemului transformat în mecanism) după direcția forței "P = 1", când pe direcția efortului "E(x<sub>s</sub>)" s-a dat deplasarea virtuală " $\Delta(x_s) = 1$ " astfel, încât lucrul mecanic virtual " $E(x_s) \cdot \Delta(x_s)$ " al efortului să fie negativ.

**Important de reținut:**

*Ordonatele din linia de influență reprezintă valorile efortului ales în secțiunea considerată, pentru pozițiile corespunzătoare ale încărcării unitate!*

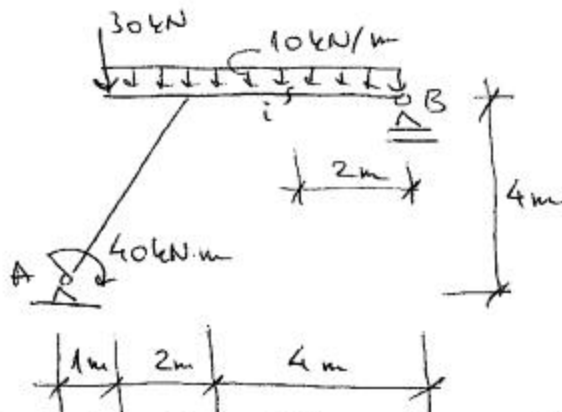
### UTILIZAREA LINIILOR DE INFLUENȚĂ

După cum s-a amintit deja, în cazul structurilor static determinate, liniile de influență (ale reacțiunilor și ale eforturilor) au variații liniare. Dacă pentru un efort s-a construit linia de influență, ea poate fi utilizată la calculul mărimii efortului respectiv din diferite încărcări. Efortul se va obține multiplicând intensitatea încărcării cu ordonata (în cazul forțelor concentrate), sau aria (în cazul forțelor distribuite), sau rotirea (în cazul momentelor încovoietoare) corespunzătoare intervalului pe care acționează încărcarea:



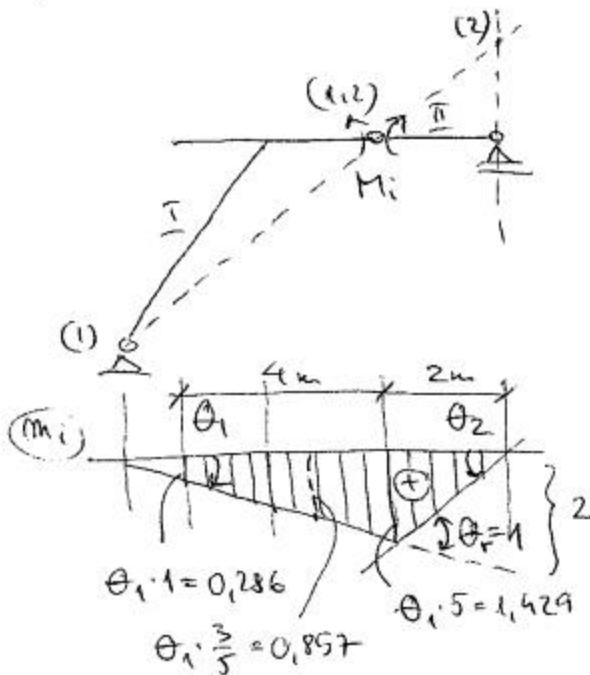
Pentru diferite eforturi dintr-o secțiune aleasă, liniile de influență au aspecte complet diferite (cele mai defavorabile poziții ale încărcării nu sunt aceleași). Studiul unui anumit efort în mai multe secțiuni presupune construirea mai multor linii de influență, pentru fiecare secțiune în parte.

Exemplu numeric: Pentru schema statică a cadrului din figură se cer "M" și "T" în secțiunea "i":



$M_i, T_i = ?$

Pentru determinarea "M<sub>i</sub>" se va insera o articulație în secțiune, înlocuind efectul legăturii suprimate cu "M<sub>i</sub>", după care se construiește diagrama deplasării (pe direcția încărcărilor) corespunzătoare unei rotiri relative virtuale  $\theta = 1$ :

