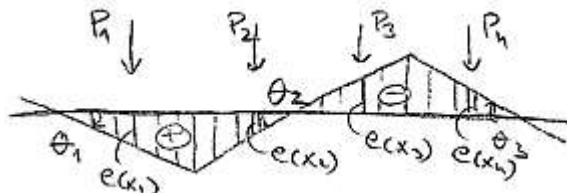


DETERMINAREA EFORTURILOR MAXIME

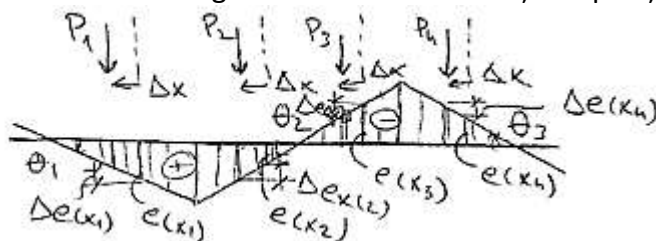
Determinarea poziției celei mai defavorabile în cazul unei încărcări cu un convoi mobil de forțe (forțe concentrate așezate la distanțe invariabile una de alta) se poate realiza prin multe încercări, sau, dacă se folosesc linii de influență, printr-un număr redus de încercări. La structurile static determinate liniile de influență au variații liniare (sunt diagrame cu contururi poligonale). Pentru un efort $E(x)$ oarecare dintr-o secțiune aleasă, în cazul unui segment dintr-o grindă:



Se va putea exprima valoarea efortului cu ajutorul intensității forțelor din convoi și coeficienții corespunzători de influență (considerând suprapunerea liniară a efectelor):

$$E(x) = P_1 \cdot e(x_1) + P_2 \cdot e(x_2) - P_3 \cdot e(x_3) - P_4 \cdot e(x_4) = \sum P_i \cdot e(x_i)$$

Dacă convoiul de forțe se mută către stânga cu incrementul Δx față de poziția anterioară:



atunci valoarea efortului din secțiunea aleasă se va modifica cu $\Delta E(x)$:

$$E(x) + \Delta E(x) = P_1(e(x_1) - \Delta e(x_1)) + P_2(e(x_2) + \Delta e(x_1)) - P_3(e(x_3) - \Delta e(x_3)) - P_4(e(x_4) + \Delta e(x_4))$$

Diferențele $\Delta e(x_i)$ ale coeficienților de influență putând fi exprimate cu ajutorul rotirilor θ din diagrama de influență, sub forma $\Delta e(x_i) = \theta_i \cdot \Delta x$, iar expresia de mai sus se poate dezvolta sub forma:

$$\begin{aligned} E(x) + \Delta E(x) &= P_1(e(x_1) - \theta_1 \cdot \Delta x) + P_2(e(x_2) - \theta_2 \cdot \Delta x) - P_3(e(x_3) + \theta_3 \cdot \Delta x) - \\ &\quad - P_4(e(x_4) + \theta_4 \cdot \Delta x) = \\ &= P_1 \cdot e(x_1) + P_2 \cdot e(x_2) - P_3 \cdot e(x_3) - P_4 \cdot e(x_4) - \\ &\quad - \Delta x (P_1 \cdot \theta_1 + P_2 \cdot \theta_2 + P_3 \cdot \theta_3 + P_4 \cdot \theta_4) = \\ &= E(x) - \underbrace{\Delta x \sum P_i \cdot \theta_i}_{\Delta E(x)} \end{aligned}$$

observând, că diferența $\Delta E(x)$ va fi reprezentată de termenul negativ $-\Delta x \cdot \sum P_i \cdot \theta_i$. În consecință, pentru a obține în secțiunea aleasă un efort mai mare decât în cazul anterior (înainte de deplasarea cu Δx către stânga a convoiului de forțe), $\Delta E(x)$ ar trebui să fie pozitiv, deci $\sum P_i \cdot \theta_i$ ar trebui să fie negativ.

Concluzie:

Dacă pentru o anumită poziție a convoiului de forțe rezultă inegalitatea $\sum P_i \cdot \theta_i < 0$, atunci pentru a poziție mai defavorabilă – o valoare mai mare a efortului $E(x)$ – convoiul ar trebui deplasat spre

stânga până când se schimbă sensul inegalității. După momentul schimbării sensului inegalității, valoarea efortului $E(x)$ din secțiunea aleasă nu va mai crește, ci va începe să scadă.

