

DEPLASĂRI PUNCTUALE

În multe situații proiectarea structurilor necesită luarea în considerare și limitarea deplasărilor prin reducerea deformațiilor structurale, pe lângă evaluarea capacității portante. Calculul deplasărilor punctuale se bazează pe aplicarea principiului lucrului mecanic virtual la structuri, în domeniul comportării elastice. Pentru echilibru, lucrul mecanic total al forțelor exterioare și interioare trebuie să fie nul. Deplasările virtuale considerate în cazul lucrului mecanic virtual, trebuie să fie compatibile cu legăturile, reprezentând o deformată posibilă a structurii.

Condiția generală de echilibru într-o poziție deformată

În cazul unei structuri alcătuite din bare, dacă forța reală P_j parcurge o deplasare virtuală Δ_j , atunci se poate scrie (termenii virtuali fiind marcați cu bară deasupra):

$$\sum \bar{P}_j \cdot \bar{\Delta}_j - \int M \cdot d\bar{\theta} - \int N \cdot d\bar{u} - \int T \cdot d\bar{v} = 0$$

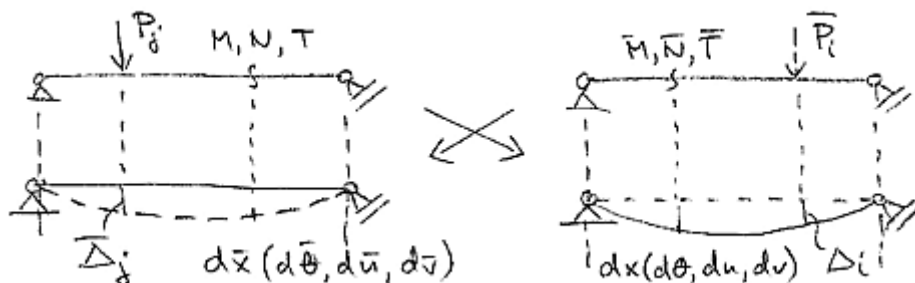
Această relație exprimă echilibrul în cazul forțelor reale.

Considerând însă o încărcare virtuală $\bar{P}_j$ care parcurge o deplasare reală Δ_j , în mod similar cu expresia anterioară va rezulta:

$$\sum \bar{P}_i \cdot \Delta_i - \int \bar{M} \cdot d\theta - \int \bar{N} \cdot du - \int \bar{T} \cdot dv = 0$$

Această relație exprimă condiția de compatibilitate a deformațiilor reale.

Cele două relații reprezintă condițiile generale de echilibru static al unei structuri. Astfel, se poate deduce că în cazul unei grinzi drepte cele două situații ilustrate mai jos sunt identice:



Altfel spus, se poate considera o încărcare reală P_j producând o deplasare virtuală Δ_j (alături de eforturi reale cu deformații virtuale corespunzătoare), sau o încărcare virtuală $\bar{P}_i$ corespunzătoare unei deplasări reale Δ_i (alături de eforturi virtuale cu deformații reale corespunzătoare). Astfel, lucrul mecanic rezultat în cazul următoarelor două situații ilustrate va fi același:



Reciprocitatea lucrului mecanic (teorema lui Betti)

Vectorul încărcărilor și al deplasărilor având forma de matrice coloană, utilizând forma lor transpusă se poate scrie:

$$P_j^T \cdot \bar{\Delta}_j = \int_S \sigma^T \cdot \bar{\epsilon} \cdot ds \quad \text{și} \quad \bar{P}_i^T \cdot \Delta_i = \int_S \bar{\sigma}^T \cdot \epsilon \cdot ds$$

Dezvoltând aceste relații rând pe rând, considerând expresiile componentelor lor (cunoscute deja de la disciplina de Rezistența Materialelor):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \mu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)}{E} & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \mu \cdot (\sigma_z + \sigma_x)}{E} & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \mu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)}{E} & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}\end{aligned}$$