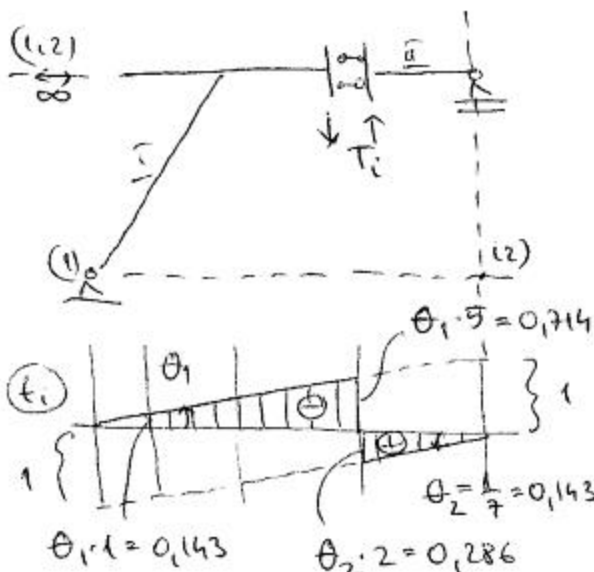


$\theta_1 = \frac{2}{7} = 0,286$

$\theta_2 = \frac{\theta_1 \cdot 5}{2} = \frac{1,429}{2} = 0,714$

$M_i = 40 \cdot 0,286 + 30 \cdot 0,286 + 10 (4 \cdot 0,857 + 2 \cdot \frac{1,429}{2}) = 68,59 \text{ kNm}$

Pentru "T<sub>i</sub>" se va proceda similar, considerând o deplasare relativă  $\Delta = 1$ :



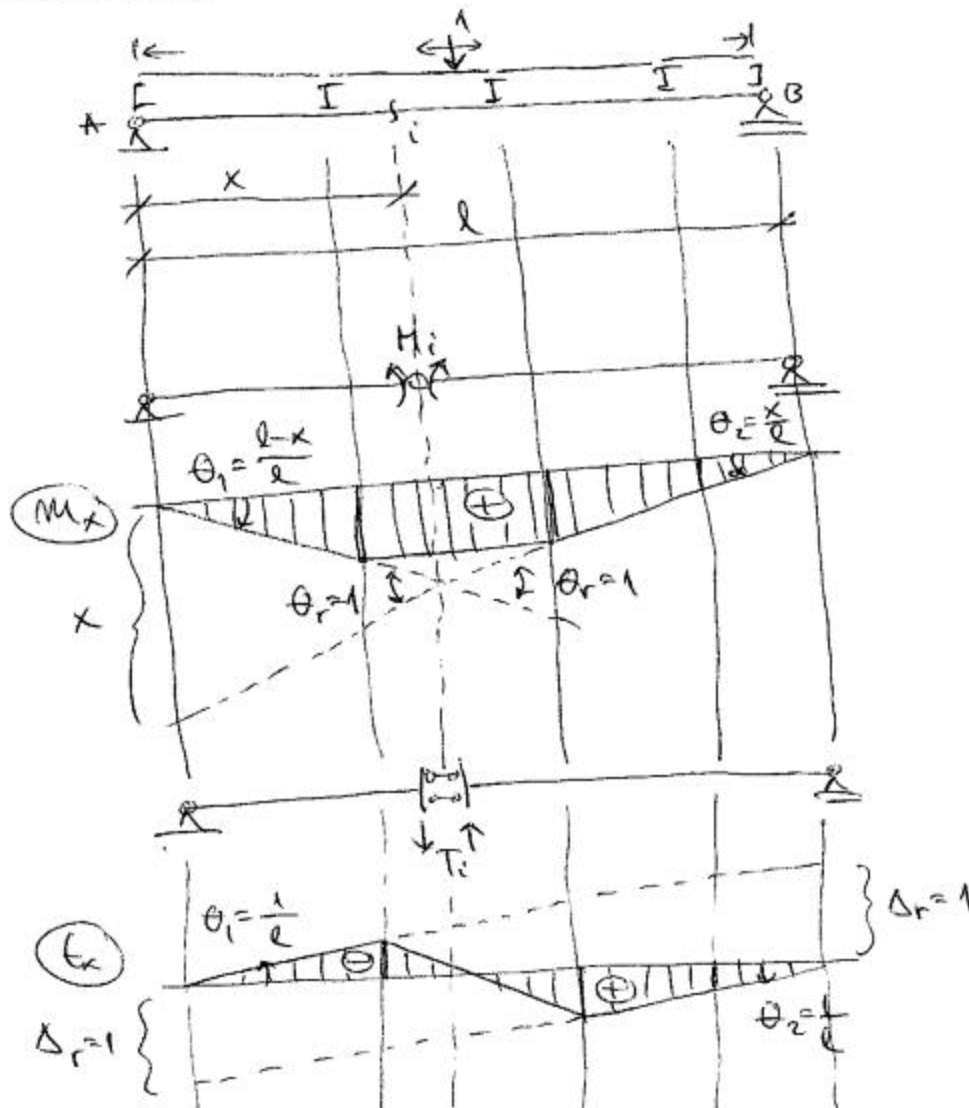
$\theta_1 = \theta_2 \rightarrow (1,2) \infty$

