



SCURT CURS DE ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ

ținut de

**Octavian Mircia Gurzău**

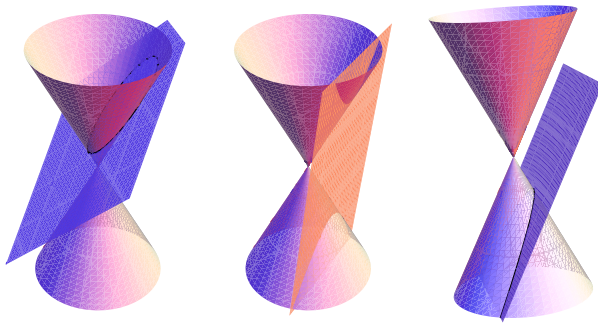
|                                                                               |           |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1 Geometrie analitică plană</b>                                            | <b>5</b>  |
| 1.1 Conice                                                                    | 5         |
| Ecuația tangentei la elipsă într-un punct de pe elipsă:                       | 7         |
| Proprietăți optice                                                            | 8         |
| 1.2 Cercul                                                                    | 8         |
| 1.3 Dreapta                                                                   | 8         |
| <b>2 Algebră liniară I</b>                                                    | <b>10</b> |
| 2.1 Recapitulare cunoștințe de algebră din clasa XI-a                         | 10        |
| 2.1.1 Algoritmul lui Gauss                                                    | 13        |
| <b>3 Geometrie analitică</b>                                                  | <b>17</b> |
| 3.1 Vectori                                                                   | 17        |
| 3.1.1 Definirea noțiunii de vector                                            | 17        |
| 3.1.2 Operații cu vectori                                                     | 19        |
| Suma a doi vectori și înmulțirea unui vector cu un scalar                     | 19        |
| Produse de doi vectori                                                        | 23        |
| Produse de trei vectori                                                       | 25        |
| 3.2 Baricentru                                                                | 27        |
| 3.3 Bază, coordonate, exprimarea operațiilor cu vectori folosind coordonatele | 29        |
| 3.3.1 Bază și coordonate                                                      | 29        |
| Exprimarea operațiilor cu vectori folosind coordonatele                       | 31        |
| 3.4 Geometria analitică liniară în spațiu                                     | 33        |
| 3.4.1 Planul în spațiu                                                        | 34        |
| Diferite determinări ale planului                                             | 34        |
| Plan determinat de un punct și un vector perpendicular pe plan                | 34        |
| Plan determinat de un punct și doi vectori necoliniari paraleli cu planul     | 35        |
| Plan determinat de trei puncte necoliniare                                    | 36        |
| Poziția relativă a două plane, unghiul a două plane                           | 36        |
| Distanța de la un punct la un plan                                            | 37        |
| Ecuația normală a unui plan (Hesse)                                           | 38        |
| 3.4.2 Dreapta în spațiu                                                       | 39        |
| Dreapta determinată de un punct și un vector paralel cu ea                    | 39        |
| Dreapta ca intersecție de două plane neparalele                               | 40        |
| Distanța de la un punct la o dreaptă                                          | 41        |
| Poziția relativă a trei plane                                                 | 42        |
| Fascicol de plane                                                             | 44        |
| Unghiul dintre o dreaptă și un plan                                           | 45        |
| Poziția relativă a două drepte în spațiu                                      | 45        |
| Perpendiculara comună a două drepte în spațiu                                 | 46        |
| 3.5 Sfera                                                                     | 49        |
| 3.6 Cuadrice pe ecuații reduse                                                | 51        |
| 3.6.1 Elipsoid                                                                | 51        |
| 3.6.2 Hiperboloidul cu o pânză                                                | 53        |
| 3.6.3 Hiperboloidul cu două pânze                                             | 53        |
| 3.6.4 Paraboloidul eliptic                                                    | 55        |
| 3.6.5 Paraboloidul hiperbolic (șa)                                            | 56        |
| 3.6.6 Generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză                  | 57        |

|          |                                                                 |            |
|----------|-----------------------------------------------------------------|------------|
| 3.6.7    | Generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic (șa)      | 58         |
| 3.6.8    | Noțiuni generale de curbe și suprafețe                          | 60         |
| 3.6.9    | Suprafețe cilindrice                                            | 61         |
| 3.6.10   | Suprafețe conice                                                | 64         |
| 3.6.11   | Suprafețe conoide                                               | 66         |
| 3.6.12   | Suprafețe de rotație                                            | 67         |
| <b>4</b> | <b>Geometrie diferențială</b>                                   | <b>71</b>  |
| 4.1      | Noțiuni preliminare                                             | 71         |
| 4.2      | Geometria diferențială a curbelor plane                         | 72         |
| 4.2.1    | Curbe plane: noțiuni generale, exemple                          | 72         |
| 4.2.2    | Câteva exemple de curbe plane                                   | 73         |
| 4.2.3    | Tangenta și normala la o curbă plană                            | 75         |
| 4.2.4    | Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe    | 77         |
| 4.2.5    | Curbura unei curbe plane, ecuația intrinsecă a unei curbe plane | 79         |
| 4.2.6    | Înfășurătoarea unei familii de curbe plane                      | 82         |
| 4.3      | Geometria diferențială a curbelor în spațiu                     | 83         |
| 4.3.1    | Generalități curbe în spațiu (strâmbe)                          | 83         |
| 4.3.2    | Tangenta și planul normal la o curbă în spațiu                  | 85         |
| 4.3.3    | Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe    | 86         |
| 4.3.4    | Reperul și formulele lui Frénet                                 | 87         |
| 4.3.5    | Triedrul lui Frenet                                             | 89         |
| 4.3.6    | Calculul curburii și torsiunii                                  | 92         |
| 4.4      | Geometria diferențială a suprafețelor                           | 93         |
| 4.4.1    | Generalități                                                    | 93         |
| 4.4.2    | Plan tangent și normala la o suprafață                          | 95         |
| 4.4.3    | Lungimea unei curbe pe o suprafață                              | 97         |
| 4.4.4    | Unghiul a două curbe situate pe o suprafață                     | 100        |
| 4.4.5    | Elementul de arie al unei suprafețe                             | 100        |
|          | <b>Bibliografie</b>                                             | <b>104</b> |

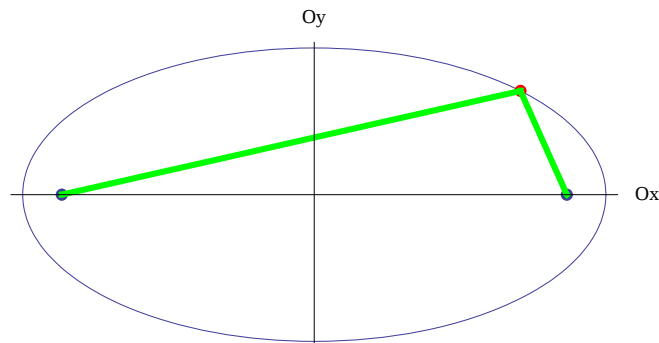
# Capitolul 1

## Geometrie analitică plană

### 1.1 Conice



Definiție: Se numește elipsă locul geometric al punctelor din plan pt. care suma distanțelor la doua puncte fixe numite focare este constantă.



Notăm focarele cu  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  și punctul de pe elipsă cu  $M(x, y)$ . Cf. def.:

$$MF_1 + MF_2 = 2a > 2c$$

adică:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\ \left( \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \right)^2 &= \left( 2a - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right)^2 \\ (x+c)^2 + (y-0)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + (x-c)^2 + (y-0)^2 \\ &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} + (x-c)^2 + (y-0)^2 \end{aligned}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} 2cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} - 2cx \\ cx - a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2y^2 \\ (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 &= a^2c^2 - a^4 \end{aligned}$$

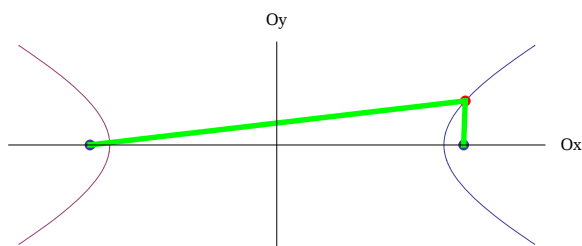
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1.1)$$

unde  $b^2 = a^2 - c^2$ .

Obs. Se pot folosi și ecuațiile parametrice ale elipsei:

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi].$$

**Definiție:** Se numește **hiperbolă** locul geometric al punctelor din plan pt. care valoarea absolută a diferenței distanțelor la doua puncte fixe numite focare este constantă.



Notăm focarele cu  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$  și punctul de pe hiperbolă cu  $M(x, y)$ . Cf. def.:

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

unde  $a < c$ .

Făcând calculele rezultă:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1.1.2)$$

unde  $b^2 = c^2 - a^2$ .

Obs.: se pot folosi și ec. parametrice ale hiperbolei:

$$\begin{cases} x = \pm a \cosh t \\ y = b \sinh t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

unde

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \text{ch } t$$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \text{sh } t$$

relația de bază:

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \text{ pentru } \forall t \in \mathbb{R}$$

**Remarca 1.1.1** Graficul funcției ch se numește lăntisorul.

**Definiție:** Se numește **parabolă** locul geometric al punctelor din plan pt. care distanțele la un punct fix numit focar și o dreaptă fixă numită directoare sunt egale.

Fie focarul  $F(p/2, 0)$  și directoarea de ecuație  $x = -p/2$  iar  $M(x, y)$  un punct pe parabolă, Cond. din def. se scrie:

$$(x - p/2)^2 + y^2 = (x + p/2)^2$$

rezultă ec. parabolei:

$$y^2 = 2px \quad (1.1.3)$$

Obs. Conicele se pot defini unitar:

**Definiție:** Se numește **conica** o curba pentru care raportul distantelor de la un punct de pe curba la un punct fix numit focar și o dreaptă fixă numită directoare este constant  $e$ . ( $e$  este excentricitatea conicei).

