Transformata Laplace

GOM

22 mai 2008

1 Transformata Laplace

În cele ce urmează vom studia transformata Laplace, care din punct de vedere matematic nu este decât o integrală improrie şi cu parametru (vezi formula (1)), dar are numeroase aplicaţii. Capitolul din matematică care studiază proprietăţile transformatei Laplace se numeşte CALCULUL OPERATORIAL.

1.1 Definiţii

Definitia 1 *Se numeşte funcţie original funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care satisface condiţiile:*

1. $f(t) = 0, t < 0.$
2. *f este derivabilă pe porţiuni.*
3. $\exists M > 0$ *şi* $\sigma_0 \geq 0$ *astfel încât:* $|f(t)| < Me^{\sigma_0 t}$. *(σ_0 se numeşte indice de creştere a funcţiei f).*

Definitia 2 *Transformata Laplace a funcţiei original $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ este funcţia:*

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1}$$

Teorema 1 *Integrala care defineşte funcţia de variabilă complexă F este convergentă în semiplanul $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > \sigma_0\}$ şi uniform convergentă pe mulţimea*

$$\{s \in \mathbb{C}\, | \operatorname{Re} s > \sigma_0 + \varepsilon, \arg s \in [-\pi/2 + \alpha, \pi/2 - a]\}$$

pentru orice α şi ε pozitivi.

Remarca 1 *Vom nota* $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) := F(s)$.

1.2 Proprietăţi

Teorema 2 *F este o funcţie olomorfă pe domeniul său de definiţie şi derivata sa se calculează :*

$$F^{'}(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-tf(t))\, dt.$$

1. $\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$.
2. $\mathcal{L}\{f(at)\}(s) = \frac{1}{a}\mathcal{L}\{f(t)\}\left(\frac{s}{a}\right)$ *(schimbarea de scară).*
3. $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}(s) = F(s - a)$ *(translaţia în complex)*
4. $\mathcal{L}\{f(t-a)\, u(t-a)\}(s) = e^{-sa} F(s)$ *(translaţia la dreapta în real)*
5. $\mathcal{L}\{f(t+a)\, u(t)\}(s) = e^{sa}\left(F(s) - \int_0^a e^{-st} f(t)\, dt\right)$ *(translaţia la stânga în real)*
6. $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0+)$ *(derivarea originalului)*
7. $\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - ... - f^{(n-1)}(0+)$
8. $\mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}(s) = F^{(n)}(s)$ *(derivarea transformatei)*
9. $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)\, du\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}$. *(integrarea originalului)*
10. $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty F(u)\, du$. *(integrarea transformatei)*
11. $\lim\limits_{s\to\infty} sF(s) = f(0+)$ *(teorema valorii iniţiale)*

12. $\lim\limits_{s\to 0} sF(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$ *(teorema valorii finale).*

13. $\mathcal{L}\{(f*g)(t)\}(s) = F(s)\,G(s)$, *unde* $(f*g)(t) := \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$ *este convoluţia funcţiilor* f *şi* g.

Se deduce uşor următorul tabel de transformate:

$f(t)$	$F(s)$
$u(t)$ [1]	$\frac{1}{s}$
t^r	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$e^{at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$

Exercitiul 1 Folosind acest tabel şi formulele 1-12 să se calculeze transformata Laplace a următoarelor funcţii :

1. $f(t) = (t-a)^2\,u(t-a)$.
2. $f(t) = t^2 u(t-a)$.
3. $f(t) = t\cos\omega t$.
4. $f(t) = t^n\sin\omega t, g(t) = t^n\cos\omega t$.
5. $f(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$.
6. $f(t) = \frac{2(\cos at-\cos bt)}{t}$.
7. $f(t) = \frac{\sin t}{t}$.
8. $f(t) = \frac{e^{-2t}-1}{t}\sin 3t$.
9. $f(t) = \frac{e^{bt}-e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}$.

Soluţii:

1: Aplicând formula 4 şi transformata Laplace a lui t^2 (vezi tabelul, linia 3, pentru $r=2$) avem succesiv: $\mathcal{L}\left\{(t-a)^2\,u(t-a).\right\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\left\{t^2\right\}(s) = e^{-as}\frac{\Gamma(3)}{s^3} = e^{-as}\frac{2!}{s^3} = \frac{2e^{-as}}{s^3}$.