În cazul forțelor reale parcurgând deplasări virtuale se va obține:

$$\begin{aligned}\int_S \sigma_i^T \bar{\varepsilon}_i \cdot ds &= \int_S (\sigma_x \cdot \bar{\varepsilon}_x + \sigma_y \cdot \bar{\varepsilon}_y + \sigma_z \cdot \bar{\varepsilon}_z + \tau_{xy} \cdot \bar{\gamma}_{xy} + \tau_{yz} \cdot \bar{\gamma}_{yz} + \tau_{zx} \cdot \bar{\gamma}_{zx}) ds = \\ &= \int_S \left[\frac{1}{E} (\sigma_x \cdot \bar{\sigma}_x + \sigma_y \cdot \bar{\sigma}_y + \sigma_z \cdot \bar{\sigma}_z) - \frac{\mu}{E} (\sigma_x \cdot \bar{\sigma}_y + \sigma_y \cdot \bar{\sigma}_x + \sigma_y \cdot \bar{\sigma}_z + \sigma_z \cdot \bar{\sigma}_y + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_z \cdot \bar{\sigma}_x + \sigma_x \cdot \bar{\sigma}_z) + \frac{1}{G} (\tau_{xy} \cdot \bar{\tau}_{xy} + \tau_{yz} \cdot \bar{\tau}_{yz} + \right. \\ &\quad \left. + \tau_{zx} \cdot \bar{\tau}_{zx}) \right] ds\end{aligned}$$

În mod similar se poate dezvolta și relația pentru cazul forțelor virtuale corespunzătoare unor deplasări reale, rezultând:

$$\int_S \sigma_i^T \bar{\varepsilon}_i \cdot ds = \int_S \bar{\sigma}_i^T \varepsilon_i \cdot ds$$

Ceea ce înseamnă că lucrul mecanic virtual generat de către forțe reale parcurgând deplasări virtuale va fi identic cu cel generat de către forțe virtuale care parcurg deplasări reale:

$$\bar{L}_{ij} = L_{ji}$$

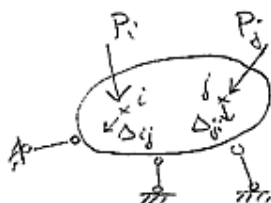
Ceea ce se poate exprima și sub formele:

$$P_i \cdot \Delta_j = \bar{P}_j \cdot \Delta_i \text{ și } P_j \cdot \Delta_j = \bar{P}_i \cdot \Delta_i$$

Deci, lucrul mecanic generat de către un sistem de forțe reale P_j parcurgând deplasările produse de către un sistem de forțe virtuale P_i este egal cu lucrul mecanic produs de către un sistem de forțe reale P_i parcurgând deplasările produse de către sistemul virtual P_j .

Orice structură poate fi încărcată cu forțe sau prin deplasări. Deplasările punctuale elastice (neremanente) vor apărea datorită încărcărilor cu forțe, iar în cazul încărcărilor prin deplasări se vor naște reacțiuni (forțe în legături) datorită trecerii structurii într-o poziție deformată (compatibilă cu legăturile existente).

Reciprocitatea deplasărilor unitare:



$$\begin{aligned}P_i \cdot \Delta_{ji} &= P_j \cdot \Delta_{ji} \\ P_i &= P_j = 1 \\ \delta_{ij} &= \delta_{ji}\end{aligned}$$

În relația de mai sus, primul indice marchează poziția punctului în care se produce deplasarea, iar cel de al doilea poziția punctului de aplicare a forței unitate. Această relație se aplică la rezolvarea structurilor prin metoda forțelor.

Reciprocitatea reacțiunilor unitare:



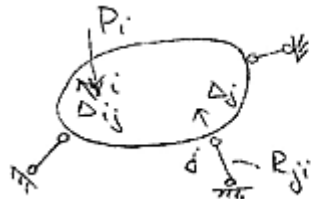
$$\Delta_i \cdot R_{ij} = \Delta_j \cdot R_{ji}$$

$$\Delta_i = \Delta_j = 1$$

$$r_{ij} = r_{ji}$$

Reacțiunea în punctul i din încărcarea cu deplasare unitate în punctul j este egală cu reacțiunea în punctul j ce rezultă din încărcarea cu deplasare unitate în punctul i . Această relație se utilizează la rezolvarea structurilor prin metoda deplasărilor.