### Ecuția tangentei la elipsă într-un punct de pe elipsă:

Fie elipsa:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

și un punct  $M_0(x_0, y_0)$  pe elipsă, adică:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \quad (1.1.4)$$

Se știe că tangenta la elipsă este o dreaptă care intersectează elipsa într-un singur punct (două puncte confundate).

Ec. unei drepte care trece prin  $M_0$  este:

$$y - y_0 = m(x - x_0). \quad (1.1.5)$$

intersectând cu elipsa:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y_0 + m(x - x_0))^2}{b^2} &= 1 \\ b^2 x^2 + a^2 (y_0^2 + 2m y_0 (x - x_0) + m^2 (x - x_0)^2) - a^2 b^2 &= 0 \\ (a^2 m^2 + b^2) x^2 + a^2 (2m y_0 - 2m^2 x_0) x + (a^2 (m^2 x_0^2 - 2m x_0 y_0 + y_0^2) - a^2 b^2) &= 0 \\ \text{ec. e de forma } Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ are sol. unică dacă } B^2 - 4AC &= 0. \\ A = (a^2 m^2 + b^2); B = 2a^2 m (y_0 - m x_0) \\ C = a^2 (m^2 x_0^2 - 2m x_0 y_0 + y_0^2 - b^2). \end{aligned}$$

Deoarece  $B$  are factor comun pe 2 calculăm discriminantul ecuației cu formula redusă:  $\Delta' = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC$ ,

$$\begin{aligned} \Delta' &= a^4 m^2 (y_0 - m x_0)^2 - a^2 (a^2 m^2 + b^2) (m^2 x_0^2 - 2m x_0 y_0 + y_0^2 - b^2) = \\ &= a^2 \left( \overbrace{a^2 m^2 y_0^2 - 2a^2 m^3 y_0 x_0 + a^2 m^4 x_0^2} - \overbrace{a^2 m^4 x_0^2 + 2m^3 a^2 x_0 y_0 -} \right. \\ &\quad \left. - \overbrace{a^2 m^2 y_0^2 + a^2 m^2 b^2 - b^2 m^2 x_0^2 + 2mb^2 x_0 y_0 - b^2 y_0^2 + b^4} \right) = \\ &= a^2 b^2 ((a^2 - x_0^2) m^2 + 2m x_0 y_0 + b^2 - y_0^2). \end{aligned}$$

Punând condiția ca ecuația  $\Delta' = 0$  rezultă:

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{-x_0 y_0 \pm \sqrt{x_0^2 y_0^2 - (a^2 - x_0^2)(b^2 - y_0^2)}}{a^2 - x_0^2} = \\ &= \frac{-x_0 y_0 \pm \sqrt{x_0^2 y_0^2 - a^2 b^2 + a^2 y_0^2 + b^2 x_0^2 - x_0^2 y_0^2}}{a^2 - x_0^2} \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Dar din ecuația (1.1.4) rezultă.  $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$  care înlocuită în (1.1.6) dă:

$$m_{1,2} = \frac{-x_0 y_0}{a^2 - x_0^2} = -\frac{x_0 y_0}{a^2 \frac{y_0^2}{b^2}} = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Înlocuind valoarea lui  $m$  în ecuația dreptei (1.1.5) rezultă ecuația tangentei:

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$$

sau ținând cont de faptul că  $M_0$  este pe elipsă, deci coordonatele sale verifică ecuația (1.1.4) rezultă ecuația tangentei la elipsă într-un punct  $M_0$  de pe elipsă:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.$$

Analog se obține ecuația tangentei la hiperbola de ecuație (1.1.2) într-un punct de coordonate  $(x_0, y_0)$

de pe hiperbolă:

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1,$$

iar ec. tangentei la parabolă într-un punct de pe parabolă:

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

### Proprietăți optice

Parabolă: o rază de lumină paralelă cu axa parabolei, după reflexie ajunge în focar.

Elipsă: o rază de lumină care pleacă dintr-un focar, după reflexie ajunge în celălalt focar.

## 1.2 Cercul

Ecuția cercului de centru  $C(a, b)$  și rază  $R$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Ec. generală:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + mx + ny + p &= 0 \\ \left(x + \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{n}{2}\right)^2 &= -p + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} \end{aligned}$$

centrul și raza:

$$C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}\right), R^2 = -p + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} > 0$$

Ecuțiile parametrice:

$$\begin{aligned} x &= a + R \cos t \\ y &= b + R \sin t \end{aligned}$$

Ecuția tangentei la cerc într-un punct de pe cerc:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) = R^2$$

## 1.3 Dreapta

Ecuțiile parametrice:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + pt \\ y &= y_0 + qt \end{aligned}$$

$t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{x - x_0}{p} &= \frac{y - y_0}{q} \\ y - y_0 &= m(x - x_0), m = \frac{q}{p} \end{aligned}$$

Ecuția dreptei care trece prin  $M_1(x_1, y_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2)$ :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$
$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

Ecuția generală a unei drepte în plan:

$$ax + by + c = 0$$

# Capitolul 2

## Algebră liniară I

## 2.1 Recapitulare cunoștințe de algebră din clasa XI-a

În clasa a XI s-a studiat la algebră problema existenței soluției<sup>1</sup> și calculării soluției sistemelor liniare<sup>2</sup> (adică sisteme care conțin doar ecuații de grad întâi) de forma:

$$AX = B, \quad (2.1.1)$$

unde  $A$  este o matrice cu  $m$  linii și  $n$  coloane (conform notațiilor de la începutul cursului:  $A = [a_{ij}]_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}_{m,n}$ ),  $X$  o matrice cu  $n$  linii și o coloană ( $X = [x_i]_{i=\overline{1,n}} \in \mathfrak{M}_{n,1}$ ), iar  $B$  este o matrice cu  $m$  linii și o coloană. ( $B = [b_j]_{j=\overline{1,m}} \in \mathfrak{M}_{m,1}$ ). Se știe că folosind operațiile cu matrice sistemul 4.2.10 este scrisă prescurtată pentru sistemul (vezi notațiile de la începutul cursului):

[illegible]

Pentru a da răspuns la cele două probleme s-a introdus în clasa XI-a noțiunea de determinant a unei matrici pătratică de ordin  $n$ . Reamintim aci această definiție:

**Definitia 2.1.1** Se numește determinantul matricei  $A \in \mathfrak{M}_n$  un număr real notat cu  $\det(A)$  (sau  $|a_{ij}|_{i,j=1,n}$ ) dat de formula:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \quad (2.1.3)$$

unde prin  $S_n$  s-a notat mulțimea tuturor permutărilor mulțimii  $\{1, 2, \dots, n\}^3$ , iar prin  $\text{sgn}(\sigma)$  semnul permutării  $\sigma$ . (vezi [1]).

**Remarca 2.1.1** Calculul unui determinant nu se face cu formula 2.1.3 decât pentru  $n = 2$  ( $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ ) sau  $n = 3$  (regula lui Sarrus sau regula triunghiului), pentru  $n > 3$  calculul determinantilor făcându-se prin utilizarea proprietăților lor (dezvoltarea după elementele unei linii (coloane), adunarea elementelor unei linii (coloane) înmulțite cu un număr la elementele corespunzătoare altei linii (coloane) în scopul obținerii de cât mai multe elemente nule,...).

Fie  $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$ .

**Definiția 2.1.2** Se numește *minor de ordin  $k$*  ( $k \leq \min \{m, n\}$ ) al matricei  $A$  *determinantul unei matrice pătrate de ordin  $k$  obținute din matricea  $A$  alegând elementele din  $k$  linii  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  dintre liniile matricei  $A$  și din  $k$  coloane  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  dintre coloanele matricei  $A$ .*

<sup>1</sup> adică există, pentru matricele  $A$  și  $B$  date, o matrice  $X$  care verifică 4.2.10.

<sup>2</sup> cum se pot alege toate matricele  $X$  care verifică sistemul 4.2.10 (adică toate soluțiile).

<sup>3</sup> adică toate funcțiile bijective  $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Remarca 2.1.2** Un minor de ordin  $k$  al matricei  $A$  este deci de forma:

$$\begin{vmatrix} a_{i_p j_q} \end{vmatrix}_{p,q=\overline{1,k}}, \quad (2.1.4)$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq m, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n$$

Cu ajutorul noțiunii de minor de ordin  $k$  al unei matrice  $A$  se definește în [1] noțiunea de rang al unei matrice:

**Definitia 2.1.3** Se numește rang al unei matrice  $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$  un număr natural  $k$  (notat  $\text{rang}(A)$ ) cu proprietățile:

- 1) există un minor de ordin  $k$  al matricei  $A$  nenul;
- 2) toți minorii de ordin mai mare decât  $k$  ai matricei  $A$  sunt nuli.

Dacă notăm cu  $\bar{A}$  matricea extinsă a sistemului 4.2.10 (adică matricea formată din adăugarea la matricea  $A$  a unei coloane formate din elementele matricei  $B$ ) atunci problema existenței soluției sistemului 4.2.10 este dată de următoarea teoremă:

**Teorema 2.1.1 (Kronecker-Capeli)** Sistemul 4.2.10 este compatibil<sup>4</sup> dacă și numai dacă rangul matricei  $A$  este egal cu rangul matricei  $\bar{A}$ .