2: Deoarece $t^2 = (t-a)^2 + 2a(t-a) + a^2$, aplicând aceleaşi formule ca la exerciţiul precedent şi formula 1 rezultă: $\mathcal{L}\left\{t^2 u(t-a)\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\left((t-a)^2+2a(t-a)+a^2\right)u(t-a)\right\}(s) = \left(\frac{2}{s^3}+2a\frac{1}{s^2}+\frac{a^2}{s}\right)e^{-as}$.

3 Aplicăm formula 8 pentru $n=1$ şi transformata Laplace a funcţiei $\cos\omega t$: $\mathcal{L}\{t\cos\omega t\}(s) = -\frac{d}{ds}\left(\mathcal{L}\{\cos\omega t\}(s)\right) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2}\right) = -\frac{\left(s^2+\omega^2\right)-s\cdot 2s}{(s^2+\omega^2)^2} = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$.

4 Pentru a calcula mai rapid, folosim formulele lui Euler şi calculăm transformata Laplace a funcţiei $h(t) = g(t) + if(t)$. Avem $h(t) = t^n\cos\omega t + it^n\sin\omega t = t^n e^{i\omega t}$. Atunci conform formulei 8 şi liniei 7 din tabel: $\mathcal{L}\{h(t)\}(s) = (-1)^n\left(\frac{1}{s-j\omega}\right)^{(n)} = (-1)^n\frac{(-1)^n n!}{(s-j\omega)^{n+1}} = n!\frac{(s+j\omega)^n}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$. Privind s ca o variabilă reală, rezultă că $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = n!\frac{\mathrm{Re}(s+i\omega)^n}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}, \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = n!\frac{\mathrm{Im}(s+i\omega)^n}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$ (Adică $\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = n!\frac{s^n - C_n^2 s^{n-2}\omega^2 + C_n^4 s^{n-4}\omega^4 - \dots}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$ şi analog $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = n!\frac{C_n^1 s^{n-1}\omega - C_n^3 s^{n-3}\omega^3 + \dots}{(s^2+\omega^2)^{n+1}}$, formule care, datorită proprietăţilor funcţiilor olomorfe, sunt valabile pentru orice s cu $\mathrm{Re}\,s > 0$.).

5 Aplicăm întâi formula 10 apoi linia 7 din tabel şi calculăm integrala care apare: $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}\left\{e^{bt}-e^{at}\right\}(u)\,du = \int_s^\infty\left(\frac{1}{u-b}-\frac{1}{u-a}\right)du = \ln\frac{u-b}{u-a}\Big|_s^\infty = \ln\frac{s-a}{s-b}$. (am ţinut cont că $\lim_{u\to\infty}\ln\frac{u-b}{u-a} = \ln 1 = 0$).

6 Aplicând aceleaşi formule şi linia 5 din tabel rezultă: $\mathcal{L}\left\{\frac{2(\cos at-\cos bt)}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty\left(\frac{2u}{u^2+a^2}-\frac{2u}{u^2+b^2}\right)du = \ln\frac{u^2+a^2}{u^2+b^2}\Big|_s^\infty = \ln\frac{s^2+b^2}{s^2+a^2}$.

7 $\mathcal{L}\left\{\frac{\sin t}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty\frac{1}{u^2+1}du = \mathrm{arctg}\,u\big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,s = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{s}$.

8 $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}-1}{t}\sin 3t\right\}(s) = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{-2t}\sin 3t-\sin 3t}{t}\right\}(s) = \int_s^\infty\left(\frac{3}{(u+2)^2+3^2}-\frac{3}{u^2+3^2}\right)du =$
$=\left(\mathrm{arctg}\,\frac{u+2}{3} - \mathrm{arctg}\,\frac{u}{3}\right)\Big|_s^\infty = \mathrm{arctg}\,\frac{s}{3} - \mathrm{arctg}\,\frac{s+2}{3}. = \mathrm{arctg}\,\frac{\frac{s}{3}-\frac{s+2}{3}}{1+\frac{s}{3}\frac{s+2}{3}} = \mathrm{arctg}\,\frac{-6}{s^2+2s+9}$.