Reciprocitatea dintre o deplasare unitară și o reacțiune unitară:



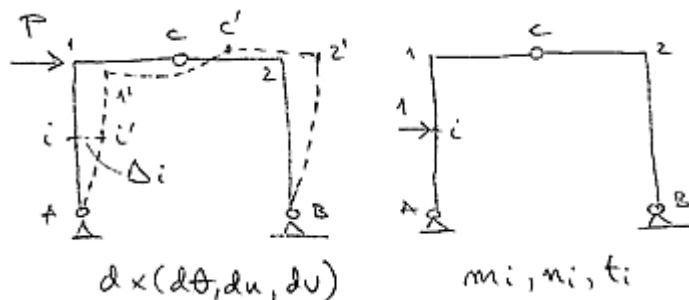
$$P_i \cdot \Delta_{ij} + \Delta_j \cdot R_{ji} = 0$$

$$P_i = 1 \quad \Delta_j = 1$$

$$\delta_{ij} = -r_{ji}$$

Deplasarea punctului i după direcția forței $P_i = 1$ datorită unei încărcări $\Delta_j = 1$, este egală și de semn contrar cu reacțiunea ce se naște în legătura j datorită acțiunii forței $P_i = 1$. Această relație se aplică la trasarea liniilor de influență la structuri static nedeterminate.

Expresia generală a deplasărilor punctuale în domeniul elastic:



Considerând cadrul plan ilustrat, încărcat cu forța P , prin deformațiile produse punctul i va suferi o deplasare a cărei componentă orizontală s-a marcat cu Δ_i . Astfel, se poate considera o încărcare unitate virtuală pe orizontală (pe direcția Δ_i) parcurgând o deplasare reală Δ_i . Pornind de la expresia echilibrului static în domeniul elastic (însemnând lucru mecanic virtual nul) al structurii:

$$\sum \bar{P}_i \cdot \Delta_i - \int \bar{M} \cdot d\theta - \int \bar{N} \cdot du - \int \bar{T} \cdot dv = 0$$

Pentru punctul i se poate scrie (luând în considerare și un eventual efect al torsiunii m^t):

$$1 \cdot \Delta_i - \int m_i \cdot d\theta - \int n_i \cdot du - \int t_i \cdot dv - \int m^t \cdot d\varphi = 0$$

În această relație cifra 1 din față este valoarea încărcării virtuale și din punct de vedere matematic se poate ignora (are semnificație doar pentru unitățile de măsură). Dacă se iau în considerare și posibile cedări de rezeme (din inexactități de montaj sau de construire etc.):

$$\Delta_{ir} = - \sum r_i \cdot \Delta_i^r$$

(Δ_i^r este deplasarea rezemării i cu reacțiunea unitate r_i), iar în cazul variațiilor de temperatură care se pot manifesta în interiorul unor bare (între fețele secțiunii) și în lungul axului unor bare (temperaturi diferite la capete):

$$\propto \frac{\Delta t}{h} \cdot dx \quad \text{și} \quad \propto t \cdot dx$$

În aceste relații din urmă, α este coeficientul de dilatare termică liniară, Δt este diferența de temperatură între fețele exterioare ale secțiunii și h este distanța dintre aceste fețe ale secțiunii, iar t reprezintă variația temperaturii în axul barei (diferența de temperatură între capetele barei). În cazul structurilor static determinate cedările de reazeme și variațiile de temperatură nu vor produce eforturi, vor duce doar la modificarea geometriei structurale!

În cazul unei încărcări cu forță generalizată care produce eforturile M_i , N_i , T_i și M_i^t în secțiunea curentă și deformații elastice, expresiile deplasărilor relative vor fi:

$$d\theta = \frac{M_i}{E \cdot I} \cdot ds \quad du = \frac{N_i}{E \cdot A} \cdot ds \quad dv = k \frac{T_i}{G \cdot A} \cdot ds \quad dp = \frac{M_i^t}{G \cdot I^t} \cdot ds$$

