Sisteme de ecuaţii diferenţiale

A. U. Thor

0.1 Sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare

Definitia 1.1 *Se numeşte sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare sub formă normală sistemul:*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1\left(x, y_1, ..., y_n\right) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n\left(x, y_1, ..., y_n\right) \end{aligned} \tag{SFN}$$

unde funcţiile necunoscute sunt $y_1, ..., y_n$ iar x este variabila acestor funcţii.

Remarca 1.1 *Orice ecuaţie diferenţială de ordin superior sau un sistem în care apar derivate de ordin superior sunt echivalente cu un sistem sub formă normală, prin introducerea unor noi funcţii (derivatele de ordine mai mici ca cel maxim ale funcţiilor necunoscute), ca în următorul exemplu :*

Exemplul 1.1 *Ecuaţia* $y'' + \omega^2 y = 0$ *este echivalentă cu sistemul (notând* $y_1 = y$, $y_2 = y'$ *)*

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -\omega^2 y_1$$

Remarca 1.2 *Un sistem sub formă normală este echivalent cu o ecuaţie diferenţială de ordin superior, obţinută prin derivări succesive ale unei ecuaţii , înlocuirea derivatelor funcţiilor care apar în partea dreaptă cu expresia lor din celelalte ecuaţii şi eliminarea celorlalte funcţii din expresiile obţinute pentru derivatele funcţiei alese.*

Exemplul 1.2

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = -\omega^2 y_1$$

Derivând prima ec. avem:

$$y_1'' = y_2' = - - \omega^2 y_1$$

adică:

$$y_1'' = -\omega^2 y_1$$

Exemplul 1.3

$$y_1' = y_2 - 2y_1$$
$$y_2' = 3y_2 - 4y_1$$

Definitia 1.2 *Se numeşte problemă Cauchy pentru sistemul* (SFN) *aflarea funcţiilor* $y_1, ..., y_n$ *(definite pe un interval care conţine punctul* x_0 *) care verifică sistemul şi condiţiile iniţiale:*

$$y_1(x_0) = y_{10}, ..., y_n(x_0) = y_{n0}. \tag{CI}$$

Definitia 1.3 *Se numeşte soluţia generală a sistemului (SFN) o mulţime de* n *funcţii* $(y_1, ..., y_n)$ *care este soluţie pentru sistem şi depinde de* n *constante arbitrare:*

$$\begin{cases} y_1 = \phi_1(x, C_1, ..., C_n) \\ \cdots \\ y_n = \phi_n(x, C_1, ..., C_n) \end{cases} \tag{SG}$$

Exemplul 1.1 $\begin{matrix} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\omega^2 y_1 \end{matrix}$ *soluţia generală:*

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x) \\ y_2 &= -C_1 \omega \sin(\omega x) + C_2 \omega \cos(\omega x) \end{aligned}$$

Dacă vrem să rezolvăm p.C. $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$ *din s. gen. punând* $x = 0$ *rezultă:*

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 \\ 0 &= C_2 \end{aligned}$$

deci sol. va fi

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \cos(\omega x) \\ y_2(x) &= -\omega \sin(\omega x) \end{aligned}$$

0.1.1 Sisteme simetrice

Dacă în (SFN) $y_1' = \frac{dy_1}{dx}, ..., y_n' = \frac{dy_n}{dx}$ obtinem:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1, ..., \frac{dy_n}{dx} = f_n$$

echivalent cu:

$$\frac{dy_1}{f_1} = ... = \frac{dy_n}{f_n} = \frac{dx}{1}$$

notând y_1 cu $x_1, ..., y_n$ cu x_n şi x cu x_{n+1} şi numitorii cu $X_1, .., X_n, X_{n+1}$ rezultă:

$$\frac{dx_1}{X_1} = ... = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}} \tag{SFM}$$

care se numeşte sistem de ec. dif. sub formă simetrică. (n ecuaţii).