9 $\mathcal{L}\left\{\frac{e^{bt}-e^{at}}{2t\sqrt{\pi t}}\right\}(s) = \int_s^\infty\mathcal{L}\left\{\frac{e^{bt}-e^{at}}{2\sqrt{\pi t}}\right\}(u)\,du = \int_s^\infty\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\Gamma(1/2)}{(u-b)^{1/2}}-\frac{\Gamma(1/2)}{(u-a)^{1/2}}\right)du =$

[1] $u(t) = \begin{cases}1, t>0\\0, t<0\end{cases}$, funcţia treaptă a lui Heaviside.

$\left(\sqrt{u-b}-\sqrt{u-a}\right)\Big|_s^\infty = \sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$ (am aplicat formulele 10, 3, şi linia 3 din tabel pentru $r=1/2$, şi am ţinut cont că $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$).

Exercitiul 2 Să se deducă formula pentru transformata Laplace a funcțiilor periodice de perioadă T și apoi să se calculeze transformata Laplace a următoarelor funcții (desenând și graficul funcțiilor original), având perioada indicată:

1. $f(t) = |\sin \omega t|, T = \frac{\pi}{\omega}$.
2. $f(t) = t, t \in [0,1), T = 1$.
3. $f(t) = \begin{cases} 2t, 0 < t < 1 \\ 4-2t, 1 < t < 2 \end{cases}, T = 2$
4. $f(t) = \operatorname{sign}(\sin(\pi t)), T = 2$.

Soluţii:

Dacă f are perioada T atunci scriem integrala din definiţia transformatei Laplace ca sumă de integrale pe intervale de lungime egală cu perioada şi facem în fiecare integrală schimbare de variabilă astfel încât intervalul de integrare să fie $[0,T]$:

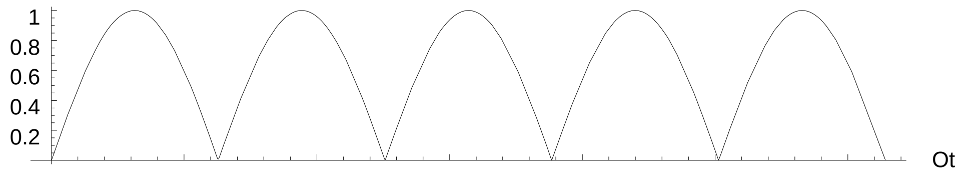
$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \sum_{n=0}^\infty \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t)\,dt =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty \int_0^T e^{-s(nT+\tau)} f(nT+\tau)\,d\tau = \sum_{n=0}^\infty e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau =$$
$$= \left(\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau\right)\left(\sum_{n=0}^\infty e^{-snT}\right) = \frac{\int_0^T e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau}{1-e^{-sT}}.$$

(Shimbarea de variabilă a fost $t = nT+\tau$, am ţinut cont de faptul că dacă f este periodică de perioadă atunci $f(nT+\tau) = f(\tau)$ pentru orice număr $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$. Am folosit şi formula pentru suma unei progresii geometrice $\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$, cu $q = e^{-st}$.).

1 Deoarece $T = \frac{\pi}{\omega}$ formula de mai sus devine: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\sin\omega t\,dt}{1-e^{-s\pi/\omega}}$. Pentru a calcula integrala de la numărător folosim formulele lui Euler şi obţinem:

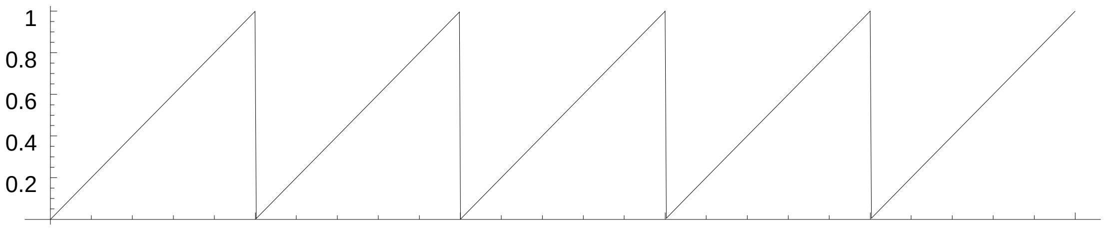
$$\int_0^{\pi/\omega} e^{-st}\sin\omega t\,dt = \frac{1}{2j}\int_0^{\pi/\omega}\left(e^{-st+i\omega t} - e^{-st-i\omega t}\right)dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{e^{t(i\omega-s)}}{j\omega-s} - \frac{e^{-t(j\omega+s)}}{-s-j\omega}\right)\Bigg|_{t=0}^{\pi/\omega} =$$
$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{e^{\pi j-s\pi/\omega}}{j\omega-s} + \frac{e^{-\pi j-s\pi/\omega}}{j\omega+s}\right) - \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{j\omega-s} + \frac{1}{s+j\omega}\right) =$$
$$= \frac{-e^{-s\pi/\omega}-1}{2j}\left(\frac{1}{j\omega-s} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \omega\frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{s^2+\omega^2}.$$