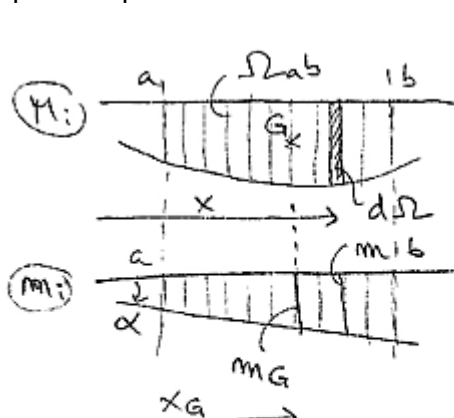
De aici rezultă relația "Maxwell-Mohr" (expresia generală a deplasărilor punctuale):

$$\Delta_i = \int_s \frac{M_i}{E \cdot I} m_i \cdot ds + \int_s \frac{N_i}{E \cdot A} n_i \cdot ds + \int_s k \cdot \frac{T_i}{G \cdot A} t_i \cdot ds + \int_s \frac{M_i^t}{G \cdot I^t} m_i^t \cdot ds - \sum \bar{r}_i \cdot \Delta_i^r + \int_s \alpha \frac{\Delta t}{h} \cdot m_i \cdot ds + \int_s \alpha \cdot t \cdot n_i \cdot ds$$

Relația "Maxwell-Mohr" este aplicabilă atât structurilor static determinate, cât și celor static nedeterminate, cât timp deformarea structurii este în domeniul elastic. Partea referitoare la cedări de reazeme și la variații de temperatură sunt aplicabile numai la structuri static determinate! La structurile static nedeterminate aceste încărcări vor produce eforturi (și deformații elastice) datorită surplusului de legături, astfel, la calculul deplasărilor trebuie considerate efectele lor împreună cu cel al eforturilor.

Observație:

Diagramele de efort (m_i , n_i , t_i , m_i^t) produse de către o încărcare unitate au întotdeauna variație liniară pe structurile static determinate. Momentul de inerție al secțiunii barelor poate varia, dar se poate raporta la o valoare de referință aleasă arbitrar (I_0).



$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{M_i}{E I} m_i \cdot dx &= \frac{1}{E I_0} \int_a^b \frac{I_0}{I} M_i \cdot m_i \cdot dx = \\ &= \frac{1}{E I_0} \int_a^b m_i \left(\frac{I_0}{I} M_i \cdot dx \right) = \frac{1}{E I_0} \int_a^b m_i \cdot d\Omega = \\ &= \frac{1}{E I_0} \int_a^b x \cdot \tan \alpha \cdot d\Omega = \frac{\tan \alpha}{E I_0} \int_a^b x \cdot d\Omega = \\ &= \frac{1}{E I_0} \underbrace{\Omega_{ab} \cdot x_G}_{m_G} \cdot \tan \alpha = \frac{1}{E I_0} \Omega_{ab} \cdot m_G \end{aligned}$$

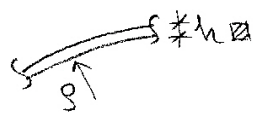
Metoda rezultată, prin care se poate înmulți suprafața Ω_{ab} a diagramei neliniare cu ordonata corespunzătoare m_G din diagrama liniară poartă denumirea "regula lui Vereșciaghin".

În majoritatea cazurilor termenii din relația "Maxwell-Mohr" au ponderi diferite, astfel nu se iau toate în considerare la calculul deplasărilor punctuale:

- La bare și cadre: $\Delta_i = \int_s \frac{M_x}{E I} m_i \cdot dx$

Celelalte componente au de regulă o influență sub 10% în calculul deplasărilor (dar în cazul barelor scurte trebuie considerat și efectul forței tăietoare).