Pentru rezolvarea sistemelor liniare e necesar să se introducă noțiunea de inversă a unei matrice. Conform manualului [1] vom numi matrice unitate de ordin  $n$  matricea notată cu  $I_n$  care are elementele de pe diagonală egale cu 1 iar celelalte nule. Folosind simbolul lui Kronecker definit de:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (2.1.5)$$

matricea unitate  $I_n$  se poate defini astfel:

$$I_n = [\delta_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}. \quad (2.1.6)$$

Principală proprietate a matricii unitate (de ordin  $n$ ) este dată de:

**Teorema 2.1.2** Oricare ar fi matricea  $A \in \mathfrak{M}_{m,n}$  și oricare ar fi matricea  $C \in \mathfrak{M}_{n,m}$  sunt verificate egalitățile:

$$AI_n = A, \quad I_n C = C. \quad (2.1.7)$$

**Remarca 2.1.3** Formulele 2.1.7 justifică denumirea de matrice unitate pentru  $I_n$ .

Fie acum  $A \in \mathfrak{M}_n$ .

**Definitia 2.1.4** Matricea  $A$  se numește inversabilă dacă există o matrice notată  $A^{-1}$  astfel încât:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n, \quad (2.1.8)$$

iar matricea  $A^{-1}$  care verifică relația de mai sus se numește inversa matricei  $A$ .

Existența și modul de calcul al matricei  $A^{-1}$  sunt date de:

**Teorema 2.1.3**  $A^{-1}$  există dacă și numai dacă  $\det(A) \neq 0$  și în acest caz:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*, \quad (2.1.9)$$

unde  $A^*$  este adjuncta matricei  $A$ , și se definește astfel:

$$A^* = [A_{ij}]_{j,i=\overline{1,n}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad (2.1.10)$$

<sup>4</sup> adică are cel puțin o soluție  $X \in \mathfrak{M}_{n,1}$ .

în 2.1.10  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  (numit complementul algebric al elementului  $a_{ij}$ ), iar  $\Delta_{ij}$  este minorul de indice  $i$  și  $j$  (corespunzător elementului  $a_{ij}$ ) al matricei  $A$  care este determinantul matricei de ordin  $n - 1$  care se obține din matricea  $A$  eliminând linia  $i$  și coloana  $j$ .

Folosind inversa unei matrice soluția sistemului 4.2.10 în cazul  $m = n$  este dată de:

**Teorema 2.1.4 (Regula lui Cramer)** Dacă  $\det(A) \neq 0$  atunci sistemul 4.2.10 are soluție unică dată de:

$$X = A^{-1} \cdot B. \quad (2.1.11)$$

**Remarca 2.1.4** Ținând cont de regula de înmulțire a două matrice, de formula 2.1.9, și de dezvoltarea unui determinant după elementele unei linii, formula 2.1.11 este echivalentă cu formulele:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det(A)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (2.1.12)$$

unde  $\Delta_{x_i}$  sunt determinații matricei obținute din matricea  $A$  prin înlocuirea coloanei cu numărul  $i$  cu coloana termenilor liberi (elementele matricei  $B$ ) din sistemul 4.2.10.

Teoremele 2.1.1 și 2.1.4 rezolvă (teoretic) problemele existenței și calculului soluțiilor sistemului 4.2.10, căci pe baza lor rezolvarea sistemului 4.2.10 se face în următorii pași:

1. Se calculează  $k = \text{rang}(A)$  și  $k_1 = \text{rang}(\bar{A})$ .
2. Se verifică dacă  $k = k_1$ ; în cazul egalității se trece la pasul următor, în cazul neegalității se menționează că sistemul 4.2.10 este incompatibil și se opresc calculele.
3. Minorul de ordin  $k$  nenul se notează cu  $\Delta_{\text{princ}}$  și se numește minorul principal al sistemului. Necunoscutele care au coeficienți în  $\Delta_{\text{princ}}$  se numesc necunoscute principale, iar celelalte necunoscute secundare<sup>5</sup>, ecuațiile care au coeficienți în  $\Delta_{\text{princ}}$  se numesc ecuații principale, iar celelalte ecuații secundare. Se formează un sistem numai din ecuațiile principale ale 2.1.2, în care termenii care conțin necunoscute secundare se trec în partea dreaptă.
4. Se rezolvă conform regulii lui Cramer sistemul astfel obținut, necunoscutele secundare luând valori arbitrare.

În legătură cu cele de mai sus, recomandăm rezolvarea următoarelor exerciții:

**Exercițiul 2.1.1** Să se calculeze determinantul Vandermonde:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

avem  $n(n-1)/2$  factori.

**Remarca 2.1.5** Fie  $P(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x)$ .  $P$  este polinom de grad  $n-1$ , cu coef. lui  $x^{n-1} = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$

Dar  $P(x_1) = 0, \dots, P(x_{n-1}) = 0$ .

$$P(x) = V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

<sup>5</sup> dacă nu există necunoscute secundare ( $k = n$ ) sistemul 4.2.10 se numește compatibil determinat, dacă există necunoscute secundare ( $n > k$ ) atunci sistemul se numește nedeterminat (simplu nedeterminat pentru  $n - k = 1$ , dublu nedeterminat pentru  $n - k = 2, \dots$ )

**Exercitiul 2.1.2** Adică:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \dots, x_n) &= V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1}) \\ V(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) &= V(x_1, x_2, \dots, x_{n-2})(x_{n-1} - x_1) \dots (x_{n-1} - x_{n-2}) \\ &\dots \\ V(x_1, x_2, x_3) &= V(x_1, x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \\ V(x_1, x_2) &= V(x_1)(x_2 - x_1) \\ V(x_1) &= 1 \end{aligned}$$

**Exercitiul 2.1.3** Să se demonstreze că soluția generală a sistemului omogen (rangul matricei sistemului fiind 2):

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}$$

se poate scrie sub forma:  $x = \lambda \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, y = \lambda \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix}, z = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}.$

## 2.1.1 Algoritmul lui Gauss

În acest paragraf vom studia așa numitul algoritm al lui Gauss care, în esență nu este altceva decât metoda reducerii. Pașii algoritmului constau din reducerea (eliminarea) primei necunoscute din ecuațiile de la a doua în jos, eliminarea necunoscutei a doua din ecuațiile de la a treia începând, ... obținându-se în final un sistem a cărui matrice are elementele de sub diagonala principală nule și acest sistem se rezolvă prin metoda substituției începând de la ultima ecuație și ultima necunoscută. Mai precis având scris sistemul 4.2.10 sub forma 2.1.2 la primul pas se fac zerouri pe coloana întâi a matricei  $A$ , înmulțind prima ecuație a sistemului 2.1.2 cu numere convenabile și adunând-o la celelalte ecuații:

**Teorema 2.1.5 Pasul 1** Dacă:

$$a_{11} \neq 0 \quad (2.1.13)$$

atunci se înmulțește ecuația întâi a sistemului 2.1.2 cu  $\mu_{i1} = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}$  și se adună la ecuația cu numărul  $i$ , (pentru  $i = \overline{2, n}$ ) obținând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{m2}^{(1)} & a_{m3}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(1)} \\ \vdots \\ b_m^{(1)} \end{bmatrix} \quad (2.1.14)$$

unde  $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}$ , pentru  $j = \overline{1, n}$ ,  $b_1^{(1)} = b_1$  și  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + \mu_{i1}a_{1j}$ ,  $b_i^{(1)} = b_i + \mu_{i1}b_1$  pentru  $i = \overline{2, m}$ ,  $j = \overline{2, n}$ .

**Pasul 2** Presupunând acum că:

$$a_{22}^{(1)} \neq 0 \quad (2.1.15)$$

se fac zerouri pe coloana a doua a matricei  $A$  înmulțind ecuația a doua a sistemului 2.1.14 cu  $\mu_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$  și adunând-o la ecuația cu numărul  $i$ , obținând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{m3}^{(2)} & \dots & a_{mn}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_m^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.1.16)$$

unde  $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)}$  pentru  $i = \overline{1, 2}$   $j = \overline{1, n}$  și  $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} + \mu_{i2}a_{2j}^{(1)}$ ,  $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} + \mu_{i2}b_2^{(1)}$  pentru  $i = \overline{3, m}$ ,  $j = \overline{3, n}$ .

Procedând analog la sfârșitul pasului  $k$  obținem sistemul :

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & \dots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & \dots & a_{2k}^{(k)} & a_{2k+1}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & \dots & a_{3k}^{(k)} & a_{3k+1}^{(k)} & \dots & a_{3n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1}^{(k)} & \dots & a_{k+1n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mk+1}^{(k)} & \dots & a_{mn}^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ b_3^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.1.17)$$

**Pasul  $k+1$ .** Dacă:

$$a_{k+1k+1}^{(k)} \neq 0 \quad (2.1.18)$$

atunci înmulțim ecuația cu numărul  $k+1$  cu  $\mu_{i,k+1} = -\frac{a_{i,k+1}^{(k)}}{a_{k+1k+1}^{(k)}}$  și o adunăm la ecuația cu numărul  $i$  (pentru  $i = \overline{k+2, m}$ ) obținând sistemul:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k+1)} & a_{12}^{(k+1)} & a_{13}^{(k+1)} & \dots & a_{1k}^{(k+1)} & a_{1k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{1n}^{(k+1)} \\ 0 & a_{22}^{(k+1)} & a_{23}^{(k+1)} & \dots & a_{2k}^{(k+1)} & a_{2k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{2n}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k+1)} & \dots & a_{3k}^{(k+1)} & a_{3k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{3n}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k+1)} & a_{kk+1}^{(k+1)} & \dots & a_{kn}^{(k+1)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & \dots & a_{k+1n}^{(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_{mn}^{(k+1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k+1)} \\ b_2^{(k+1)} \\ b_3^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_m^{(k+1)} \end{bmatrix} \quad (2.1.19)$$

unde  $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)}$ ,  $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)}$  pentru  $i = \overline{1, k+1}$ ,  $j = \overline{1, n}$  și  $a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} + \mu_{i,k+1}a_{k+1,j}^{(k)}$ ,  $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} + \mu_{i,k+1}b_{k+1}^{(k)}$  pentru  $i = \overline{k+2, m}$ ,  $j = \overline{k+1, n}$ .