Printr-un raționament similar, în cazul deplasării convoiului de forțe către dreapta, cu un increment Δx față de poziția inițială, va rezulta o variație " $\Delta E(x) = +\Delta x \cdot \sum P_i \cdot \theta_i$ " în valoarea efortului $E(x)$, concluzionând că pentru o valoare mai mare a efortului, termenul " $\sum P_i \cdot \theta_i$ " ar trebui să fie pozitiv.

Concluzie:

Dacă pentru o anumită poziție a convoiului de forțe rezultă inegalitatea " $\sum P_i \cdot \theta_i > 0$ ", atunci pentru a poziție mai defavorabilă – o valoare mai mare a efortului $E(x)$ – convoiul ar trebui deplasat spre dreapta până când se schimbă sensul inegalității. După momentul schimbării sensului inegalității, valoarea efortului $E(x)$ din secțiunea aleasă nu va mai crește, ci va începe să scadă.

În urma precedentelor concluzii rezultă, că pentru obținerea valorii maxime a efortului $E(x)$ în secțiunea aleasă, direcția deplasării convoiului de forțe este arătat de sensul inegalității:

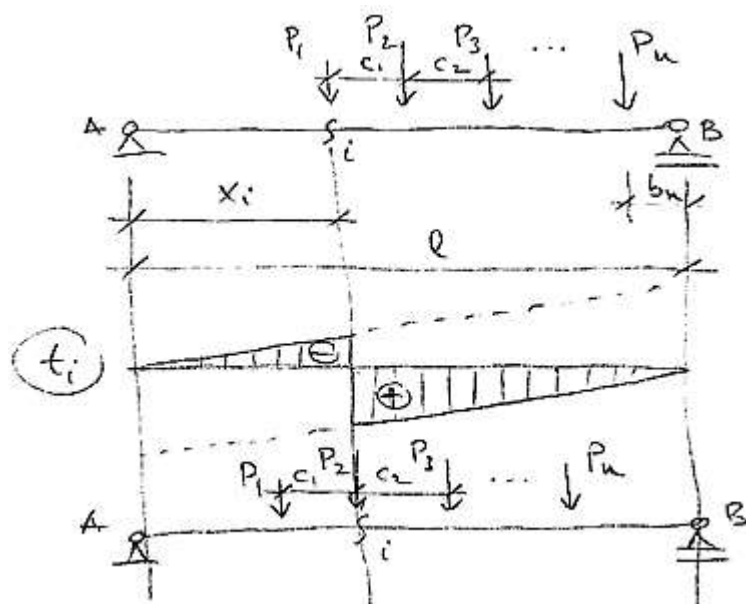
$$\sum P_i \cdot \theta_i < 0 \quad \leftarrow \Delta x$$

$$\sum P_i \cdot \theta_i > 0 \quad \rightarrow \Delta x$$

Deoarece linia de influență are variații liniare, rotirile θ_i pe aceste segmente vor fi valori constante. Pentru modificarea sensului inegalităților de mai sus, componentele forțelor vor fi determinante, deci sensul inegalităților se va modifica doar când o forță trece de pe un segment cu variație liniară pe alta (modificându-se rezultanta parțială a convoiului de forțe pe segmente). Se poate întâmpla, ca unele forțe din convoi să iasă de pe linia de încărcare (sau să intre), caz în care se vor obține eforturi maxime relative.

FORTA TĂIETOARE MAXIMĂ DINTR-O SECȚIUNE

În figura următoare se poate observa, că pe măsură ce convoiul se apropie spre secțiunea i , ordonatele (coeficienții de influență) t_i sunt mai mari. Forța tăietoare maximă din secțiunea i se va obține probabil în momentul în care forța P_1 din convoi calcă pe secțiune. Trebuie însă verificat, dacă deplasarea convoiului spre stânga nu va rezulta într-o forță tăietoare mai mare (P_1 trecând pe zona negativă a liniei de influență):



În cazul în care forța P_1 din convoi calcă pe secțiunea i , forța tăietoare se va obține din reacțiunea V_A :

$$V_A = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot b_k}{L}$$

Dacă convoiul se deplasează spre stânga, forța P_2 ajungând deasupra secțiunii i , reacțiunea V_A se va modifica cu valoarea:

$$V_A + \Delta V_A = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \cdot (b_k + c_i)}{L}$$