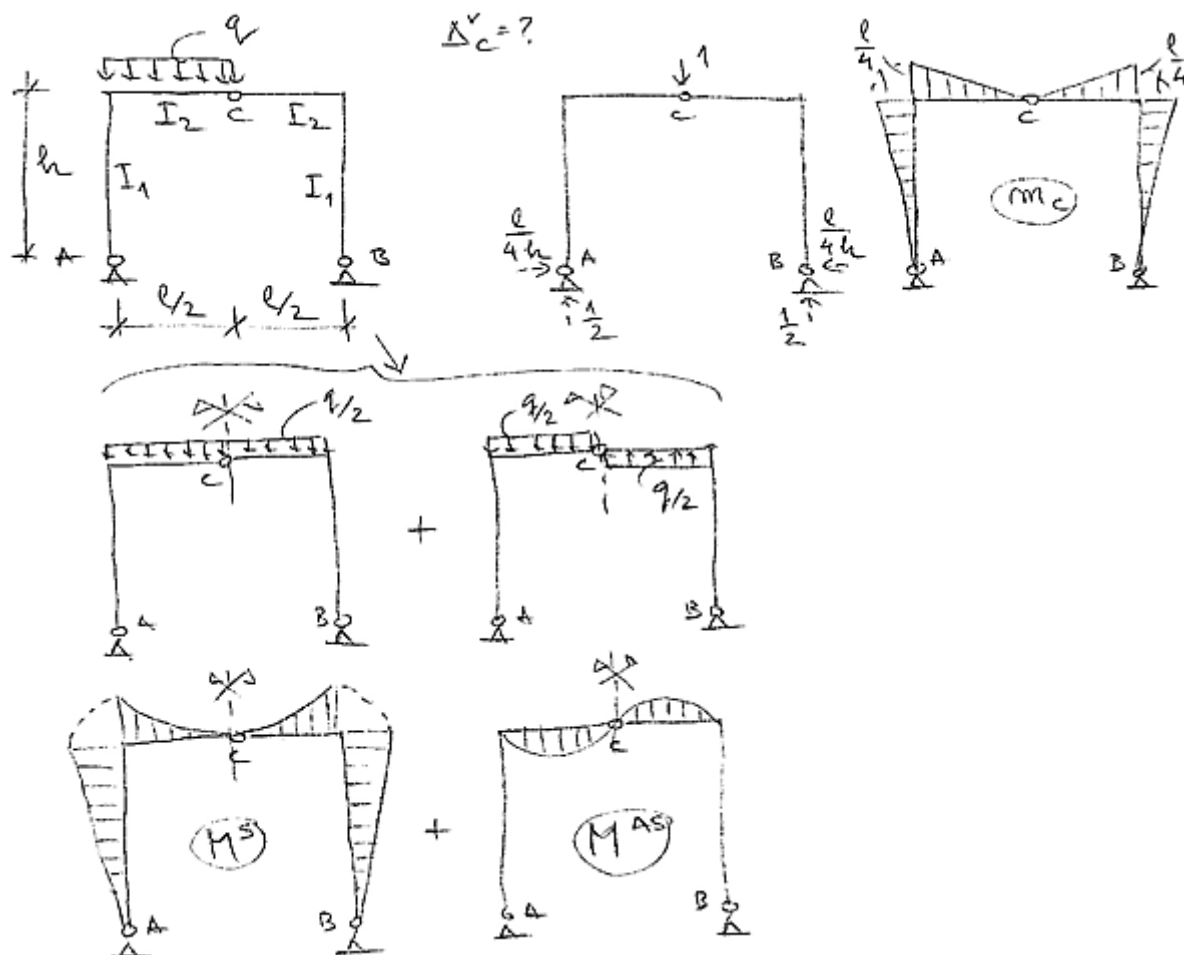
- La structuri articulate plane: $\Delta_i = \int_s \frac{N}{EA} m_i dx = \sum_{j=1}^n \frac{N_j \cdot m_{ji} \cdot l_j}{E_j \cdot A_j}$

- La arce: $\Delta_i = \int_s \frac{M}{EI} m_i ds + \int_s \frac{N}{EA} m_i ds$ dacă 

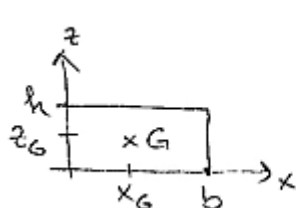
(neglijând efectul curburii dacă $\rho > 10 \cdot h$, după cum s-a ilustrat).