**Remarca 2.1.6** În cazul în care se utilizează calculatorul, pentru a micșora erorile de rotunjire la împărțire e preferabil ca la fiecare pas  $k$  să se schimbe întâi linia  $k$  cu linia care conține pe coloana  $k$  sub diagonală cel mai mare număr în valoare absolută, adică să se efectueze mai întâi următoarele operații :

$$1) \text{ se determină indicele } l \text{ cel mai mic astfel încât: } |a_{lk}^{(k-1)}| = \max_{k \leq i \leq m} |a_{ik}^{(k-1)}|.$$

$$2) \text{ se schimbă linia } l \text{ cu linia } k \text{ a matricelor } A^{(k)} \text{ și } B^{(k)}.$$

**Remarca 2.1.7** Dacă condiția 2.1.18 nu e verificată, atunci se verifică dacă există elemente nenule pe coloana  $k+1$  începând cu linia  $k+2$  în matricea  $A^{(k)}$  și dacă există se schimbă linia  $k+1$  a matricelor  $A^{(k)}$  și  $B^{(k)}$  cu linia care conține elementul nenul. Dacă toate elementele coloanei  $k+1$  începând de la linia  $k+2$  sunt nule atunci sistemul este sau incompatibil, sau compatibil nedeterminat cu necunoscuta  $x_{k+1}$  ca necunoscută secundară și pentru rezolvarea lui e preferabil să se aplice algoritmul de mai sus cu mici modificări (vezi cele ce urmează după teorema 2.1.6).

Din modul cum am obținut sistemul 2.1.19 din sistemul inițial 2.1.2 se poate demonstra următoarea teoremă:

**Teorema 2.1.6** Sistemele 2.1.2 și 2.1.19 sunt echivalente<sup>6</sup>.

<sup>6</sup> adică sau sunt ambele incompatibile, sau dacă sunt compatibile au aceleași soluții.

Se pune în mod natural problema care este numărul maxim de pași posibili la algoritmul lui Gauss și cum se rezolvă apoi sistemul obținut. Din teorema precedentă și 2.1.1, rezultă că numărul maxim de pași este egal cu rangul matricei  $A$ . Dacă rangul matricei  $A$  este  $k$  atunci la sfârșitul pasului  $k$  sistemul 2.1.17 devine:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & a_{13}^{(k)} & \dots & a_{1k}^{(k)} & a_{1k+1}^{(k)} & \dots & a_{1n}^{(k)} \\ 0 & a_{22}^{(k)} & a_{23}^{(k)} & \dots & a_{2k}^{(k)} & a_{2k+1}^{(k)} & \dots & a_{2n}^{(k)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(k)} & \dots & a_{3k}^{(k)} & a_{3k+1}^{(k)} & \dots & a_{3n}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{kk}^{(k)} & a_{kk+1}^{(k)} & \dots & a_{kn}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(k)} \\ b_2^{(k)} \\ b_3^{(k)} \\ \vdots \\ b_m^{(k)} \end{bmatrix} \quad (2.1.20)$$

Acest sistem este (evident) incompatibil dacă există  $b_j^{(k)} \neq 0$ , cu  $j > k$ . Dacă pentru  $j > k$   $b_j^{(k)} = 0$  atunci sistemul este compatibil, determinat pentru  $k = n$  și nedeterminat pentru  $k < n$ . Soluția lui se află prin rezolvarea (în raport cu necunoscutele principale) a ecuațiilor începând de la ultima și înlocuind necunoscutele deja aflate în ecuațiile precedente, conform formulelor:

$$x_k = \frac{b_k^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k)} x_j}{a_{kk}^{(k)}} \quad (2.1.21)$$

$$x_i = \frac{b_i^{(k)} - \sum_{j=k+1}^n a_{ij}^{(k)} x_j - \sum_{l=i+1}^k a_{il}^{(k)} x_l}{a_{ii}^{(k)}}, i = k-1, 1$$

**Remarca 2.1.8** Acest algoritm se poate aplica și la calculul inversei unei matrice, aplicând pașii matricei formată din matricea  $A$  și matricea unitate  $I_n$  scrisă alături, obținând în final în stânga  $I_n$  iar în dreapta  $A^{-1}$ :  $[A | I_n] \Rightarrow [I_n | A^{-1}]$ , deoarece aflarea coloanei cu nr.  $k$  a matricei inverse se reduce la rezolvarea unui sistem având ca matrice matricea  $A$  iar ca termen liber coloana cu nr.  $k$  a matricei unitate de ordin corespunzător.

**Remarca 2.1.9** Acest algoritm permite și determinarea rangului unei matrice  $A$ , rangul matricei fiind egal cu numărul maxim de pași din algoritm (matricea  $B$  nu se mai ia în calcul în acest caz).

**Exemplul 2.1.1** Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ x + 4y + 9z = 14 \end{cases}$$

Matricea extinsă:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \end{bmatrix}$$

*Pasul 1: scad prima linie din toate celelalte:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

*Sistemul a devenit:*

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + 2z = 3 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

*rezultă:*  $z = 1, y = 3 - 2z = 1, x = 3 - y - z = 1.$

# Capitolul 3

## Geometrie analitică

### 3.1 Vectori

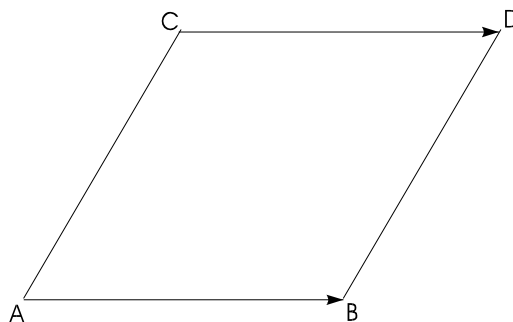
#### 3.1.1 Definirea noțiunii de vector

Se presupune cunoscută noțiunea de segment orientat<sup>7</sup>. Vom nota un segment orientat cu două litere mari, cu săgeată deasupra, prima literă indicând originea iar cea de a doua extremitatea segmentului orientat (de exemplu  $\overrightarrow{AB}$ ,  $A$  fiind originea iar  $B$  fiind extremitatea segmentului orientat  $\overrightarrow{AB}$ ). Pe mulțimea segmentelor orientate, pe care o vom nota cu  $\mathcal{S}$ , introducem următoarea relație:

**Definiția 3.1.1** Segmentele orientate  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  sunt echipolente (și vom nota acest lucru cu  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ) dacă și numai dacă sunt verificate următoarele condiții:

1. au aceeași lungime ( $AB = CD$ );
2. dreptele  $AB$  și  $CD$  sunt paralele sau coincid ( $AB \parallel CD$ );
3.  $\overrightarrow{AB}$  și  $\overrightarrow{CD}$  au același sens (dacă  $AB$  și  $CD$  sunt paralele atunci  $AC \cap BD = \emptyset$ , iar dacă dreptele  $AB$  și  $CD$  coincid atunci  $[AC] \cap [BD]$  este sau mulțimea vidă, sau se reduce la un punct sau este egală cu  $[AD]$  sau este egală cu  $[BC]$ )<sup>8</sup>.

**Remarca 3.1.1** Condițiile din definiția 3.1.1 sunt echivalente, în cazul în care punctele  $A, B, C, D$  nu sunt coliniare cu faptul că  $ABDC$  (punctele fiind luate în această ordine) este paralelogram, conform figurii de mai jos:



Două segmente orientate echipolente

Principalele proprietăți ale relației de echipolență dată de definiția 3.1.1 sunt date de:

**Teorema 3.1.1** Relația de echipolență este:

1. reflexivă: pentru orice  $\overrightarrow{AB} \in \mathcal{S} : \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ ;
2. simetrică: dacă  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  atunci și  $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ ;

<sup>7</sup> un segment orientat este un segment  $\overline{AB}$  pe care s-a stabilit un sens de parcurgere de la  $A$  la  $B$ .

<sup>8</sup> sau, cum se exprimă o variantă de manual de geometrie de clasa a IX-a, segmentele  $AD$  și  $BC$  au același mijloc.

3. *tranzitivă*: dacă  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$  și  $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$  atunci  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ .

**Demonstrație.** Demonstrația acestor proprietăți este imediată, ținând cont de faptul că relația de egalitate între numere (care apare în condiția 1. din definiția 3.1.1) și relația de paralelism între drepte (care apare în condiția 2.) din aceeași definiție au proprietățile de reflexivitate, simetrie și tranzitivitate. ■

**Definiția 3.1.2** Pentru un segment orientat  $\overrightarrow{AB}$  vom numi clasă de echipolență corespunzătoare lui mulțimea tuturor segmentelor orientate echipolente cu el, mulțime notată cu  $\{\overrightarrow{AB}\}$ .

**Remarca 3.1.2** Cu simboluri matematice definiția de mai sus se scrie:

$$\{\overrightarrow{AB}\} \stackrel{def}{=} \{\overrightarrow{CD} \in \mathfrak{S} \mid \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}.$$

În legătură cu clasele de echipolență este adevărată următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.2** Orice clasă de echipolență este nevidă și două clase de echipolență sunt sau disjuncte sau coincid.