Înlocuind obţinem: $\mathcal{L}\{|\sin\omega t|\}(s) = \frac{1+e^{-s\pi/\omega}}{s^2+\omega^2}\frac{\omega}{1-e^{-s\pi/\omega}} = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}\operatorname{cth}\frac{s\pi}{2\omega}$.



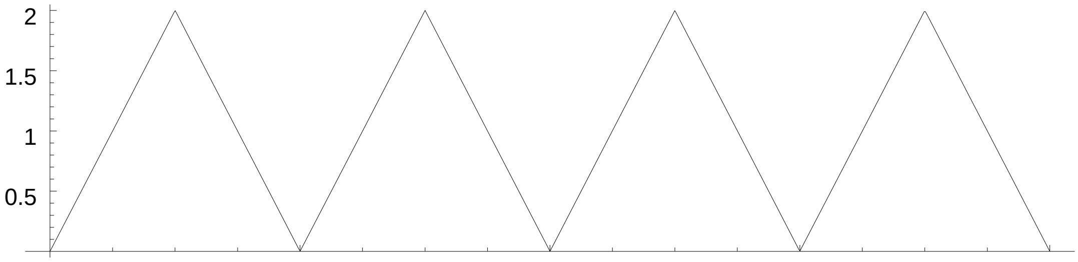
Grafic pentru 1

2 $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 te^{-st}dt = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{e^{-st}(st+1)}{s^2}\right)\Big|_{t=0}^1 = \frac{s+1-e^s}{s^2(1-e^s)}$



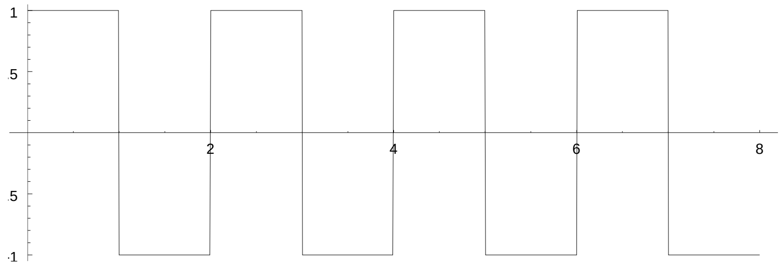
Grafic pentru 2

3 $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 2te^{-st}dt - \int_1^2 (2t-4)e^{-st}dt\right) = ... = \frac{2}{s^2}\frac{1+e^{-2s}}{1-e^{-2s}} = \frac{2}{s^2}\operatorname{cth} s.$



Graficul pentru 3

4 $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\left(\int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}\right) = \frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{s(1-e^{-2s})} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{s})} = \frac{1}{s}\,\mathrm{th}\,\frac{s}{2}.$



Grafic pentru 4

Pentru inversarea trasformatei Laplace menţionăm următoarea teoremă:

Teorema 3 *Dacă F este o funcţie complexă de variabilă complexă care satisface condiţiile:*

1. *este olomorfă în semiplanul* $\mathrm{Re}\, s > \sigma_0$,
2. $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, *uniform în raport cu* $\arg s$ *pentru orice* s *cu* $\mathrm{Re}\, s \geq a > \sigma_0$,
3. *integrala* $\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)\, ds$ *este absolut convergentă,*

atunci funcţia f definită de formula (Mellin - Fourier):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)\, e^{st} ds$$

este o funcţie original şi $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$.