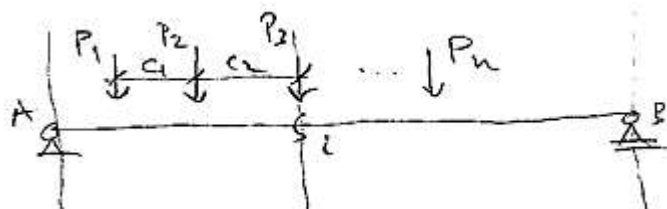
$$\Delta V_A = \frac{c_i}{L} \sum_{k=1}^n P_k$$

Variația forței tăietoare în secțiunea i , între cele două poziții, va fi:

$$\Delta T_i = \Delta V_A - P_1 = \frac{c_1}{l} \sum_{k=1}^n P_k - P_1$$

Cea de a doua poziție este mai defavorabilă dacă:

$$\Delta T_i > 0 \rightarrow \frac{c_1}{l} \sum_{k=1}^n P_k - P_1 > 0 \text{ sau, altfel exprimat: } \frac{P_1}{c_1} < \frac{\sum_{k=1}^n P_k}{l}$$



Deplasând convoiul de forțe în continuare spre stânga, până când P_3 ajunge peste secțiunea i , rezultă:

$$\Delta T'_i = \Delta V'_A - P_2 = \frac{c_2}{l} \sum_{k=1}^n P_k - P_2$$

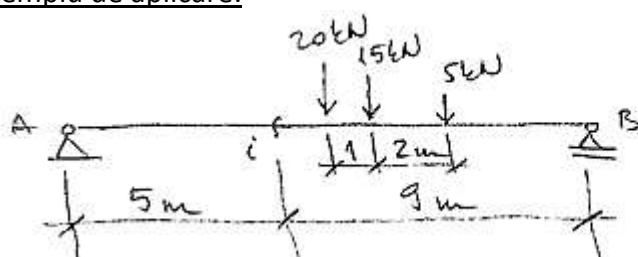
Această poziție va fi mai dezavantajoasă decât cele precedente, dacă: $\Delta T'_i > 0$ adică

$$\frac{P_2}{c_2} < \frac{\sum_{k=1}^n P_k}{l}$$

Concluzie:

Plasând succesiv forțele $P_1, P_2 \dots$ din convoi în secțiunea i și scriind inegalitățile de mai sus, situația cea mai defavorabilă se va obține când în secțiune acționează forța care schimbă sensul inegalității.

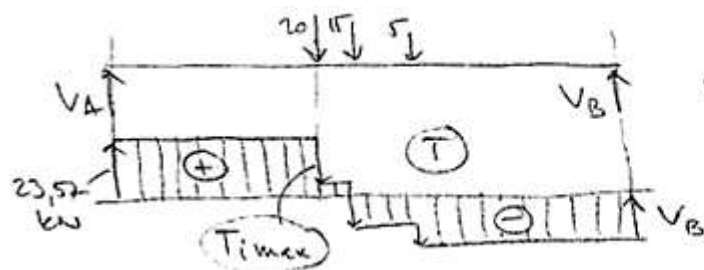
Exemplu de aplicare:



$$\begin{aligned} P_1 &= 20 \text{ kN} & c_1 &= 1 \text{ m} \\ P_2 &= 15 \text{ kN} & c_2 &= 2 \text{ m} \\ P_3 &= 5 \text{ kN} \end{aligned}$$

Dacă forța $P_1 = 20 \text{ kN}$ calcă pe secțiunea i , sensul inegalității va arăta "spre dreapta" (însemnând, că nu trebuie deplasat convoiul spre stânga), deci $T_{i \max}$ apare când forța P_1 calcă în secțiunea i :

$$\frac{P_1}{c_1} = \frac{20}{1} = 20 > \frac{\sum P_k}{l} = \frac{20+15+5}{14} = \frac{40}{14} = 2,86 \rightarrow T_{i \max}$$