**Demonstrație\*.** Fie clasa de echipolență  $\{\overrightarrow{AB}\}$ . Conform cu 1. din theorem 4.2.1  $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$  și deci  $\overrightarrow{AB} \in \{\overrightarrow{AB}\} \neq \emptyset$ . Fie acum două clase de echipolență  $\{\overrightarrow{AB}\}$  și  $\{\overrightarrow{CD}\}$ . Dacă ele sunt disjuncte theorem este demonstrată. Dacă există un segment orientat  $\overrightarrow{EF} \in \{\overrightarrow{AB}\} \cap \{\overrightarrow{CD}\}$  să demonstrăm că ele sunt egale. Fiind vorba de două mulțimi, arătăm că fiecare este inclusă în cealaltă. Să considerăm un element  $\overrightarrow{A_1B_1} \in \{\overrightarrow{AB}\}$ . Atunci, conform definiției 3.1.2  $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{AB}$ . Dar din  $\overrightarrow{EF} \in \{\overrightarrow{AB}\}$  rezultă că  $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{AB}$ . Aplicând proprietățile de simetrie și tranzitivitate ale relației de echipolență rezultă că  $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{EF}$ . Din  $\overrightarrow{EF} \in \{\overrightarrow{CD}\}$  rezultă  $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$ . Din  $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{EF}$  și  $\overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{CD}$  rezultă (tranzitivitatea relației de echipolență) că  $\overrightarrow{A_1B_1} \sim \overrightarrow{CD}$ , adică conform aceleiași definiții 3.1.2,  $\overrightarrow{A_1B_1} \in \{\overrightarrow{CD}\}$ , deci  $\{\overrightarrow{AB}\} \subseteq \{\overrightarrow{CD}\}$ . Reluând raționamentul de mai sus de la coadă la cap, va rezulta și incluziunea  $\{\overrightarrow{AB}\} \supseteq \{\overrightarrow{CD}\}$ , c.c.t.d. ■

Pe baza teoremei de mai sus suntem în măsură să dă următoarea definiție:

**Definiția 3.1.3** Se numește vector o clasă de echipolență de segmente orientate. Pentru un vector dat un segment orientat din clasa respectivă de echipolență se numește reprezentant al său.

**Definiția 3.1.4** Se numește lungimea unui vector lungimea oricărui reprezentant al său.

**Remarca 3.1.3** Vom nota vectorii cu litere mici din alfabetul latin cu bară deasupra ( $\overline{a}$ ,  $\overline{b}$ ,  $\overline{v}$ , ...), și dacă  $\overrightarrow{AB} \in \overline{a}$  spunem că  $\overrightarrow{AB}$  este un reprezentant al vectorului  $\overline{a}$ . Dacă nu este pericol de confuzie vom spune vectorul  $\overrightarrow{AB}$ , în loc de  $\overrightarrow{AB}$  este un reprezentant al vectorului  $\overline{a}$ . Vom nota cu  $\mathfrak{V}_3$  mulțimea tuturor vectorilor din spațiu. Pentru vectorul  $\overline{a}$  vom nota cu  $a$  sau cu  $|\overline{a}|$  lungimea sa.

**Remarca 3.1.4** Noțiunea de vector definită mai sus este ceea ce în fizică și mecanică se numește **vector liber**, caracterizat prin mărime (lungimea vectorului respectiv), direcție (toate dreptele paralele cu un reprezentant al său) și sens. Dacă condiția 2. din definiția 3.1.1 se înlocuiește cu "dreptele  $AB$  și  $CD$  coincid" se obține noțiunea de **vector alunecător** iar noțiunea de segment orientat coincide cu cea de **vector legat**.

**Remarca 3.1.5** Se poate demonstra că fiind dat un punct  $O$  din spațiu și un vector  $\vec{a}$  există un singur punct  $A$  astfel încât  $\vec{OA} \in \vec{a}$ .

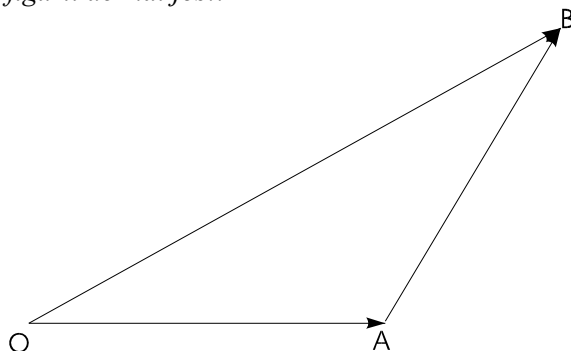
**Remarca 3.1.6** În mulțimea vectorilor un rol important (ca "etaloane" pentru măsurarea lungimilor) îl joacă versorii, definiți ca vectori de lungime 1.

### 3.1.2 Operații cu vectori

#### Suma a doi vectori și înmulțirea unui vector cu un scalar

Fiind dați doi vectori, suma lor se definește ajutorul reprezentanților astfel:

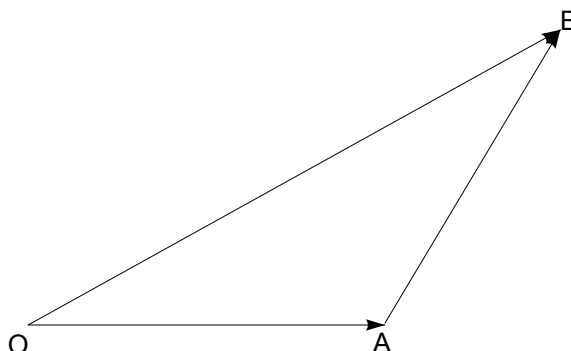
**Definiția 3.1.5** Dacă  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt doi vectori având reprezentanții  $\vec{OA}$  respectiv  $\vec{AB}$  atunci suma  $\vec{a} + \vec{b}$  are reprezentantul  $\vec{OB}$ , conform figurii de mai jos:.



În legătură cu definiția de mai sus se pune întrebarea dacă nu cumva suma a doi vectori nu depinde de reprezentanții aleși (adică, conform remarcii 3.1.5 de punctul  $O$ ). Răspunsul la această întrebare este negativ, după cum rezultă din următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.3** Suma a doi vectori  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  nu depinde de reprezentanți.

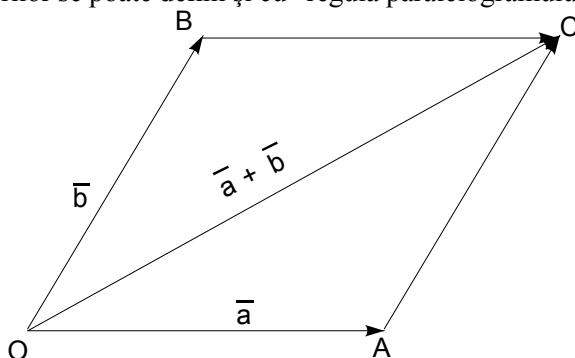
**Demonstrație**<sup>9</sup>. Fie un alt punct  $O'$ . Conform remarcii 3.1.5 există un singur punct  $A'$  astfel încât  $\vec{O'A'} \in \vec{a}$ , și un singur punct  $B'$  astfel încât  $\vec{A'B'} \in \vec{b}$ . Atunci, conform definiției 3.1.5  $\vec{O'B'} \in \vec{a} + \vec{b}$ . Enunțul teoremei spune că trebuie să avem  $\vec{O'B'} \sim \vec{OB}$ . Făcând construcția punctelor  $O', A', B'$  obținem figura:



Din  $\vec{OA} \sim \vec{O'A'}$  și  $\vec{OB} \sim \vec{O'B'}$  va rezulta că triunghiul  $O'A'B'$  din această figură este congruent cu triunghiul  $OAB$  din figura 1., de unde va rezulta că  $\vec{O'B'} \sim \vec{OB}$ . ■

<sup>9</sup> doar ideea demonstrației, demonstrația (geometrică) riguroasă fiind lăsată pe seama cititorului.

**Remarca 3.1.7** Dacă punctele  $O, A, B$  nu sunt coliniare (adică vom spune că vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  nu sunt coliniari) atunci adunarea vectorilor se poate defini și cu ”regula paralelogramului” conform figurii de mai jos:



unde vectorul sumă este diagonala paralelogramului având ca laturi vectorii dați.

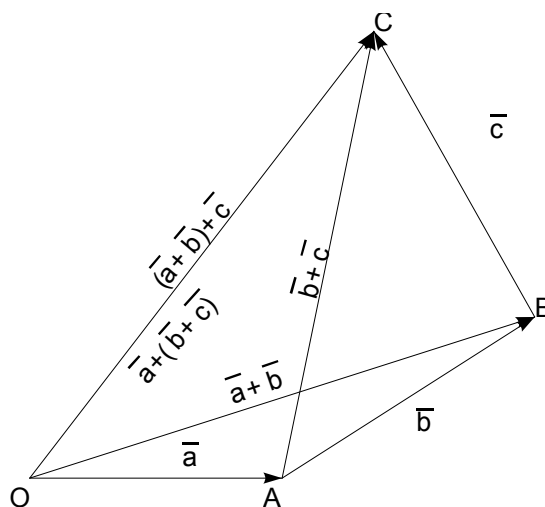
Principalele proprietăți ale sumei sunt date de următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.4**  $(\mathfrak{V}_3, +)$  (mulțimea vectorilor înzestrată cu operația de adunare) formează un grup abelian (comutativ).

**Demonstrație:**

1. Asociativitatea: rezultă urmărind cu atenție următoarea figură și scriind următoarele egalități:

$$(\vec{OA} + \vec{AB}) + \vec{BC} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OA} + (\vec{AB} + \vec{BC})$$



2. Comutativitatea: Dacă vectorii nu sunt coliniari rezultă din regula paralelogramului (vezi figura de la remarca 3.1.7), iar în caz de coliniaritate lășăm demonstrația pe seama cititorului.

3. Existența elementului neutru: definim vectorul nul  $\vec{0} = \{\vec{AA}\}$ . În acest caz (vezi de exemplu pe figura de mai sus:

$$\vec{OA} + \vec{AA} = \vec{OA} \\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

4. Existența elementului simetric: dacă  $\vec{a} = \{\vec{OA}\}$  atunci definim  $-\vec{a} \stackrel{def}{=} \{\vec{AO}\}$ . Conform definiției 3.1.5 avem egalitățile:

$$\vec{OA} + \vec{AO} = \vec{OO} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$

ceea ce trebuia demonstrat. ■

O altă operație (care se numește lege de compoziție externă) este înmulțirea unui vector cu un scalar. Pentru a defini această operație precizăm că prin scalar vom înțelege un număr real, și pentru a evita orice confuzie vom nota în cele ce urmează scalarii cu litere din alfabetul grecesc:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots \in \mathbb{R}$ .