Pentru determinarea inversei sunt utile următoarele două teoreme a lui O. Heaviside:

Teorema 4 *Dacă F este o funcţie raţională cu gradul numărătorului mai mic decât gradul numitorului:*

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

şi Q are rădăcinile $s_1, s_2, ..., s_n$ cu ordinele de multiplicitate $\alpha_1, ..., \alpha_n$ atunci funcţia original f este dată de:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\alpha_k - 1)!} \lim_{s\to s_k} \left((s-s_k)^{\alpha_k} F(s)\, e^{st}\right)^{(\alpha_k - 1)}.$$

Teorema 5 *Dacă* $F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}$ *(pentru $|s| > R$) atunci* $f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k-1)!} t^{k-1}$ *(seria fiind absolut şi uniform convergentă).*

1.3 Aplicaţii

1.3.1 Integrarea unor ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi constanţi

Fie ecuaţia diferenţială liniară neomogenă,cu coeficienţi constanţi:

$$a_n x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t) \tag{2}$$

Ne propunem să determinăm soluţia $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ care verifică condiţiile iniţiale:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_{n-1} \tag{3}$$

Pentru aceasta aplicăm la ecuaţia dată transformata Laplace, şi notăm $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$, $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$. Aplicând proprietăţile (1,6) rezultă ecuaţia operatorială asociată ecuaţiei diferenţiale ((2)) şi condiţiilor iniţiale ((3)):

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k s^k\right) X(s) - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} a_{n-i} s^{n-k-i-1}\right) = F(s) \tag{4}$$

Din această ecuaţie rezultă

$$X(s) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k \left(\sum_{i=0}^{n-k-1} a_{n-i} s^{n-k-i-1}\right)}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} + \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} a_k s^k} F(s)$$

Aplicând la prima fracţie teorema 4 a lui Heaviside iar la a doua fracţie aceeaşi teoremă şi formula convoluţiei (13) obţinem soluţia $x(t)$.

Exemplul 1 *Fie ecuaţia oscilatorului liniar:*

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = f(t) \tag{5}$$

cu condiţiile inţiale:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x_1 \tag{6}$$

Aplicând metoda de mai sus obţinem ecuaţia operatorială:

$$(s^2 + \omega^2)X(s) - sx_0 - x_1 = F(s)$$

de unde:

$$X(s) = \frac{sx_0 + x_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{F(s)}{s^2 + \omega^2}$$

Din tabelul de transformate rezultă:

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} f(t) * \sin \omega t =$$
$$= x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\tau$$

1.3.2 Integrarea unor sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare de ordin întâi cu coeficienţi constanţi

Fie un sistem de ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi scris sub formă matricială:

$$x'(t) = A \cdot x(t) + b(t)$$

unde A este o matrice pătrată de ordin n, $x(t)$ este o matrice coloană formată din funcţiile necunoscute $x_i, i = \overline{1,n}$, $b(t)$ o matrice coloană formată din n funcţii date b_i, $i = \overline{1,n}$. Ne propunem să aflăm soluţia sistemului care verifică condiţiile iniţiale $x_i(0) = x_{i0}$, $i = \overline{1,n}$.(x^0 va fi matricea coloană a condiţiilor iniţiale). Aplicăm şi aci transformata Laplace, şi notând matricea unitate de ordin n cu I_n, transformata Laplace a lui $x(t)$ cu $X(s)$, transformata Laplace a lui b cu B rezultă :

$$sI_n X(s) + x^0 = A \cdot X(s) + B(s)$$

de unde

$$X(s) = (A - sI_n)^{-1} x^0 - (A - sI_n)^{-1} B(s)$$

Pentru a afla soluţia aplicăm transformata Laplace inversă şi ţinem cont de tabelul de transformate, proprietăţile (1-13) şi teoremele lui Heaviside.

1.3.3 Integrarea unor ecuaţii diferenţiale cu coeficienţi variabili

Se aplică metoda dacă ecuaţia diferenţială pentru transformată e mai simplă decât cea iniţială. Exemplu (vezi [1], pag. 183): Să se afle soluţia ecuaţiei $tx"(t) + 2x'(t) = t - 1$, $x(0) = 0$. Aplicând transformata Laplace şi notând $\mathcal{L}\{x(t)\}(s) = X(s)$, pe baza formulelor de derivare a transformatei şi originalului rezultă ecuaţia :

$$s^2 X'(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}.$$

Integrând această ecuaţie rezultă $X(s) = \frac{1}{3s^3} - \frac{1}{2s^2} + C$. Dar din teorema 3 rezultă că $C = 0$, de unde aplicând teorema I a lui Heaviside, $x(t) = \frac{1}{6}t^2 - \frac{1}{2}t$.