Exemplul 1.4

(0.1.1)

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$$

care este echivalent cu sist. sub formă normală:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2yz}{2xz} \\ z' &= \frac{dz}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 - y^2}{2xz} \end{aligned}$$

Definitia 1.4 *Se numeşte integrală primă pentru sistemul(SFM) o funcţie F de variabilele $(x_1, ..., x_{n+1})$ care nu e constantă, dar are o valoare constantă dacă $(x_1, ..., x_{n+1})$ e soluţie pentru sistem.*

Exemplul 1.5 *Pt (0.1.1) o integrală primă este*

$$F(x, y, z) = \frac{y}{x}$$

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= C \\ \frac{y}{x} &= C, y = Cx \\ dy &= Cdx \\ \frac{dx}{2xz} &= \frac{Cdx}{2Cxz} \end{aligned}$$

Teorema 1.1 *Dacă există funcţiile $\phi_1, ..., \phi_{n+1}$ şi o funcţie F astfel încât*

$$\begin{aligned} dF &= \phi_1 dx_1 + ... + \phi_{n+1} dx_{n+1} \\ \phi_1 X_1 + ... + \phi_{n+1} X_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

atunci F este o integrală primă pentru sistemul (SFM).

Demonstraţie:

$$\frac{dx_1}{X_1} = ... = \frac{dx_{n+1}}{X_{n+1}} = \frac{\phi_1 dx_1 + ... + \phi_{n+1} dx_{n+1}}{\phi_1 X_1 + ... + \phi_{n+1} X_{n+1}} = \frac{dF}{0}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} dF &= 0 \\ F &= C. \end{aligned}$$

Exemplul 1.6

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$$

$$\phi_1 = -\frac{1}{x}, \phi_2 = \frac{1}{y}, \phi_3 = 0$$

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2} = \frac{-\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + 0}{-2z + 2z + 0} \overset{SOC}{=} \frac{d\left(\ln y - \ln x\right)}{0}$$

$$F\left(x, y, z\right) = \ln \frac{y}{x}$$

sau

$$F\left(x, y, z\right) = \frac{y}{x}$$

Teorema 1.2 *Există n integrale prime funcţional independente.(Dacă avem $n+1$ in-*

tegrale prime $F_1, .., F_{n+1}$ atunci există o funcţie Φ astfel încât

$$\Phi\left(F_1, .., F_{n+1}\right) == 0$$

Teorema 1.3 *Dacă F este integrală primă atunci pentru orice funcţie Φ, $\Phi\left(F\right)$ este integrală primă.*

Exemplul 1.7

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2}.$$

O integrală primă este $F_1\left(x, y, z\right) = \frac{y}{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{2xz} &= \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2} = \frac{-xdx + ydy + 2zdz}{-2x^2z + 2y^2z + 2x^2z - 2y^2z} \overset{SOC}{=} \\ &= \frac{d\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2\right)}{0} \end{aligned}$$

a doua int. primă va fi $F_2\left(x, y, z\right) = 2z^2 - x^2 + y^2$. Soluţia generală

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_1 \\ 2z^2 - x^2 + y^2 &= C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= C_1 x \\ 2z^2 &= C_2 + x^2 - C_1^2 x^2 \end{aligned}$$

Exemplul 1.8 *Legea căderii liberii în câmp gravitaţional:*

$$mx'' = mg$$

înmulţind ambii membri cu x' rezultă:

$$mx''x' = mgx'$$

integrând:

$$m\frac{x'^2}{2} - mgx = C$$

sau cu notaţiile uzuale din fizică:

$$\begin{aligned} E &= m\frac{v^2}{2} - mgh = C \\ E &= E_c + E_p \end{aligned}$$

(E este o int. primă).

