1 Schema de integrare prin cuadraturi[1] a unei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordin I

Fie ecuaţia diferenţială de ordin întâi scrisă sub forma:

$$u\left(x,y\right)dx+v\left(x,y\right)dy=0 \tag{1}$$

sau sub forma:

$$y'=f\left(x,y\right). \tag{2}$$

(Trecerea de la (1) la (2) şi invers se face ţinând cont că $y'=\frac{dy}{dx}$ şi notând $f\left(x,y\right)=-\frac{u(x,y)}{v(x,y)}$.)

Pentru a afla soluţia generală a ecuaţiei (1) se fac următoarele calcule:

1. *Se calculează derivatele parţiale* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *şi* $\frac{\partial v}{\partial x}$.

2. *Se verifică egalitatea:* $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$. *Dacă această egalitate e verificată se trece la pasul următor, dacă nu la pasul 5.*

3. *Se spune că ecuaţia* (1) *este o ecuaţie diferenţială exactă (sau că membrul drept este o diferenţială totală exactă) şi se determină funcţia* U *a cărei diferenţială este mebrul drept al ecuaţiei conform formulei:*
$$U\left(x,y\right)-U\left(x_0,y_0\right)=\int_{x_0}^{x}u\left(t,y\right)dt+\int_{y_0}^{y}v\left(x_0,t\right)dt, \tag{3}$$
unde x_0,y_0 *se aleg astfel încât integralele din formula de mai sus să fie cât mai simplu de calculat.*

4. Se scrie că soluţia generală a ecuaţiei (1) este dată implicit de $U\left(x,y\right)=C$. (unde C este o constantă arbitrară), şi se termină rezolvarea problemei.$\square$

5. *Se verifică dacă ecuaţia* (1) *nu e cu variabile separabile, adică de forma:*
$$a_1\left(x\right)b_1\left(y\right)dx+a_2\left(x\right)b_2\left(y\right)dy=0. \tag{4}$$
În acest caz se împarte ecuaţia (4) *cu* $b_1\left(y\right)a_2\left(x\right)$ *şi devine:*
$$\frac{a_1\left(x\right)}{a_2\left(x\right)}dx+\frac{b_2\left(y\right)}{b_1\left(y\right)}dy=0, \tag{5}$$
care este o ecuaţie diferenţială exactă ($u\left(x,y\right)=\frac{a_1(x)}{a_2(x)},v\left(x,y\right)=\frac{b_2(y)}{b_1(y)}$) *şi se determină funcţia* $U\left(x,y\right)$ *conform formulei:* $U\left(x,y\right)-U\left(x_0,y_0\right)=\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_2(t)}dt+\int_{y_0}^{y}\frac{b_2(t)}{b_1(t)}dt$ *(adică practic se integrează primul termen din* (5) *în raport cu* x *şi cel de al doilea în raport cu* y*) apoi se trece la pasul 4. Dacă ecuaţia nu e de forma* (4)*, se trece la pasul următor:*

6. *Se caută factor integrant functie de* x : *se calculează* $\frac{\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}}{v}$ *şi dacă acest raport este* $f\left(x\right)$ *(depinde numai de* x*) se determină* $\mu\left(x\right)=e^{\int f(x)dx}$ *se înmulţeste ecuaţia* (1) *cu* μ *, se calculează funcţia* U *cu noile funcţii* u,v *şi se trece la pasul 4. În caz că nu există factor integrant funcţie de* x *se trece la pasul următor:*

7. *Se caută factor integrant funcţie de* y : *se calculează* $\frac{\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}}{u}$ *şi dacă acest raport este* $f\left(y\right)$ *(depinde numai de* y*) se determină* $\mu\left(y\right)=e^{\int f(y)dy}$*, se înmulţeste ecuaţia* (1) *cu* μ *, se calculează funcţia* U *cu noile funcţii* u,v *şi se trece la pasul 4. Dacă nu există nici factor integrant funcţie de* y *se trece la pasul următor:*

8. *Se verifică dacă în ecuaţia* (1) *funcţiile* u *şi* v *sunt omogene de acelaşi grad* m[2]. *În acest caz ecuaţia* (2) *este de forma:*
$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{6}$$
şi prin schimbarea de funcţie $z(x)=\frac{y(x)}{x}$ *(* $y=zx$, $y'=z'x+z$ *sau* $dy=xdz+zdx$ *dacă se foloseşte forma* (1)*) ecuaţia* (6) *devine o ecuaţie cu variabile separabile în* x,z *(* $y=zx$, $y'=z'x+z$ *sau* $dy=xdz+zdx$ *dacă se foloseşte forma* (1)*) şi se fac calculele ca la pasul 5, înlocuind în final* z *cu* $\frac{y}{x}$. *În caz că ecuaţia nu este de forma* (6) *se trece la pasul următor:*

