1 Funcţii spline

Fie un interval $[a, b]$ şi o diviziune a sa:

$$\Delta = \{a = x_0, x_1 < ... < x_n = b\}. \tag{1}$$

Definitia 1.1 Se numeşte funcţie spline cubică corespunzătoare diviziunii Δ o funcţie notată $s_{\Delta,3}$ care:
1.Este polinom de grad trei pe fiecare interval al diviziunii Δ;
2.Este o funcţie cu derivata de ordin doi continuă pe intervalul $[a, b]$.

Expresia analitică a unei funcţii spline este dată de:

$$s_{\Delta,3} = c_{-2}x + c_{-1} + \sum_{i=0}^{n} c_i (x - x_i)_+^3 \tag{2}$$

unde $(x - x_i)_+^3$ este funcţia putere trunchiată definită de:

$$(x - x_i)_+^3 = \begin{cases} 0, x < x_i \\ (x - x_i)_+^3, x \geq x_i \end{cases}$$

Pentru o funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ numim funcţie spline de interpolare o funcţie spline care coincide cu funcţia f pe diviziunea dată, adică verifică egalităţile:

$$s_{\Delta,3}(x_i) = f(x_i), i = \overline{0, n}. \tag{3}$$

Notând cu M_i derivatele de ordin 2 ale funcţiei spline pe nodurile diviziunii Δ din condiţiile (3) rezultă expresia analitică a funcţiei spline de interpolare pe intervalul (x_{i-1}, x_i) (notând $h_i = x_i - x_{i-1}$):

$$\begin{aligned} s_{\Delta,3}(x) &= \frac{M_i (x - x_{i-1})^3 - M_{i-1}(x - x_i)^3}{6h_i} + \\ &+ \left(f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\right)\left(\frac{x_i - x}{h_i}\right) + \left(f(x_i) - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \end{aligned} \tag{4}$$

Punând condiţiile de continuitate în nodurile diviziunii a derivatei de ordin I a funcţiei spline rezultă pentru determinarea valorilor M_i sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} &= \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}, \\ i &= \overline{1, n-1} \end{aligned} \tag{5}$$

La acest sistem se mai adaugă fie:

1. (a) condiţia ca pe capetele diviziunii derivata a doua să fie nulă,
   (b) fie ca derivata întâi să coincidă cu derivata funcţiei f pe a, b .

În cel de al doilea caz rezultă pentru M_i sistemul:

$$\begin{cases} a_0 M_0 + c_0 M_1 = d_0 \\ b_i M_{i-1} + a_i M_i + c_i M_{i+1} = d_i,\ i = \overline{1, n-1} \\ b_n M_{n-1} + a_n M_n = d_n \end{cases} \tag{6}$$

cu notaţiile:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, c_i = 1 - b_i, d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right), i = \overline{1, n-1} \\ b_n &= 1, c_0 = 1, d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'\right), d_n = \frac{6}{h_n}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right), \\ a_i &= 2, i = \overline{0, n}, f_i = f(x_i), f_i' = f'(x_i) \end{aligned} \tag{7}$$

Remarca 1 *Un algoritm eficient pentru rezolvarea sistemului (6) este următorul:*

1. Se calculează coeficienţii sistemului (6) cu formulele (7);
2. Se determină numerele $\omega_{i+1}, \alpha_i,\ i = \overline{0, n-1}$ conform formulelor:
$$\begin{aligned} \alpha_0 &= c_0/a_0 \\ \omega_i &= a_i - \alpha_{i-1}b_i; \alpha_i = c_i/\omega_i, i = \overline{1, n-1} \\ \omega_n &= a_n - \alpha_{n-1}b_n. \end{aligned}$$
3. Se determină numerele $z_i, i = \overline{0, n}$ din formulele:
$$z_0 = d_0/2, z_i = \left(d_i - b_i z_{i-1}\right)/\omega_i, i = \overline{1, n}.$$
4. Soluţia sistemului (6) este dată de :
$$M_n = z_n; M_i = z_i - \alpha_i M_{i+1}, i = \overline{n-1, 0}.$$
5. Pe fiecare interval (x_i, x_{i+1}) funcţia spline de interpolare se calculează conform formulei (4), cu M_i determinaţi mai sus.

Lăsăm pe seama cititorului să verifice că acest algoritm nu este altceva decât factorizarea LU a marticei sistemului (6) şi rezolvarea lui folosind această factorizare.

Remarca 2 *Dacă în formula (4) facem schimbarea de variabilă $x = tx_i + (1-t)\,x_{i-1}$ atunci vom obţine o funcţie notată s_i definită pe $[0, 1]$ a cărei expresie este:*
$$s_i(t) = \frac{h_i^2}{6}\left(m_i t^3 - m_i t + m_{i-1}(1-t)^3 - m_{i-1}(1-t)\right) + f_{i-1}(1-t) + f_i t, \qquad t \in [0,1] \qquad (8)$$
Practic determinarea funcţiei spline de interpolare constă în determinarea şirului de funcţii $(s_i)_{i=\overline{1,n}}$ date de formula de mai sus, coeficienţii m_i determinându-se conform algoritmului de la remarca precedentă.

Exercitiul 1.1 Se propune determinarea funcţiei spline cunoscând valorile unei funcţii f pe nodurile diviziuni Δ date de (1) şi valorile derivatei sale f_0', f_n' pe capetele intervalului.