0.2 Ecuaţii cu derivate parţiale de ordin I liniare şi cvasiliniare

Definitia 2.1 *Se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale de ordin I liniară :*

$$X_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+X_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \tag{EDPL}$$

unde $X_i = X_i\left(x_1,...,x_n\right)$, *iar* u *este funcţia nec.*

Definitia 2.2 *Se numeşte sistem caracteristic ataşat (EDPL) sistemul:*

$$\frac{dx_1}{X_1}=...=\frac{dx_n}{X_n} \tag{SC}$$

Teorema 2.1 *Dacă* u *este int. primă pt. (SC) atunci* u *este soluţie pt. (EDPL) şi reciproc.*

Exemplul 2.1

$$2xz\frac{\partial u}{\partial x}+2yz\frac{\partial u}{\partial y}+\left(x^2-y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} \;=\; 0$$

$$\frac{dx}{2xz} \;=\; \frac{dy}{2yz}=\frac{dz}{x^2-y^2}$$

Int. prime pt. sist.: $F_1\left(x,y,z\right)=\frac{y}{x}, F_2\left(x,y,z\right)=2z^2-x^2+y^2.u=F_1$,$u=F_2$ *sunt sol. pt. ec. cu der. partiale. Sol. generală va fi* $u=\Phi\left(F_1,F_2\right)$, *unde* Φ *este o funcţie de 2 var. arbitrară.*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}.\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}.\frac{\partial F_2}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + (-2x)\frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\,|\cdot 2xz$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}.\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}.\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + (2y)\frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\,|\cdot 2yz$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}.\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}.\frac{\partial F_2}{\partial z} = 0.\frac{\partial \Phi}{\partial F_1} + (4z)\frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\,|\cdot x^2 - y^2$$

$$2xz\frac{\partial u}{\partial x} + 2yz\frac{\partial u}{\partial y} + \left(x^2 - y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\left(\frac{-2yz}{x} + \frac{2yz}{x}\right) +$$
$$+\frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\left(-4x^2 z + 4y^2 z + 4zx^2 - 4zy^2\right) = 0$$

Corolarul 2.1 *Dacă $F_1, ..., F_{n-1}$ sunt integrale prime independente atunci soluţia generală a EDPL este:*

$$u = \Phi\left(F_1, ..., F_{n-1}\right)$$

unde Φ este o funcţie arbitrară de $n-1$ variabile.

Remarca 2.1 *Soluţia generală a sist. simetric (sc) este ($F_1, ..., F_{n-1}$ sunt integrale* *prime independente):*

$$F_1 = C_1$$
$$\ldots$$
$$F_{n-1} = C_{n-1}$$

unde $C_1, ...C_{n-1}$ *sunt constante arbitrare, iar soluţia soluţia generală a EDPL este:*

$$u = \Phi\left(F_1, ..., F_{n-1}\right)$$

unde Φ *este o funcţie arbitrară de* $n-1$ *variabile.*

Definitia 2.3 *Se numeşte problemă Cauchy pt EDPL determinarea soluţiei care verifică:*

$$u\left(x_{10}\right) = \phi\left(x_2, .., x_n\right)$$

unde ϕ *este dată.*

Remarca 2.2 *Determinarea funcţiei* Φ *din sol. gen. pt pC se face ca la generări de* *suprafeţe:*

$$\begin{aligned} F_1 &= C_1 \\ &... \\ F_{n-1} &= C_{n-1} \\ u &= \phi(x_2, .., x_n) \\ x_1 &= x_{10} \end{aligned}$$

elimininăm $x_1, ..., x_n$ *şi obţinem o relaţie de forma* $H(F_1, ..., F_{n-1}, u) = 0$ *sau* $u = \Phi(F_1, ..., F_{n-1})$.