9. *Se verifică dacă ecuaţia nu este de forma (omogenă generalizată):*
$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right), \tag{7}$$
şi în acest caz , dacă $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ *se face schimbarea de funcţie şi de variabilă* $y=z+y_0,x=t+x_0$ *(* x_0,y_0 *sunt soluţile sistemului* $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ *) obţinând o ecuaţie de tip* (6) *în* t,z *şi continuând calculele ca la 8, înlocuind în final* z *cu* $y-y_0$ *şi* t *cu* $x-x_0$*, iar dacă* $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=0$ *cu schimbarea de funcţie* $a_1x+b_1y+c_1=z$ *se obţine o ecuaţie cu variabile separabile în* z,x*, comtinuând calculele ca la pasul 5. Dacă ecuaţia nu este nici de această formă se trece la pasul următor:*

[1] adică aflarea soluţiei generale folosind calculul primitivelor.

[2] o funcţie u este omogenă de grad m dacă: $u\left(tx,ty\right)=t^m u\left(x,y\right)$ pentru orice $t\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left(x,y\right)$ şi $\left(tx,ty\right)$ sunt din domeniul de definiţie a funcţiei u.

10. *Se verifică dacă ecuaţia* (2) *se poate pune sub forma:*
$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{8}$$
(adică ecuaţia este o ecuaţie diferenţială liniară de ordin I *, omogenă dacă* $q(x) \equiv 0$*, neomogenă în caz contrar).* Soluţia generală este dată de: $y(x) = Ce^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)\,e^{\int p(x)dx}dx$ (luând o singură primitivă pentru fiecare semn de $\int$)$\square$. *Dacă ecuaţia nu e de forma* (8) *atunci:*

11. *Se verifică dacă ecuaţia* (2) *nu e de forma:*
$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha} \tag{9}$$
cu $\alpha \neq 0, 1$ *(*Bernoulli*) şi în acest caz se împarte ecuaţia* (9) *cu* $y^{-\alpha}$ *şi cu schimbarea de funcţie* $z = y^{1-\alpha}$ *(*$z' = (1-\alpha)\frac{y'}{y^{\alpha}}$*) se obţine o ecuaţie liniară în funcţia* z *care se rezolvă conform pasului 10, făcând apoi în rezultat schimbarea inversă* $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$. *Dacă ecuaţia nu e nici de forma* (9) *atunci:*

12. *Se verifică dacă ecuaţia nu e de forma* Riccati:
$$y' = p(x)\,y^2 + q(x)\,y + r(x) \tag{10}$$
şi în acest caz se mai verifică dacă nu se observă (sau se dă) o suluţie particulară y_1. *Cu schimbarea de funcţie* $y = y_1 + \frac{1}{z}$ *ecuaţia* (10) *devine o ecuaţie liniară în* z, x *se rezolvă ca la 10 şi se ţine cont de substituţia făcută. Dacă ecuaţia nu e nici de această formă atunci se trece la pasul următor:*

13. *Se verifică dacă ecuaţia nu se poate pune sub forma (Clairaut):*
$$y = xy' + \phi(y') \tag{11}$$
Dacă ecuaţia e de forma de mai sus atunci soluţia generală este dată de:
$$y = Cx + \phi(C)$$
iar soluţia singulară este dată parametric de:
$$\begin{cases} x = -\phi'(p) \\ y = -p\phi'(p) + \phi(p) \end{cases}.$$
Dacă ecuaţia nu e de forma Clairaut (11) *atunci:*

14. *Se verifică dacă nu e de tip Lagrange:*
$$y = x\phi(y') + \psi(y') \tag{12}$$
(cu $\phi(y') \neq y'$ *) şi acest caz se face schimbarea de funcţie* $y' = p(x)$ *în* (12)*. Prin derivare se obţine ecuaţia:*
$$p = \phi(p) + x\phi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}$$
care e echivalentă cu:
$$\frac{dx}{dp} + \frac{x\phi'(p)}{\phi(p) - p} = \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}$$
ecuaţie de forma (8) *cu* x *funcţie necunoscută şi* p *variabilă independentă. Soluţia generală va fi de forma* $x(p) = Cf(p) + g(p)$ *(vezi 10.) iar soluţia generală a* (12) *va fi dată parametric:*
$$\begin{cases} x(p) = Cf(p) + g(p) \\ y = (Cf(p) + g(p))\,\phi(p) + \psi(p) \end{cases}.$$
Ecuaţia mai poate admite soluţii singulare de forma $y = p_1 x + \psi(p_1)$ *unde* p_1 *este soluţie pentru ecuaţia:*
$$p_1 = \phi(p_1).$$

15. Dacă nu s-a greşit nici un calcul, înseamnă că ecuaţia nu se poate integra cu metodele de la curs, dar poţi să mai încerci alte metode.$\blacksquare$