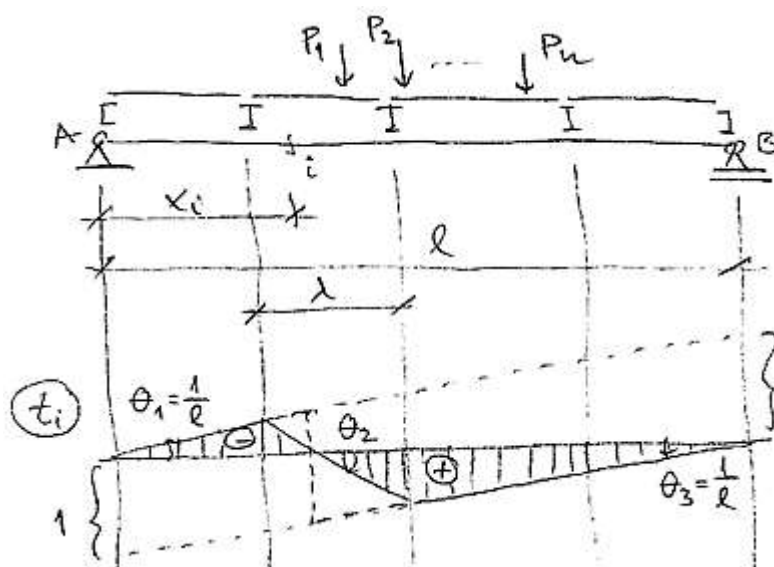


$$V_A = \frac{20 \cdot 9 + 15 \cdot 8 + 5 \cdot 6}{14} = 23,57 \text{ kN}$$

$$T_{i \max} = V_A$$

Încărcări aplicate indirect

În cazul încărcărilor indirecte, trecerea unei forțe dincolo de secțiune nu va produce o variație bruscă a forței tăietoare (efectul se tratează pe panou). În figura de mai jos, se poziționează convoiul de forțe pe zona pozitivă a liniei de influență (forța P_2 deasupra antretoazei din dreapta secțiunii i):



astfel vor rezulta rotirile:

$$\theta_1 = \theta_3 = \frac{1}{l}$$

$$\theta_2 = \frac{1}{x_i} - \frac{1}{l}$$

și se va obține:

$$\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{l} \right) \sum_{k=1}^i P_k - \frac{1}{l} \sum_{k=i+1}^n P_k < 0$$

deci

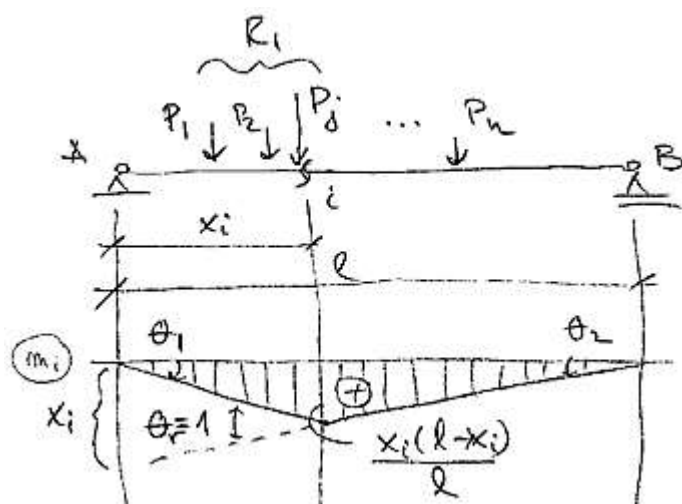
$$\frac{\sum_{k=1}^i P_k}{x_i} < \frac{\sum_{k=i+1}^n P_k}{l - x_i}$$

În relația de inegalitate de mai sus, în partea stângă figurează forțele de pe panoul λ , iar în partea dreaptă forțele de pe toată grinda. Sensul inegalității indică direcția de deplasare a convoiului de forțe, pentru a obține o poziție mai defavorabilă.

Poziția care conduce la obținerea $T_{i \max}$ în panoul λ este cea corespunzătoare așezării în dreptul antretoazei din dreapta secțiunii i a unei forțe care intrând pe panou schimbă sensul inegalității.