$\theta_1 = \frac{1}{7} = 0,143 ; \theta_2 = 0,143$

$T_i = -40 \cdot 0,143 - 30 \cdot 0,143 - 10 (4 \cdot 0,143 \cdot \frac{3}{5} - 2 \cdot \frac{0,286}{2}) = -24,30 \text{ kN}$

ÎNCĂRCĂRI APLICATE INDIRECT

În cazul unor asemenea situații, va trebui urmărită deplasarea liniei de încărcare (ținând cont de faptul că încărcările se vor transmite structurii prin punctele de contact).  
Exemplu ilustrativ:

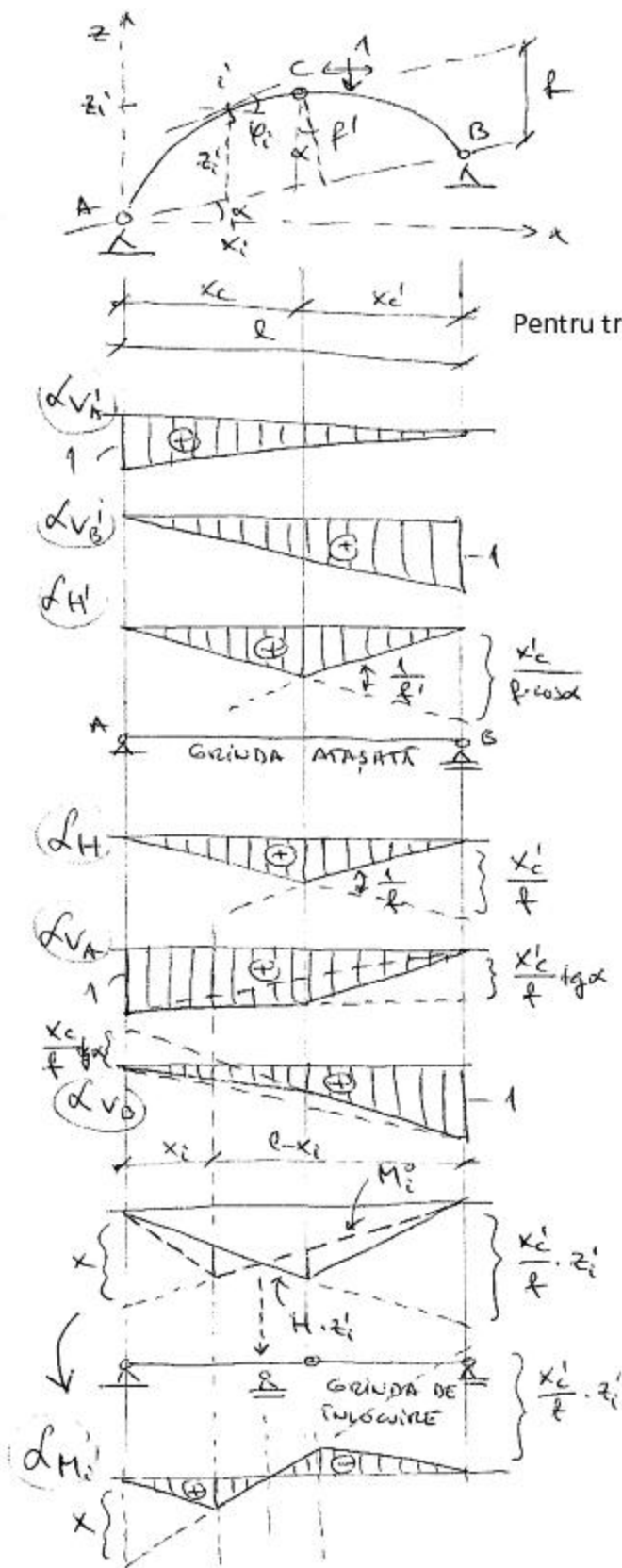


LINII DE INFLUENȚĂ LA ARCE

După cum s-a menționat mai devreme, liniile de influență pot fi construite analitic (calculând valorile reacțiunii sau efortului urmărit în secțiunea aleasă, considerând diferite poziții ale încărcării unitate), sau prin deplasări virtuale (transformând schema structurii static determinate într-un mecanism).