Utilizarea simetriei și antisimetriei

În cazul structurilor simetrice, prin descompunerea încărcărilor în componente simetrice și antisimetrice, calculul deplasărilor se poate face pe jumătatea variantei simetrice (înmulțind apoi rezultatul cu doi), iar în cazul componentei antisimetrice diagramele se vor anula. Pentru ilustrare s-a considerat exemplul următor, pentru calculul deplasării verticale a punctului C:

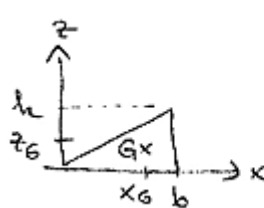


Câteva caracteristici geometrice simple (centre de greutate și suprafețe):



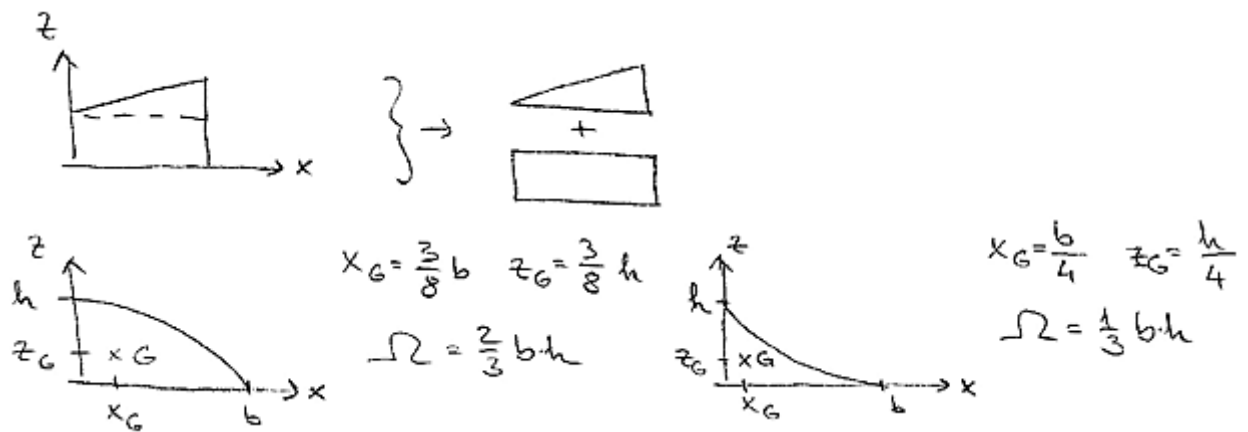
$$x_G = \frac{b}{2} \quad z_G = \frac{h}{2}$$

$$\Omega = b \cdot h$$



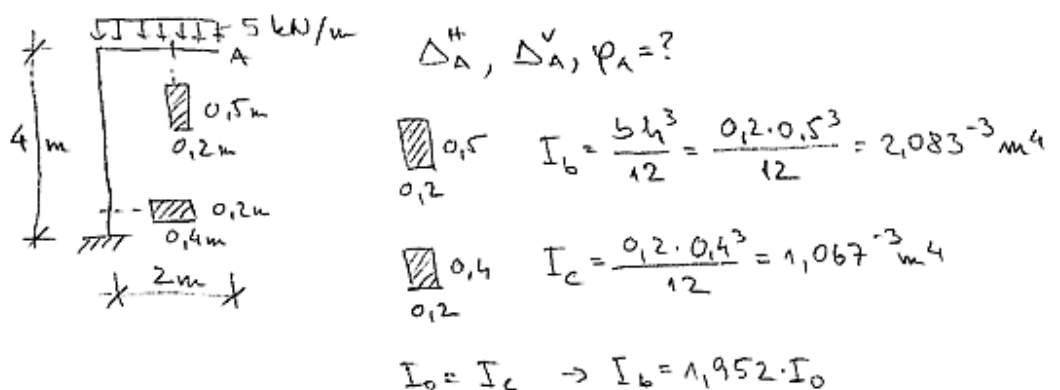
$$x_G = \frac{2}{3} b \quad z_G = \frac{h}{3}$$