MOMENT ÎNCOVOIETOR MAXIM ÎNTR-O SECȚIUNE

În cazul momentului încovoietor dintr-o secțiune pe o grindă, linia de influență are numai valori pozitive. Pentru situația cea mai defavorabilă, forțele cele mai mari ar trebui să acționeze în zona ordonatei maxime din linia de influență. Rotirile vor fi: $\theta_1 = \frac{l - x_i}{l}$; $\theta_2 = \frac{x_i}{l}$



Dacă forța P_j din convoi acționează în secțiunea i , atunci criteriul general pentru obținerea poziției celei mai defavorabile ($M_{i \max}$) va fi:

$$\sum P_j \cdot \theta_j > 0 \text{ și } \sum P_j \cdot \theta_j < 0 \text{ simultan!}$$

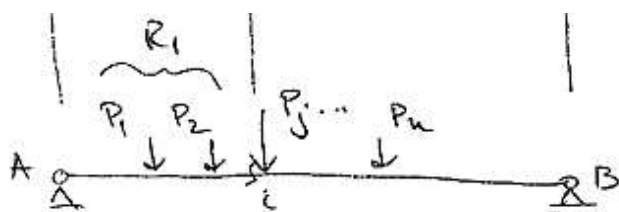
Considerând forța " P_j " imediat în stânga secțiunii și notând cu R_1 și R_2 rezultantele parțiale din convoi:

$$R_1 \cdot \theta_1 + R_2 \cdot \theta_2 > 0$$

adică

$$\sum_{k=1}^i P_k \frac{l - x_i}{l} - \sum_{k=i+1}^n P_k \frac{x_i}{l} > 0$$

$$\text{deci } \frac{\sum_{k=1}^i P_k}{x_i} > \frac{\sum_{k=i+1}^n P_k}{l - x_i}$$



Considerând forța P_j imediat în dreapta secțiunii:

$$R_1 \cdot \theta_1 + R_2 \cdot \theta_2 < 0$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} P_k \cdot x < \sum_{k=j}^n P_k \cdot (l-x)$$

deci $\frac{1}{x} < \frac{\sum_{k=j}^n P_k}{l-x}$

Observație:

Direcția pentru deplasarea convoiului de forțe este indicat de cele două relații de inegalitate

$$\frac{\sum_{k=1}^j P_k}{x} > \frac{\sum_{k=j+1}^n P_k}{l-x} \quad \text{și} \quad \frac{\sum_{k=1}^{j-1} P_k}{x} < \frac{\sum_{k=j}^n P_k}{l-x}$$

în felul următor, sugestiv:

$$> > \rightarrow$$

Convoiul ar trebui deplasat spre dreapta.

$$< < \leftarrow$$

Convoiul ar trebui deplasat spre stânga.

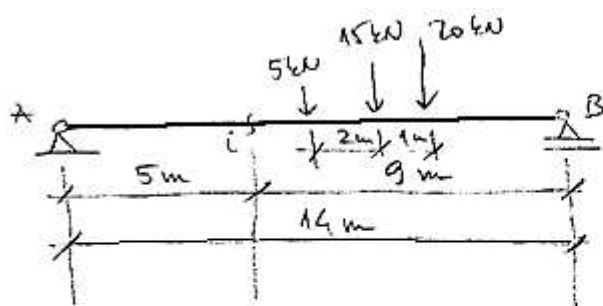
$$> < \text{ (M}_{i\max} \text{ circumscribed) }$$

Este poziția din care rezultă $M_{i\max}$.

Concluzie:

Dacă cele 2 inegalități de mai sus sunt îndeplinite simultan, poziția convoiului cu forța P_j în secțiunea i conduce la obținerea $M_{i\max}$.

Exemplu de aplicare:



$$V_A = \frac{5 \cdot 11 + 15 \cdot 9 + 20 \cdot 8}{14} = 25 \text{ kN}$$

$$M_{i\max} = V_A \cdot 5 - P_1 \cdot 2 = 25 \cdot 5 - 5 \cdot 2 = 115 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$\frac{P_1}{x} = \frac{5}{5} = 1 < \frac{P_2 + P_3}{l-x} = \frac{15+20}{9} = 3,89$$

$$\frac{P_1 + P_2}{x} = \frac{5+15}{5} = 4 > \frac{P_3}{l-x} = \frac{20}{9} = 2,22$$