Varianta analitică (utilizând grinda atașată):

Linile pentru  $V_A'$  și  $V_B'$  rezultă ca la grinda simplu rezemată (grinda atașată), iar pentru linia  $H'$  linia de influență a momentului încovoietor în punctul "C" a grinzii simplu rezemate (grinda atașată) se va împărți cu  $f'$  ( $f' = f \cdot \cos \alpha$ , deci  $H' = H / \cos \alpha$ ):



$$f' = f \cdot \cos \alpha \rightarrow H' = \frac{H}{\cos \alpha}$$

Pentru trasarea liniilor  $V_A$ ,  $V_B$  și  $H$  se utilizează relațiile:

$$H = H' \cdot \cos \alpha$$

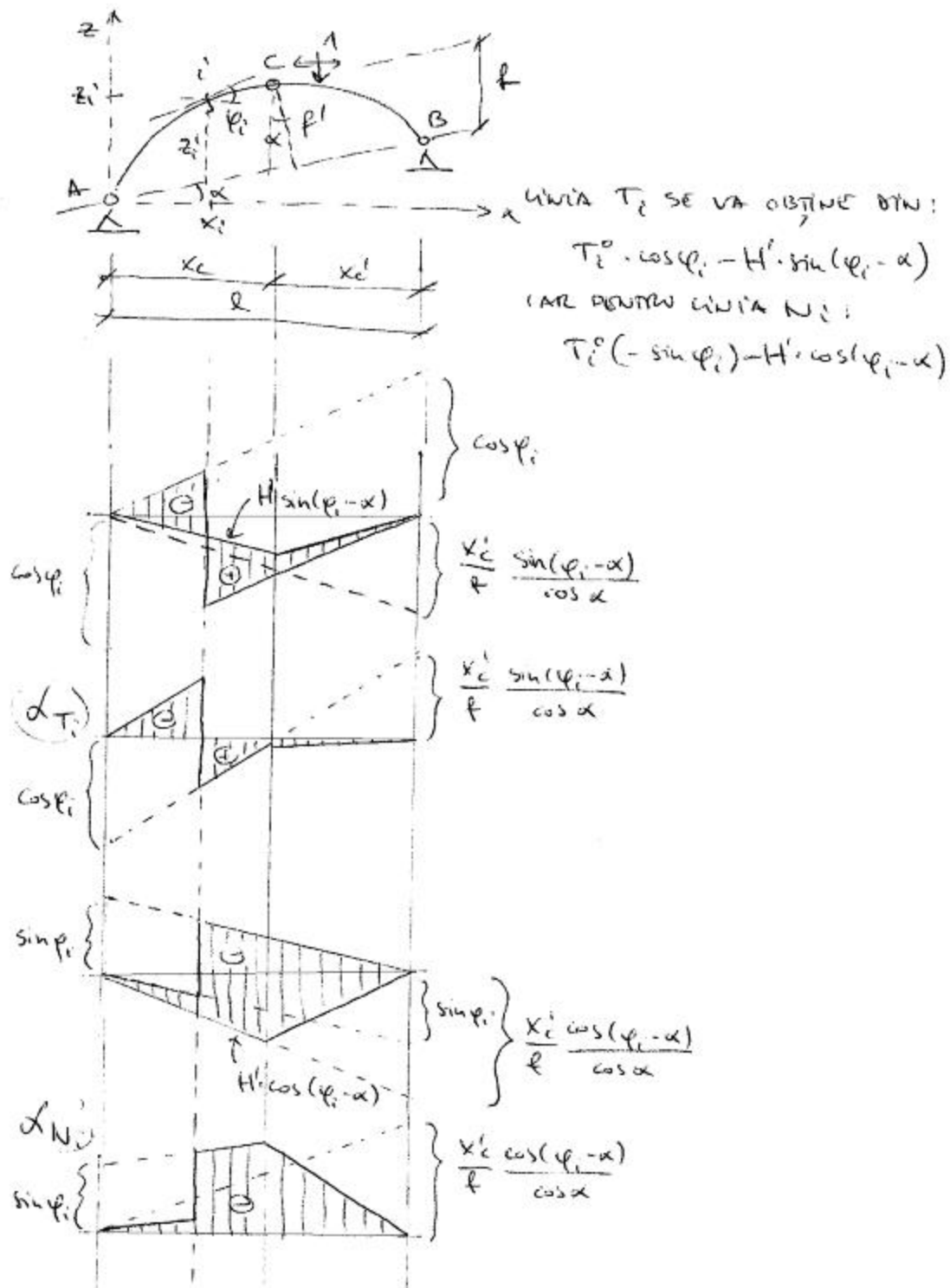
$$V_A = V_A' + \frac{M_C^0}{f} \cdot \tan \alpha$$