1.3.4 Rezolvarea unor ecuaţii integrale şi integro-diferenţiale

1. *Ecuaţii de forma:*

$$Ax(t) + \int_0^t x(t - \tau) g(\tau) d\tau = f(t)$$

unde A, B sunt constante iar f, g sunt funcţii cunoscute. La ecuaţia de mai sus aplicm transformata Laplace şi rezultă ecuaţia

$$AX(s) + BX(s) G(s) = F(s)$$

de unde obtinem transformata $X(s)$, şi aplicând teoremele lui Heaviside obţinem funcţia necunoscută $x(t)$.

2. *Ecuaţii de forma:*
$$Ax'(t) + \int_0^t x(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau = f(t)$$
pentru care ecuaţia care determină transformata este:
$$A(sX(s) - x(0+)) + BX(s)\, G(s) = F(s).$$

1.3.5 Ecuaţii şi ecuaţii diferenţiale cu argument decalat

1. *Ecuaţii de forma*
$$y(t) + Ay(t-1)\, u(t-1) + By(t-2)\, u(t-2) = f(t).$$
Aplcând transformata Laplace şi ţinând cont de translaţiile în complex rezultă:
$$Y(s) + Ae^{-s}Y(s) + Be^{-2s}Y(s) = F(s) \tag{7}$$
Din această formulă rezultă:
$$Y(s) = F(s)\left(\frac{a}{1-ce^{-s}} - \frac{b}{1-de^{-s}}\right) \tag{8}$$
unde a, b, c, d se determină prin identificare[2]*. Dezvoltând fracţiile în serie, privite ca suma unor progresii geometrice, rezultă:*
$$Y(s) = F(s)\left(a\sum_{n=1}^{\infty} c^n e^{-ns} - b\sum_{n=1}^{\infty} d^n e^{-ns}\right).$$
Din formula precedentă rezultă:
$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (ac^n - bd^n)\, f(t-n)\, u(t-n).$$

2. *Ecuaţii de forma*

$$y'(t) + Ay(t-1)\, u(t-1) = f(t).$$
În acest caz raţionamentul este analog cu cel de mai sus, ecuaţia (7) devenind:
$$sY(s) + Ae^{-s}Y(s) = F(s)$$
de unde rezultă $Y(s) = \frac{F(s)}{s}\frac{1}{1-a\frac{e^{-s}}{s}}$. A doua fracţie se dezvoltă ca o progresie geometrică, prima după puterile lui $\frac{1}{s}$ şi rezultă $Y(s) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{s^n}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n \frac{e^{-ns}}{s^n}\right)$, de unde se poate obţine $y(t)$ aplicând teorema II Heaviside şi translaţia în complex.

1.3.6 Calculul unor integrale

1. *Integrale de forma* $\int_0^\infty f(t)\, dt$, $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt$, $\int_0^\infty t^n f(t)\, dt$, $n \in \mathbb{N}$. *La aceste integrale se aplică formulele:*
$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(s)\, ds, \int_0^\infty t^n f(t)\, dt = (-1)^{n+1} F^{(n)}(s)\Big|_0^\infty.$$
2. *La alte tipuri de integrale se poate aplica transformata Laplace introducând un parametru t şi calculând transformata Laplace a funcţiei astfel obţinute, inversând ordinea de integrare. Apoi se determină funcţia original şi dând lui t o valoare convenabilă se obţine valoarea integralei.*

Remarca 2 *Transformata Laplace se poate folosi şi la aflarea soluţiei unor ecuaţii cu derivate parţiale, vezi de exemplu* [2] *pag.656, exemplul 3.4)*

Bibliografie

[1] Borislav Crstici and All. *Matematici Speciale*. Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti, 1981.

[2] Ion Gh. Şabac. *Matematici Speciale*, volume I. Editura Didacica si Pedagogica Bucuresti, 1981.

[2] a, b, c, d se obţin din egalitatea $\frac{1}{1+Az+Bz^2} = \frac{a}{1-cz} - \frac{b}{1-dz}$.