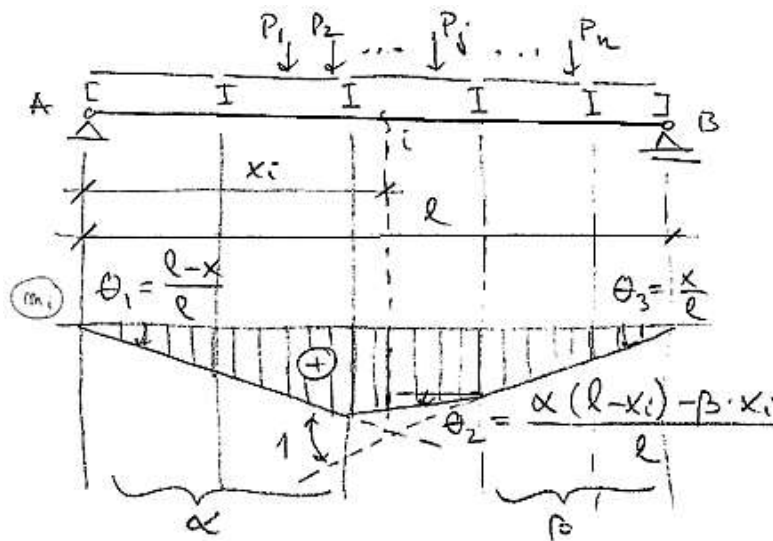
$$\frac{P_1 + P_2}{x} > \frac{P_3}{l-x} \quad \text{(M}_{i\max} \text{ circumscribed)} \quad \frac{P_1}{x} < \frac{P_2 + P_3}{l-x}$$

$P_j = P_2$

După cum se poate observa, $M_{i\max}$ a rezultat pentru poziția forței $P_2 = 15 \text{ kN}$ deasupra secțiunii i .

Încărcări aplicate indirect

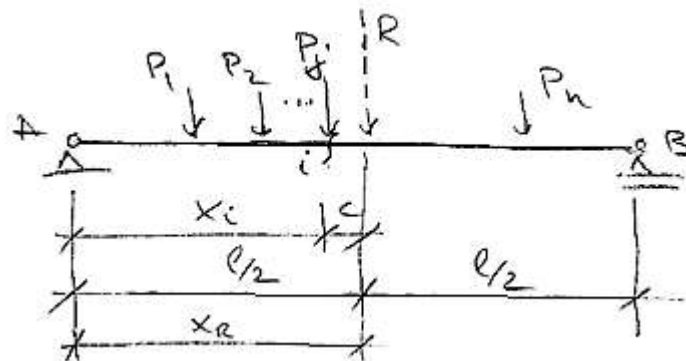
În cazul încărcărilor indirecte, trecerea unei forțe dincolo de secțiune nu va produce o variație bruscă a forței tăietoare (efectul se tratează pe panou). În figura ilustrată, secțiunea fiind situată în intervalul unui panou, se aplică criteriul general folosind linia de influență cu contur trapezoidal pe porțiunea panoului:



În figura alăturată s-a notat cu α numărul de panouri care preced panoul în care se află secțiunea i , respectiv cu β numărul de panouri care succed panoul în care se află secțiunea i (pentru cazul considerat $\alpha = 2$ și $\beta = 2$).

MOMENT MAXIM MAXIMORUM

Momentul "maxim maximorum" înseamnă cel mai mare moment încovoietor ce poate apărea într-o grindă încărcată cu un convoi mobil de forțe. Determinarea acestuia implică două aspecte: secțiunea în care va apare acest moment maxim maximorum (numită și "secțiunea periculoasă"), respectiv valoarea momentului cel mai mare.



Considerând schema ilustrată în care s-a marcat R rezultanta forțelor din convoiul mobil și cu i secțiunea periculoasă (sub forța P_j , cea mai apropiată de rezultantă), poziționând rezultanta pe mijlocul grinzii se poate determina reacțiunea $V_A = \frac{R(l-x_R)}{l}$ cu ajutorul căreia se poate calcula momentul încovoietor din secțiune $M_{max} = V_A \cdot (x_R - c) - M_j$ (cunoscând distanța $x_R = x_i + c$), unde M_j reprezintă suma momentelor forțelor din stânga P_j . Dacă acest moment este cel într-adevăr maxim maximorum, atunci $\frac{dM_{max}}{dx_R} = 0$. Astfel,

$$M_{max} = \frac{R(l-x_R)}{l} (x_R - c) - M_j = \frac{R}{l} (l \cdot x_R - l \cdot c - x_R^2 + x_R \cdot c) - M_j$$

$$\frac{dM_{max}}{dx_R} = \frac{R}{l} (l - 2x_R + c) = 0 \rightarrow \boxed{\frac{c}{2} = x_R - \frac{l}{2}}$$