**Definitia 3.1.6** Dacă  $\alpha \in \mathbb{R}$  și  $\vec{v} \in \mathfrak{V}_3$  atunci vom numi produsul dintre scalarul  $\alpha$  și vectorul  $\vec{v}$  vectorul notat cu  $\alpha\vec{v}$  definit astfel: dacă  $\vec{OA} \in \vec{v}$  atunci  $\vec{OA}_1 \in \alpha\vec{v}$  verifică condițiile:

1.  $OA_1 = |\alpha| OA$ ;
2. dacă  $\alpha > 0$  atunci  $O$  este în exteriorul segmentului  $[AA_1]$ , iar dacă  $\alpha < 0$  atunci  $O$  este între  $A$  și  $A_1$ .

**Remarca 3.1.8** Dacă avem dați doi vectori  $\vec{v}$  și  $\vec{w}$  atunci faptul că există  $\alpha \in \mathbb{R}$  astfel încât  $\vec{w} = \alpha\vec{v}$  este echivalent cu afirmația ” $\vec{v}$  și  $\vec{w}$  sunt doi vectori coliniari (paraleli)” (vezi și remarca 3.1.7).

**Remarca 3.1.9**  $\alpha\vec{v} = \vec{0}$  dacă și numai dacă  $\alpha = 0$  sau  $\vec{v} = \vec{0}$ .

Următoarea teoremă arată legătura care există între înmulțirea unui vector cu un scalar și operațiile de adunare a vectorilor, respectiv de adunare și înmulțire a scalarilor:

**Teorema 3.1.5** Pentru orice vectori  $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathfrak{V}_3$  și pentru orice scalari  $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$  sunt adevărate egalitățile:

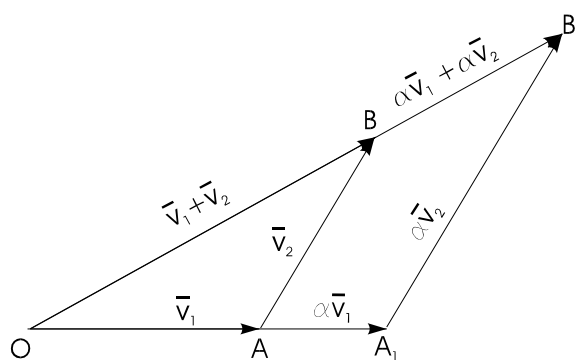
$$(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{v} = (\alpha_1\vec{v}) + (\alpha_2\vec{v}) \quad (3.1.1)$$

$$\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\alpha\vec{v}_1) + (\alpha\vec{v}_2) \quad (3.1.2)$$

$$(\alpha_1\alpha_2)\vec{v} = \alpha_1(\alpha_2\vec{v}) \quad (3.1.3)$$

$$1\vec{v} = \vec{v} \quad (3.1.4)$$

**Demonstrație\*.** Demonstrațiile egalităților (3.1.1), (3.1.3), (3.1.4) se reduc la distributivitatea înmulțirii față de adunare în  $\mathbb{R}$ , iar demonstrația egalității (3.1.2) rezultă din asemănarea triunghiurilor  $OAB$  și  $OA_1B_1$  din figura de mai jos:



( $\vec{OB}_1 = \alpha\vec{OB}$  și deci  $\alpha\vec{v}_1 + \alpha\vec{v}_2 = \alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ ). ■

**Remarca 3.1.10** Teoremele 3.1.4 și 3.1.5 se puteau enunța într-o singură teoremă, folosind noțiunea de spațiu vectorial (vezi manualul [2]) astfel: ”Mulțimea vectorilor din spațiu împreună cu operația de adunare și cea de înmulțire cu un scalar formează un spațiu vectorial real”.

Cu ajutorul operației de înmulțire cu un scalar putem defini acum noțiunea de versor al unui vector:

**Definitia 3.1.7** Se numește versor al unui vector  $\vec{v}$  vectorul obținut prin înmulțirea vectorului  $\vec{v}$  cu inversul lungimii sale (adică vectorul  $\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ , care este un versor conform remarcii 3.1.6).

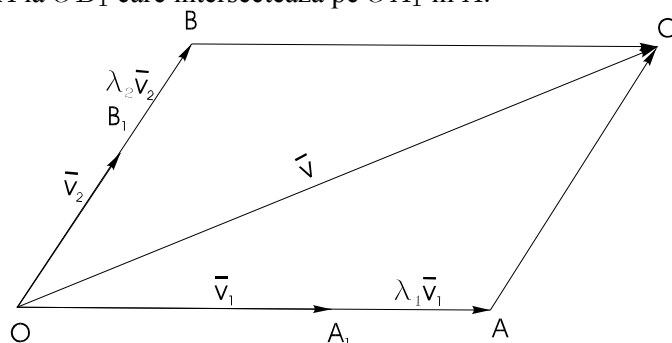
O problemă care apare frecvent în aplicațiile vectorilor este „descompunerea unui vector după direcțiile a doi (sau trei) vectori”. Posibilitatea unei astfel de descompuneri este dată de următoarele două teoreme. Pentru aceasta e necesar să precizăm noțiunea de vectori coplanari:

**Definiția 3.1.8** Trei vectori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  se numesc vectori coplanari dacă reprezentanții lor care au originea în același punct<sup>10</sup> sunt coplanari (adică pentru orice punct  $O$  dacă  $\vec{OA}_1 \in \vec{v}_1, \vec{OA}_2 \in \vec{v}_2, \vec{OA}_3 \in \vec{v}_3$  atunci punctele  $O, A_1, A_2, A_3$  sunt coplanare).

**Teorema 3.1.6** Dacă vectorii  $\vec{v}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$  sunt coplanari și vectorii  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  nu sunt coliniari (vezi remarcă 3.1.8) atunci există în mod unic doi scalari  $\lambda_1, \lambda_2$  astfel încât:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2. \quad (3.1.5)$$

**Demonstrație.** Fie un punct  $O$  fixat și reprezentanții (vezi figura de mai jos):  $\vec{OC} \in \vec{v}, \vec{OA}_1 \in \vec{v}_1, \vec{OB}_1 \in \vec{v}_2$ . Prin  $C$  ducem paralela  $CB$  la  $OA_1$  care intersectează (deoarece  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  nu sunt coliniari) pe  $OB_1$  în  $B$  și paralela  $CA$  la  $OB_1$  care intersectează pe  $OA_1$  în  $A$ .



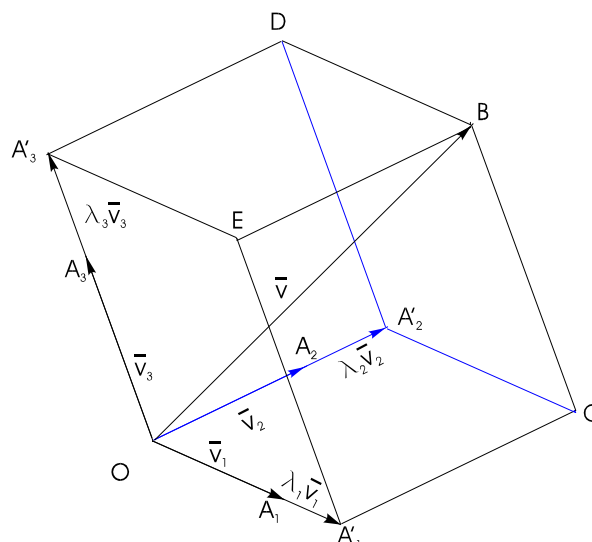
Conform regulii paralelogramului de adunare a doi vectori,  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ . Dar, conform definiției 3.1.6, există scalarii  $\lambda_1, \lambda_2$  astfel încât  $\vec{OA} = \lambda_1 \vec{OA}_1, \vec{OB} = \lambda_2 \vec{OB}_1$ . Din ultimele trei egalități rezultă că  $\vec{OC} = \lambda_1 \vec{OA}_1 + \lambda_2 \vec{OB}_1$ , adică tocmai egalitatea (3.1.5) scrisă cu ajutorul reprezentanților. Să demonstrăm acum unicitatea formulei (3.1.5). Presupunem că există și scalarii  $\lambda'_1, \lambda'_2$  (cu  $\lambda'_1 \neq \lambda_1$  sau  $\lambda'_2 \neq \lambda_2$ ) astfel încât  $\vec{v} = \lambda'_1 \vec{v}_1 + \lambda'_2 \vec{v}_2$ . Scăzând această egalitate din (3.1.5) rezultă  $(\lambda_1 - \lambda'_1) \vec{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2) \vec{v}_2 = \vec{0}$ . Dacă  $\lambda'_1 \neq \lambda_1$  împărțind ultima egalitate cu  $\lambda_1 - \lambda'_1$  rezultă  $\vec{v}_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda'_2}{\lambda_1 - \lambda'_1} \vec{v}_2$ , deci, conform remarcii 3.1.8 vectorii  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  sunt coliniari, contradicție. ■

**Teorema 3.1.7** (descompunerea unui vector după trei direcții date) Dacă vectorii  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  nu sunt coplanari atunci pentru orice vector  $\vec{v} \in \mathfrak{V}_3$  există unic constantele  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  astfel încât:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \lambda_3 \vec{v}_3.$$

**Demonstrație.** Este analoagă cu demonstrația teoremei precedente (ca idee), după cum se constată urmărind figura de mai jos, în care s-a construit un paralelipiped cu diagonala  $\vec{OB} \in \vec{v}$ , cu laturile paralele cu  $\vec{OA}_1 \in \vec{v}_1, \vec{OA}_2 \in \vec{v}_2, \vec{OA}_3 \in \vec{v}_3$ .