$$V_B = V_B' - \frac{M_C^0}{f} \cdot \tan \alpha$$

Linia pentru  $H$  rezultă ușor din linia  $H'$

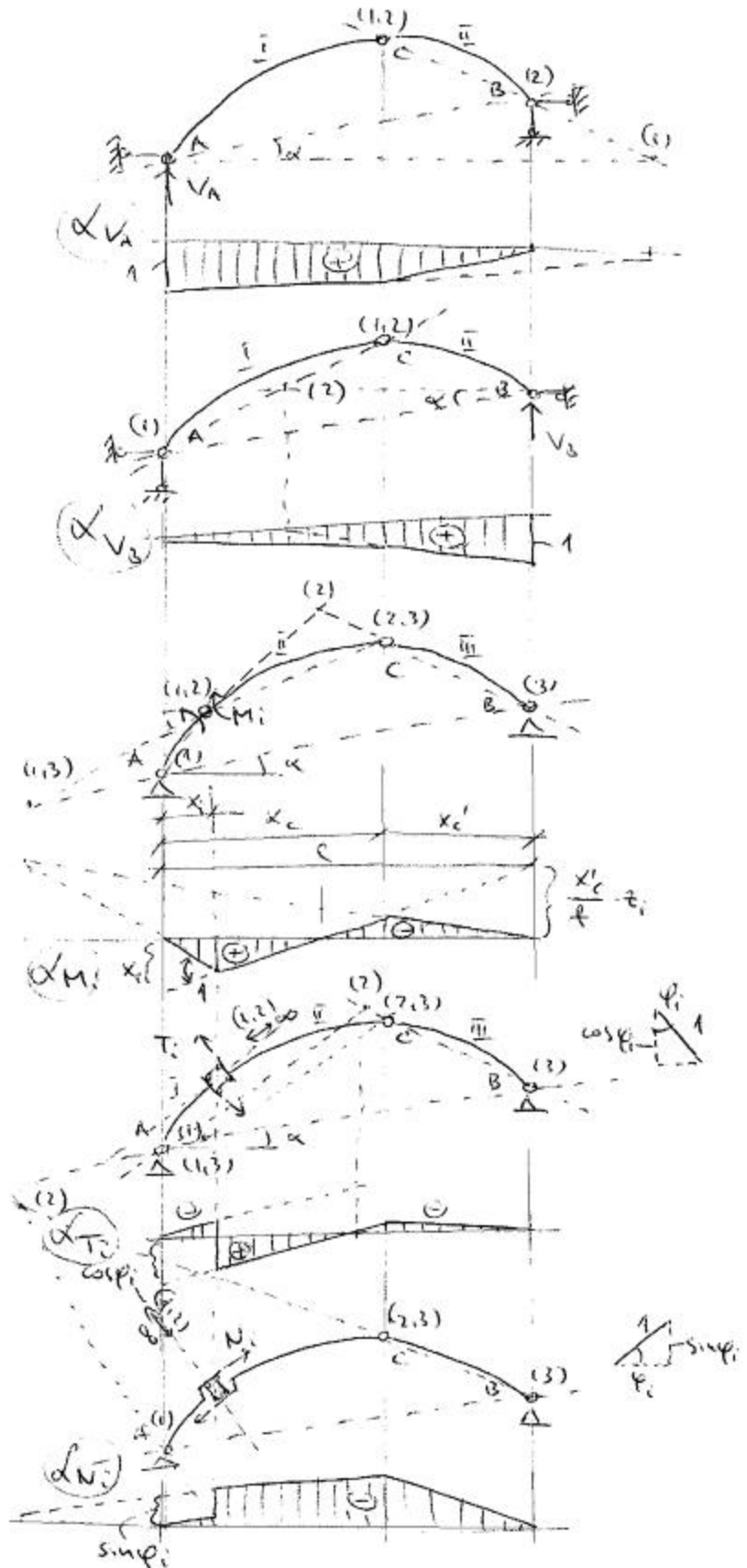