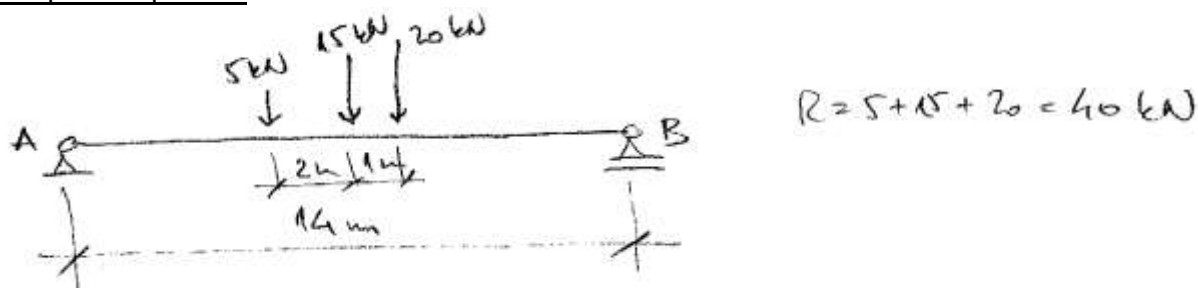
Concluzie:

Mijlocul grinzii împarte în două părți egale distanța dintre rezultanta R și forța P_j din convoi (forța care acționează în secțiunea periculoasă).

Observație:

Având în vedere că lângă rezultanta R vor fi două forțe vecine din convoiul mobil, vor trebui făcute încercări cu ambele pentru a afla poziția secțiunii periculoase și valoarea lui $M_{max\ max}$. Valoarea $M_{max\ max}$ va fi mai mare dacă rezultanta R este mai mare și distanța c până la forța vecină P_j este mai mică.

Exemplu de aplicare:

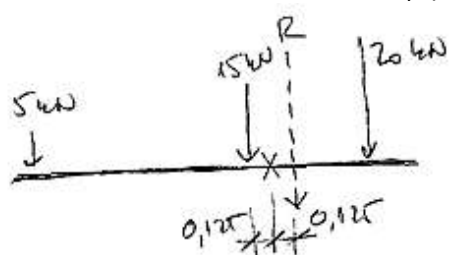


Pentru aflarea poziției rezultantei se poate utiliza o ecuație de momente încovoietoare, din poziția primei forțe (cea cu valoarea de 5 kN):

$$5 \cdot 0 + 15 \cdot 2 + 20 \cdot 3 = R \cdot d_R \text{ de unde rezultă } d_R = 90 / 40 = 2,25 \text{ m}$$

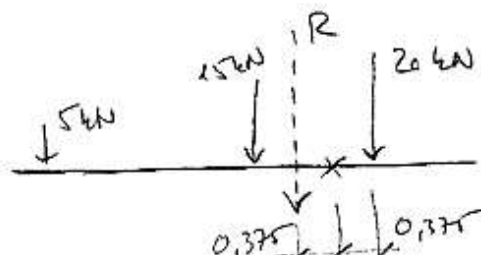
(adică R se va situa la un sfert din distanța dintre forțele de 15 kN și 20 kN).

După calcularea valorii și a poziției rezultantei, se vor considera cele două posibilități: mijlocul grinzii la distanțe egale între forța de 15 kN și R , respectiv între R și forța de 20 kN (mijlocul grinzii s-a marcat cu X în cele două schițe):



$$V_A = (7 - 0,125) \cdot 40 / 14 = 19,642 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M &= V_A \cdot (7 - 0,125) - 5 \cdot 2 = \\ &= 19,642 \cdot 6,875 - 5 \cdot 2 = \\ &= 135,039 - 10 = 125,04 \text{ kNm} \end{aligned}$$



$$V_A = (7 + 0,375) \cdot 40 / 14 = 21,071 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} M &= V_A \cdot (7 + 0,375) - 5 \cdot 3 - 15 \cdot 1 = \\ &= 21,071 \cdot 7,375 - 15 - 15 = \\ &= 155,399 - 30 = 125,399 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\underline{M_{max\ max} = 125,40 \text{ kNm}}$$

În concluzie, secțiunea periculoasă va fi sub forța de 20 kN (la 0,375 m spre dreapta de mijlocul grinzii), valoarea momentului maxim maximorum rezultând de 125,4 kNm.