<sup>10</sup> conform remarcii 3.1.5 acești reprezentanți există.



Scrierea egalităților corespunzătoare acestei figuri se lasă pe seama cititorului. ■

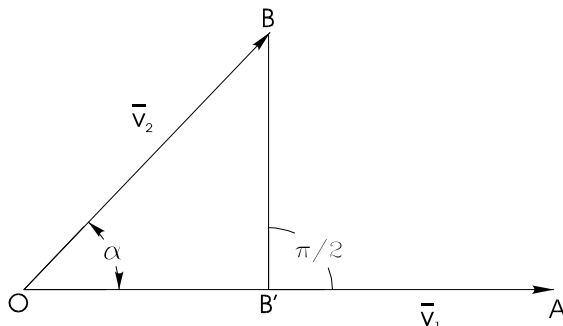
### Produse de doi vectori

Fie doi vectori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ .

**Definiția 3.1.9** Se numește produsul scalar al vectorilor  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  numărul (scalarul) notat cu  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$  definit prin:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos \alpha \quad (3.1.6)$$

unde  $\alpha$  este unghiul (mai mic decât  $\pi$ ) dintre cei doi vectori (vezi și figura de mai jos, unde  $\vec{OA} \in \vec{v}_1, \vec{OB} \in \vec{v}_2, BB' \perp OA$ ).



**Remarca 3.1.11** Produsul scalar a doi vectori este egal cu produsul dintre lungimea unuia din vectori, lungimea proiecției celui de al doilea vector pe primul, și  $+1$  dacă unghiul dintre cei doi vectori este mai mic decât  $\frac{\pi}{2}$  respectiv  $-1$  dacă unghiul dintre cei doi vectori este obtuz. (pe figura de mai sus produsul scalar dintre  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  este egal cu  $OA \cdot OB'$ ). Dacă nu este pericol de confuzie produsul scalar al vectorilor  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$  se notează și  $\vec{v}_1 \vec{v}_2$ .

**Remarca 3.1.12** Din definiția produsului scalar rezultă că lungimea unui vector (vezi, pentru notație remarcă 4.2.2) se poate calcula cu formula:  $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$  (de aceea în cazul în care se calculează produsul scalar al unui vector cu el însuși se poate renunța la bara de deasupra vectorului, adică  $\vec{v} \cdot \vec{v} = vv$ ).

**Remarca 3.1.13** Produsul scalar a doi vectori este nul dacă și numai dacă unul din vectori este vectorul nul sau vectorii sunt perpendiculari, după cum rezultă din formula de definiție 3.1.6. Cu formule matematice

aceasta se poate scrie:

$$\overline{v}_1 \overline{v}_2 = 0 \iff \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sau} \\ v_2 = 0 \text{ sau} \\ \overline{v}_1 \perp \overline{v}_2 (\cos \alpha = 0) \end{cases} \quad (3.1.7)$$

INTERPRETARE MECANICĂ: Produsul scalar dintre vectorii  $\overline{v}_2$  și  $\overline{v}_1$  este egal cu lucrul mecanic produs de o forță egală cu  $\overline{v}_2$  la deplasarea  $\overline{v}_1$ .

Principalele proprietăți ale produsului scalar sunt date de următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.8** Oricare sunt vectorii  $\overline{v}_1$ ,  $\overline{v}_2$  și  $\overline{v}_3$  și oricare ar fi scalarul  $\lambda \in \mathbb{R}$  sunt adevărate egalitățile:

$$\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_2 \cdot \overline{v}_1 \text{ (comutativitate)} \quad (3.1.8)$$

$$\overline{v}_1 \cdot (\overline{v}_2 + \overline{v}_3) = \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2 + \overline{v}_1 \cdot \overline{v}_3 \text{ (distributivitate față de adunarea vectorilor)} \quad (3.1.9)$$

$$(\lambda \overline{v}_1) \cdot \overline{v}_2 = \overline{v}_1 \cdot (\lambda \overline{v}_2) = \lambda (\overline{v}_1 \cdot \overline{v}_2). \quad (3.1.10)$$

**Demonstrație\***. Egalitatea 3.1.8, respectiv 3.1.10 rezultă imediat din formula 3.1.6 care definește produsul scalar, ținând cont de comutativitatea, respectiv asociativitatea înmulțirii numerelor reale. Egalitatea 3.1.9 se demonstrează pe baza remarcii 3.1.11 și a faptului că „proiecția sumei este egală cu suma proiecțiilor”<sup>11</sup>. ■

Fie acum vectorii  $\overline{v}_1$  și  $\overline{v}_2$ , cu unghiul dintre ei (mai mic decât  $\pi$ ) notat cu  $\alpha$ .

**Definiția 3.1.10** Se numește produsul vectorial al vectorilor  $\overline{v}_1$  și  $\overline{v}_2$  **vectorul** notat  $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$  definit astfel:

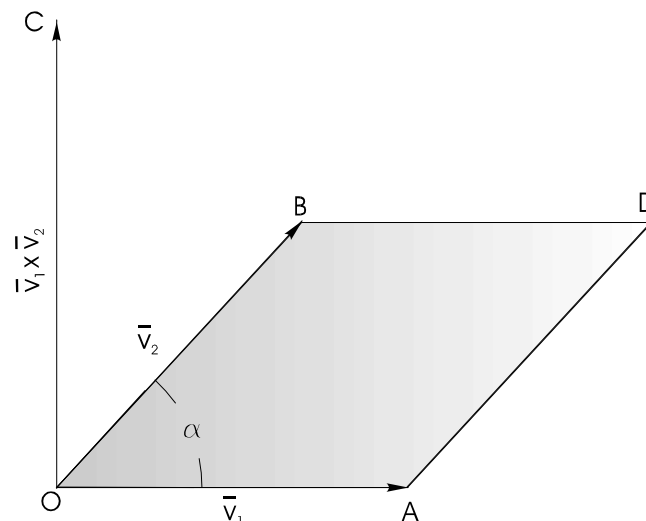
1. lungimea produsului vectorial se calculează conform formulei:

$$|\overline{v}_1 \times \overline{v}_2| = v_1 v_2 \sin \alpha; \quad (3.1.11)$$

2.  $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$  este perpendicular atât pe  $\overline{v}_1$  cât și pe  $\overline{v}_2$ ;

3. sensul lui  $\overline{v}_1 \times \overline{v}_2$  este dat de regula burghiului drept: sensul în care înaintează un burghiu când rotim  $\overline{v}_1$  spre  $\overline{v}_2$  sub un unghi minim (mai mic decât  $\pi$ ).

**Remarca 3.1.14** Produsul vectorial a doi vectori este **un vector, a cărui lungime se calculează cu formula 3.1.11**, direcția și sensul său fiind precizate de celelalte două condiții din definiția de mai sus. Formula 3.1.11 definește lungimea vectorului produs vectorial ca fiind egală cu aria paralelogramului construit pe cei doi factori, după cum se observă și în figura de mai jos, în care  $\overrightarrow{OC} \in \overline{v}_1 \times \overline{v}_2$ ,  $\overrightarrow{OA} \in \overline{v}_1$ ,  $\overrightarrow{OB} \in \overline{v}_2$ ,  $AD \parallel OB$ ,  $BD \parallel OA$ , iar aria paralelogramului  $OADB$  este egală cu  $OA \cdot OB \cdot \sin \alpha$ :



<sup>11</sup> exprimare nu prea riguroasă.  
-24-

**Remarca 3.1.15** Produsul vectorial a doi vectori este vectorul nul dacă și numai dacă unul din vectori este vectorul nul sau vectorii sunt coliniari (paraleli), după cum rezultă din formula 3.1.11. Cu formule matematice aceasta se poate scrie:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \vec{0} \iff \begin{cases} v_1 = 0 \text{ sau} \\ v_2 = 0 \text{ sau} \\ \vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2 (\sin \alpha = 0) \end{cases} \quad (3.1.12)$$

INTERPRETARE MECANICĂ: Produsul vectorial dintre vectorii  $\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_1$  este egal cu momentul forței  $\vec{v}_2$  având brațul forței  $\vec{v}_1$ , momentul având originea în originea brațului forței, (vezi figura precedentă, forța fiind  $\vec{AD}$  iar brațul forței  $\vec{OA}$ ).

Principalele proprietăți ale produsului vectorial sunt date de următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.9** Oricare sunt vectorii  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$  și oricare ar fi scalarul  $\alpha \in \mathbb{R}$  sunt adevărate egalitățile:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = -\vec{v}_2 \times \vec{v}_1 \text{ (anticomutativitate)} \quad (3.1.13)$$

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 + \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times \vec{v}_3 \text{ (distributivitate față de adunarea vectorilor)} \quad (3.1.14)$$

$$(\alpha \vec{v}_1) \times \vec{v}_2 = \vec{v}_1 \times (\alpha \vec{v}_2) = \alpha (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2). \quad (3.1.15)$$

**Demonstrație.** Formulele (3.1.13) și (3.1.15) sunt evidente pe baza definiției produsului vectorial, iar demonstrația formulei (3.1.14) este o demonstrație geometrică destul de laborioasă pe care nu o reproducem aci (pentru cei interesați ea se poate găsi în [4]). ■

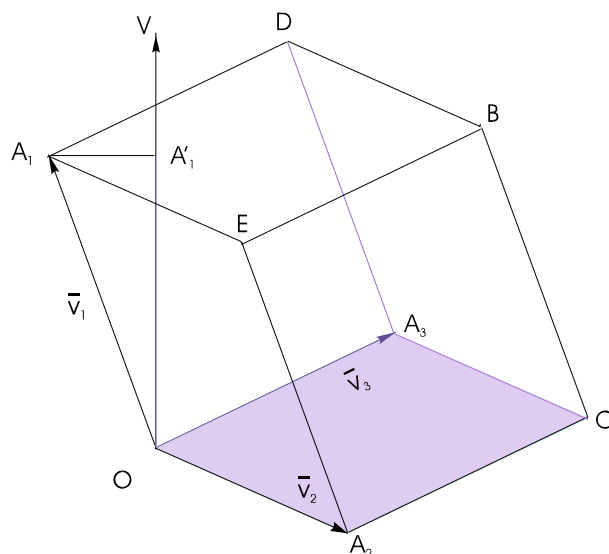
### Produse de trei vectori

Fie acum trei vectori  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ .