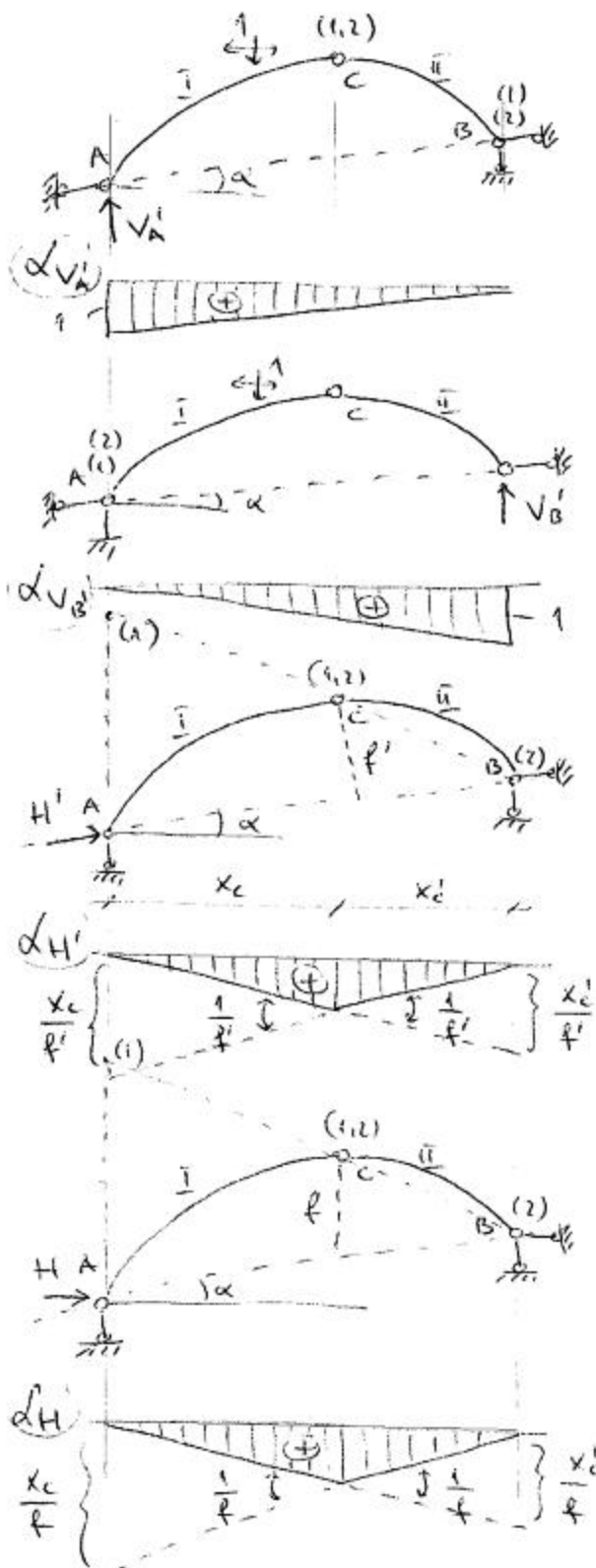
Linile  $V_A$  și  $V_B$  se vor obține prin suprapunerea  $V_A'$  și  $V_B'$  cu linia  $M_C^0$  multiplicată cu  $\pm \tan \alpha / f$