$$\Omega = \frac{b \cdot h}{2}$$

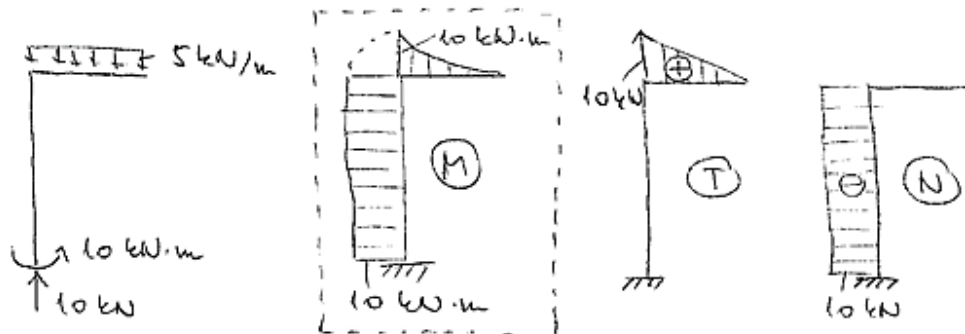


Exemple cu probleme rezolvate

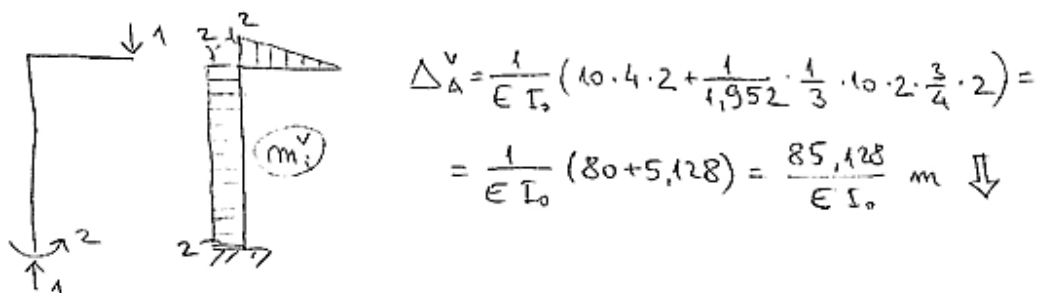
1. Cadru plan:



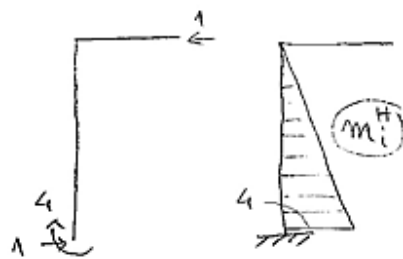
$$\Delta_i = \int \frac{M}{E \cdot I} m_i \cdot ds$$



Doar diagrama M va fi considerată, datorită influenței reduse a celorlalte eforturi.

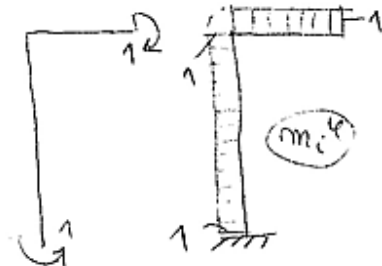


După cum se poate observa, deplasarea punctului A pe verticală se va produce în jos (corespunzător cu orientarea încărcării verticale unitate aplicate).



$$\Delta_A^H = \frac{1}{EI_0} \left(-10 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} \right) = -\frac{80}{EI_0} \text{ m} \Rightarrow$$

Deoarece rezultatul este negativ, deplasarea pe orizontală rezultă în sens contrar orientării încărcării unitate aplicate (adică spre dreapta).

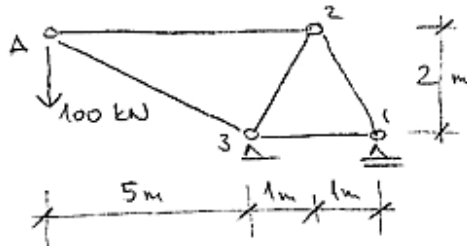


$$\varphi_A = \frac{1}{EI_0} \left(10 \cdot 4 \cdot 1 + \frac{1}{1,952} \cdot 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 1 \right) =$$

$$= \frac{1}{EI_0} (40 + 3,419) = \frac{43,42}{EI_0} \text{ rad} \Rightarrow$$

Rotirea punctului A va fi în sens orar (corespunzător orientării momentului unitate aplicat ca încărcare virtuală).