Exemplul 2.2 $2xz\frac{\partial u}{\partial x} + 2yz\frac{\partial u}{\partial y} + (x^2 - y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, x = 1\ u = y + z^2.$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_1 \\ 2z^2 - x^2 + y^2 &= C_2 \\ x &= 1 \\ u &= y + z^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x &= 1 \\
y &= C_1 \\
z^2 &= \frac{C_2 + 1 - C_1^2}{2} \\
u &= C_1 + \frac{C_2 + 1 - C_1^2}{2} = \\
&= \frac{y}{x} + \frac{2z^2 - x^2 + y^2 + 1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2}
\end{aligned}
$$

Definitia 2.4 *Se numeşte ecuaţie cu derivate parţiale de ordin I cvasiliniară :*

$$
X_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = X_{n+1} \qquad \text{(EDPcL)}
$$

unde $X_i = X_i\left(x_1, \ldots, x_n, u\right)$, *iar* u *este funcţia nec.*

Definitia 2.5 *Se numeşte sistem caracteristic ataşat (EDPcL) sistemul:*

$$
\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{du}{X_{n+1}} \qquad \text{(SCq)}
$$

Teorema 2.2 *Dacă* u *este int. primă pt. (SCq) atunci* u *este soluţie pt. (EDPcL) şi reciproc.*

Teorema 2.3 *Soluţia generală a (EDPcL) este dată implicit sub forma:*

$$\Phi\left(F_1, ..., F_n\right) = 0$$

unde Φ *este o funcţie de* n *var. arbitrară.*

Exemplul 2.3

$$2xz\frac{\partial z}{\partial x} + 2yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - y^2$$

Sist. car.:

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{x^2 - y^2}$$

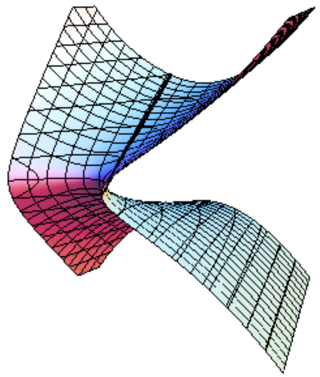
care are int. prime $F_1\left(x, y, z\right) = \frac{y}{x}$, $F_2\left(x, y, z\right) = 2z^2 - x^2 + y^2$. *Soluţia generală:*

$$\begin{aligned} \Phi\left(\frac{y}{x}, 2z^2 - x^2 + y^2\right) &= 0 \\ 2z^2 - x^2 + y^2 &= \phi\left(\frac{y}{x}\right) \\ z^2 &= \frac{x^2 - y^2}{2} + \phi\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

probl. Cauchy: $x = 1, z = y$.

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= C_1 \\ 2z^2 - x^2 + y^2 &= C_2 \\ x &= 1 \\ z &= y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1, y = C_1, z = C_1 \\ 2C_1^2 - 1 + C_1^2 &= C_2 \\ 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1 &= 2z^2 - x^2 + y^2 \end{aligned}$$



Exemplul 2.4 *Să se rezolve sistemul:*

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2y} = \frac{dz}{z\left(x^2+y^2\right)}$$

$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2y} \Leftrightarrow 2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = C_1.$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{xy^2} &= \frac{\mathrm{d}y}{x^2y} = \frac{dz}{z\left(x^2+y^2\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}-\frac{dz}{z}}{y^2+x^2-\left(x^2+y^2\right)}\\ &\Leftrightarrow \ln x+\ln y-\ln z=\ln C_2\\ \frac{xy}{z} &= C_2\end{aligned}$$

soluţia gen. a sistemului:

$$x^2-y^2=C_1, \frac{xy}{z}=C_2$$

Exemplul 2.5 *Să se rezolve ecuaţia:*

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x}+x^2y\frac{\partial u}{\partial y}+z\left(x^2+y^2\right)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

sol. gen.

$$u=\Phi\left(x^2-y^2,\frac{xy}{z}\right),$$

unde Φ *este o funcţie arbitrară.*

Exemplul 2.6 *Să se rezolve ecuaţia:*

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x}+x^2y\frac{\partial z}{\partial y}=z\left(x^2+y^2\right)$$

sol. gen.

$$\begin{aligned}\Phi\left(x^2-y^2,\frac{xy}{z}\right) &= 0\\ z &= xy\phi\left(x^2-y^2\right)\end{aligned}$$

p.C.: $x = 1$ $z = y^3$. $z = -xy\left(x^2 - y^2\right)$