Pentru  $\alpha M_C$  se suprapune peste linia  $M_C^0$  linia  $H$  înmulțită cu  $\frac{z_i}{f}$



Varianta prin deplasări virtuale:

În locul reazemelor se vor considera penduli pe direcțiile legăturilor, pentru evidențierea reacțiilor. Va rezulta un mecanism alcătuit din două corpuri și vor trebui determinate centrele instantanee de rotație pentru a trasa diagramele de deplasări. În cazul eforturilor din secțiunea "I", se vor utiliza mecanisme corespunzătoare legăturii suprimate (înlocuind efectul legăturii cu efortul evidențiat):



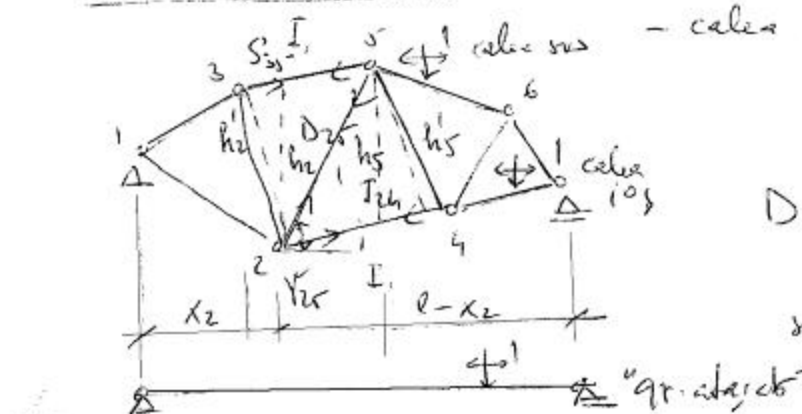


LINII DE INFLUENȚĂ LA GRINZI CU ZĂBRELE PLANE

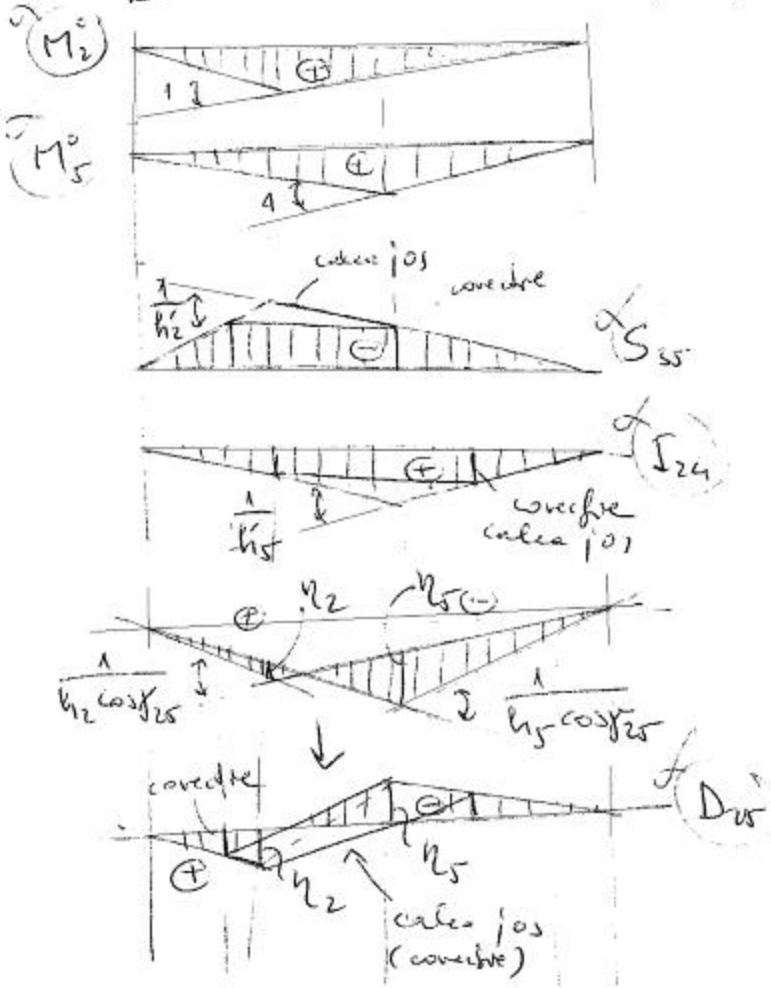
Exemplu:

Încărcarea mobilă "P=1" poate fi aplicată prin nodurile tălpii superioare ("calea sus"), sau prin nodurile tălpii inferioare ("calea jos"), rezultând diagrame diferite (variațiile liniilor de influență vor fi între noduri).

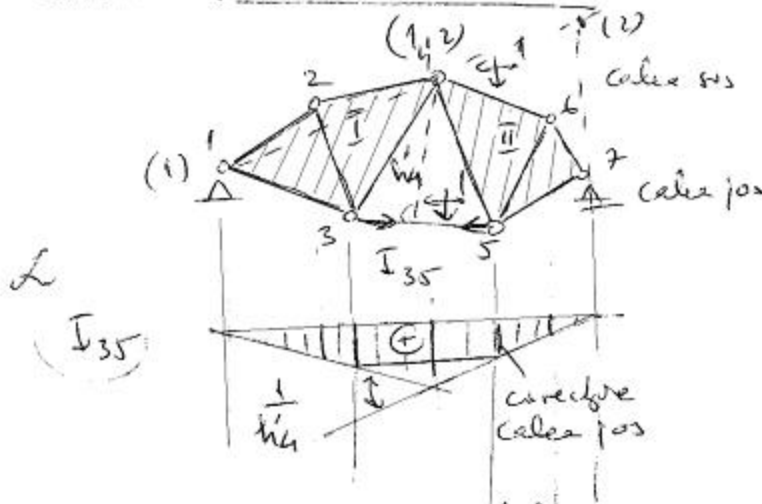
Vărmanta analitică



- calea sus:  $S_{35} = - \frac{M_2^0}{h_2^0}$   
 $I_{24} = \frac{M_5^0}{h_5^0}$   
 $D_{25} = \frac{1}{\cos \gamma_{25}} \left( \frac{M_2^0}{h_2} - \frac{M_5^0}{h_5} \right)$   
 se pot folosi liniile  $M_2^0$  și  $M_5^0$