1. Structură articulată plană:

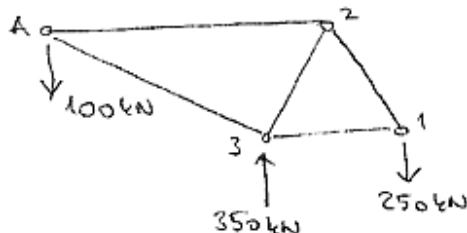


JL 100x100x10 STEEL

$$\Delta_A^V = ?$$

$$A = 2 \cdot 19,2 = 38,4 \text{ cm}^2 = 38,4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \frac{\text{daN}}{\text{cm}^2} = 2,1 \cdot 10^8 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$$



$$\sum M_1 = 0 \quad V_3 \cdot 2 = 100 \cdot 7 \quad V_3 = \frac{700}{2} = 350 \text{ kN}$$

$$\sum M_3 = 0 \quad V_1 \cdot 2 + 100 \cdot 5 = 0 \quad V_1 = -\frac{500}{2} = -250 \text{ kN}$$

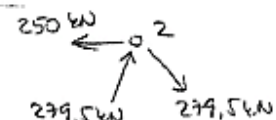
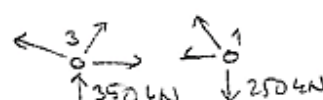
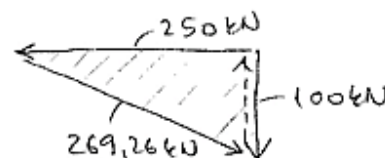
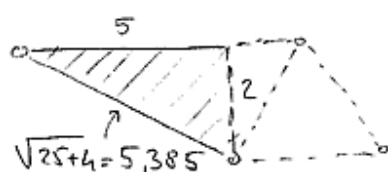
$$\sum H = 0 \quad H_3 = 0$$

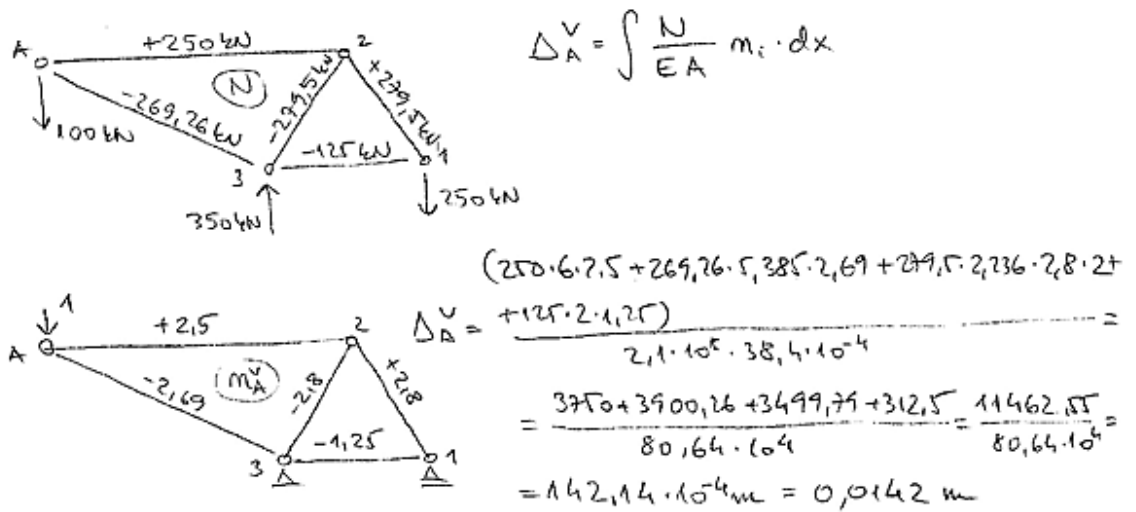
$$\sum V = 0 \quad 350 - 100 - 250 = 0 \quad \checkmark$$



$$\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} = 0,894$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447$$





Diagramele fiind dreptunghiulare, nu s-au reprezentat grafic pe structură, s-au marcat doar valorile eforturilor axiale.