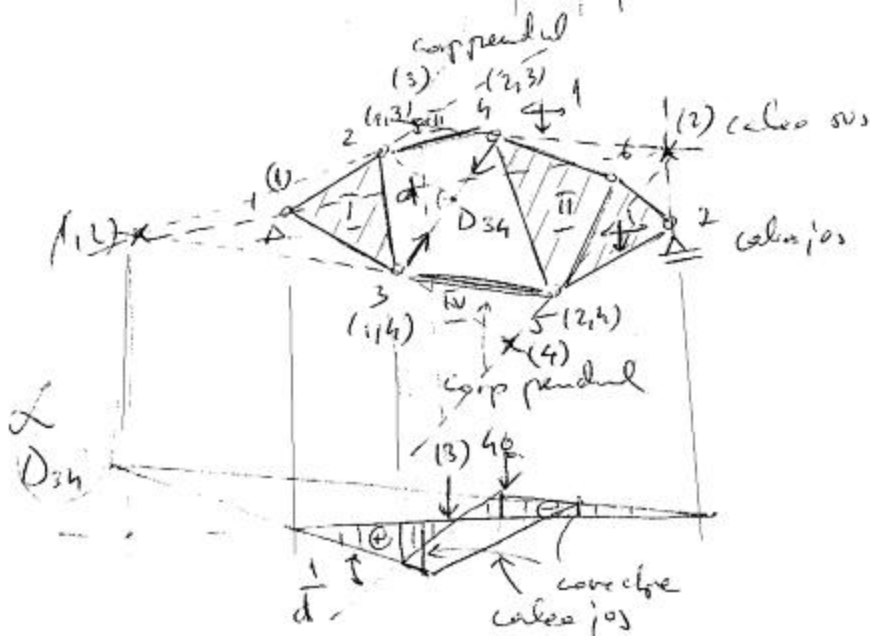


Variante prin deplasări virtuale



principiu:

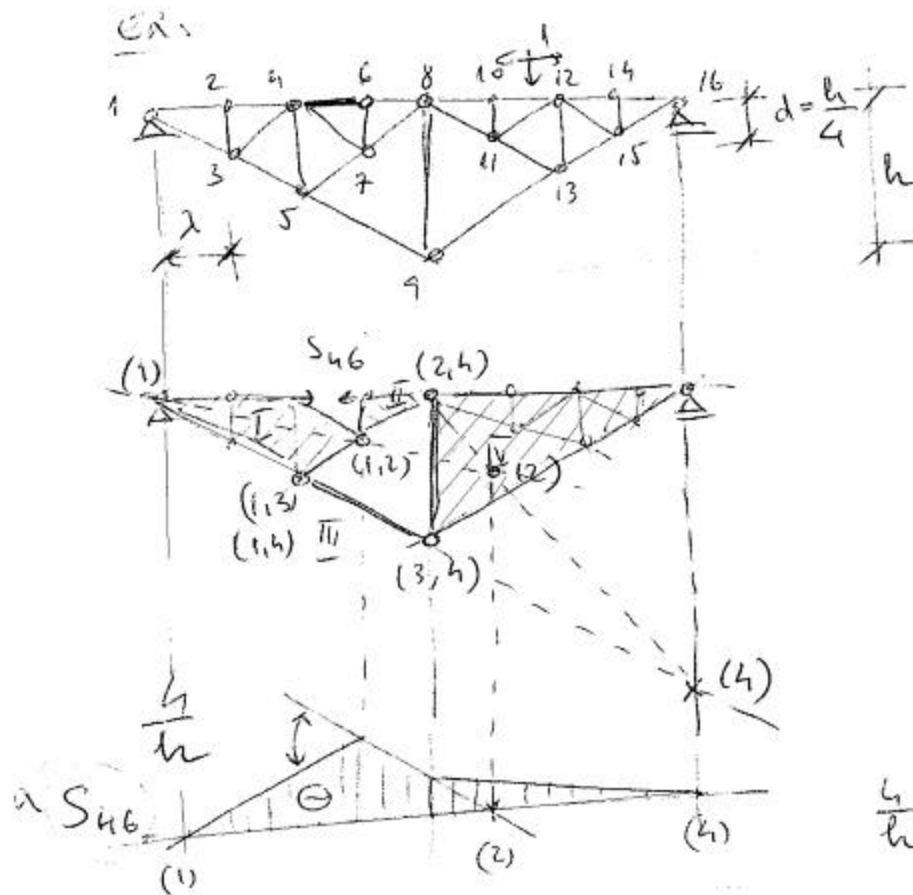
Suprimare barei cu  
efort cîntat  
↓  
mecanism



În cazul structurilor articulate compuse, structura poate fi considerată în întregime, sau descompusă în părți.

varianta < analitică  
prin deplasări virtuale

structura < întreg  
descompusă



pt.  $S_{46}$   
- se suprimă bare  
↓  
mecanism de 4  
corpuri  
↓  
determinarea c.i.l.  
↓  
se dă o deplasare  
cristal, în cel nodul  
4-6 și se îndepărtează  
cu 1