**Definiția 3.1.11** Se numește produsul mixt al vectorilor  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  scalarul notat cu  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$  definit de formula:

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \vec{v}_1 \cdot (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3). \quad (3.1.16)$$

INTERPRETARE GEOMETRICĂ: Produsul mixt a trei vectori este egal cu  $\pm$ volumului paralelipipedului construit pe cei trei vectori, după cum se constată pe figura ?? de mai jos (în care  $\vec{OV} = \vec{v}_2 \times \vec{v}_3$ , înălțimea paralelipipedului  $OA_2CA_3A_1EBD$  fiind egală cu  $OA'_1$ , care este proiecția pe  $\vec{OV}$  a vectorului  $\vec{v}_1$ , și deci produsul scalar  $\vec{v}_1 \cdot \vec{OV}$  este chiar volumul paralelipipedului, abstracție făcând de semn):



Interpretare geometrică a produsului mixt.

**Remarca 3.1.16** Dacă vectorii  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  sunt nenuli, atunci produsul lor mixt este egal cu 0 dacă sau produsul vectorial  $\bar{v}_2 \times \bar{v}_3$  este nul (adică, conform remarcii 3.1.12  $\bar{v}_2$  și  $\bar{v}_3$  sunt coliniari) sau vectorul  $\bar{v}_1$  este perpendicular pe  $\bar{v}_2 \times \bar{v}_3$ , adică  $\bar{v}_1$  este coplanar cu  $\bar{v}_2$  și  $\bar{v}_3$ . În ambele cazuri constatăm că  $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = 0$  este echivalent cu faptul că cei trei vectori sunt coplanari.

Principalele proprietăți ale produsului mixt sunt date de următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.10** *Produsul mixt este invariant la o permutare circulară<sup>12</sup> a factorilor, iar dacă se schimbă ordinea a doi factori se schimbă semnul produsului.*

**Demonstrație.** Din interpretarea geometrică a produsului mixt rezultă că produsul mixt a trei vectori poate lua doar două valori. Care sunt permutările vectorilor pentru care produsul mixt ia fiecare din cele două valori va rezulta mai simplu din paragraful următor, pe baza formulei (3.3.7) din theorem 3.3.4. ■

Pentru aceiași trei vectori ca mai sus putem defini încă un produs:

**Definiția 3.1.12** *Se numește **dublul produs vectorial** al vectorilor  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  vectorul  $\bar{v}_1 \times (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$ .*

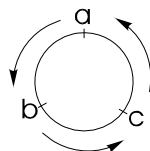
În legătură cu acest produs menționăm următoarea teoremă:

**Teorema 3.1.11** *Oricare sunt vectorii  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  este adevărată următoarea formulă (cunoscută sub numele de formula lui Gibbs):*

$$\bar{v}_1 \times (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3) = (\bar{v}_1 \bar{v}_3) \bar{v}_2 - (\bar{v}_1 \bar{v}_2) \bar{v}_3. \quad (3.1.17)$$

**Demonstrație\*.** Să observăm că  $\bar{v}_1 \times (\bar{v}_2 \times \bar{v}_3)$  este un vector perpendicular pe  $\bar{v}_2 \times \bar{v}_3$  și deoarece  $\bar{v}_2$  și  $\bar{v}_3$  sunt la rândul lor perpendiculari pe  $\bar{v}_2 \times \bar{v}_3$  (vezi definiția produsului vectorial) rezultă că vectorii

<sup>12</sup> prin permutare circulară a trei numere  $a, b, c$  se înțelege o permutare în care fiecare element este înlocuit cu următorul, iar ultimul cu primul, conform schemei:



$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3)$ ,  $\vec{v}_2$  și  $\vec{v}_3$  sunt coplanari, ceea ce implică (vezi theorem 3.1.6) existența scalarilor  $\lambda$  și  $\mu$  astfel încât:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \lambda \vec{v}_2 + \mu \vec{v}_3. \quad (3.1.18)$$

Să înmulțim acum scalar această egalitate cu vectorul  $\vec{v}_1$ . Pe baza proprietăților produsului scalar va rezulta:  $0 = \lambda (\vec{v}_1 \vec{v}_2) + \mu (\vec{v}_1 \vec{v}_3)$ . Din această egalitate rezultă  $-\frac{\mu}{(\vec{v}_1 \vec{v}_2)} = \frac{\lambda}{(\vec{v}_1 \vec{v}_3)}$ . Notând valoarea comună a acestor rapoarte cu  $\kappa$  și înlocuind pe  $\lambda$  și  $\mu$  în (3.1.18) rezultă:

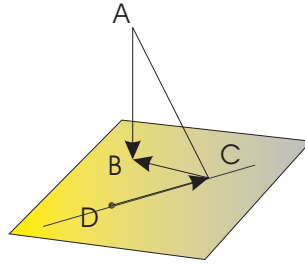
$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \kappa ((\vec{v}_1 \vec{v}_3) \vec{v}_2 - (\vec{v}_1 \vec{v}_2) \vec{v}_3).$$

Lășăm pe seama cititorului să demonstreze egalitatea  $\kappa = 1$ . ■

Formula lui Gibbs se poate reține:

$$\vec{v}_1 \times (\vec{v}_2 \times \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ \vec{v}_1 \vec{v}_2 & \vec{v}_1 \vec{v}_3 \end{vmatrix}.$$

**Exercițiul 3.1.1** Să se demonstreze, folosind produsul scalar, theorem celor trei perpendiculare: dacă dintr-un punct exterior unui plan duc perpendiculară pe plan și pe o dreaptă din plan, atunci dreapta care unește picioarele celor două perpendiculare este perpendiculară pe dreapta din plan.



Transcriem enunțul cu vectori: Ipotezele:  $\vec{AB} \cdot \vec{CB} = 0$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0$ ,  $\vec{AC} \cdot \vec{DC} = 0$ . Concluzia:  $\vec{CB} \cdot \vec{DC} = 0$ . Demonstrația:

$$\begin{aligned} \vec{CB} \cdot \vec{DC} &= (\vec{CA} + \vec{AB}) \cdot \vec{DC} = \\ &= \vec{CA} \cdot \vec{DC} + \vec{AB} \cdot \vec{DC} = 0 \end{aligned}$$

## 3.2 Baricentru

Fie  $n$  puncte  $A_1, A_2, \dots, A_n$  și  $n$  numere reale  $(m_i)_{i=1, n}$ ,

$$\sum_{i=1}^n m_i = m \neq 0.$$

**Teorema 3.2.1** Există un singur punct  $G$  astfel încât:

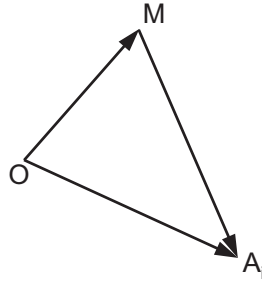
$$m_1 \vec{GA_1} + m_2 \vec{GA_2} + \dots + m_n \vec{GA_n} = \vec{0} \quad (3.2.1)$$

și pentru orice punct  $M$ :

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{MA_i} = m \vec{MG} \quad (3.2.2)$$

**Demonstrație:** Atașăm fiecărui punct  $M$  vectorul:

$$\vec{\varphi}(M) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{MA_i} \quad (3.2.3)$$



Vectori de poziție

conform figurii de mai sus avem:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi(M)} &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^n m_i (\overrightarrow{OA_i} - \overrightarrow{OM}) = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i} - (\sum_{i=1}^n m_i) \overrightarrow{OM} = \\ &= \overrightarrow{\varphi(O)} - m \overrightarrow{OM}\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

Egalitatea (3.2.1) poate fi interpretată ca  $\overrightarrow{\varphi(G)} = \vec{0}$ . Din (3.2.4) rezultă:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (3.2.5)$$

Înlocuind egalitatea (3.2.5) în (3.2.4) rezultă:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi(M)} &= \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{MA_i} = \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} - \left( \sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OM} = \\ &= m \overrightarrow{OG} - m \overrightarrow{OM} = m (\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OM}) = m \overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

adică tocmai egalitatea (3.2.2). Să demonstrăm acum unicitatea. Presupunem că există încă un punct  $G'$  care verifică (3.2.1-3.2.2). Atunci:

$$\vec{0} = \overrightarrow{\varphi(G')} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{G'A_i} = m \overrightarrow{G'G}$$

și deoarece  $m \neq 0$  rezultă  $G = G'$ .

Cazuri particulare:

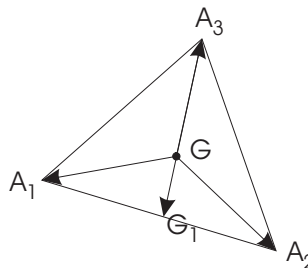
1.  $n = 2, m_1 = m_2 = 1$ . Există un punct  $G$  astfel încât:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} &= 2\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

Din prima egalitate rezultă că  $G$  este mijlocul segmentului  $A_1A_2$ .

2.  $n = 3, m_1 = m_2 = m_3 = 1$ . Există un punct  $G$  astfel încât:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} &= 3\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$



Din prima egalitate:

$$(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2}) + \overrightarrow{GA_3} = \vec{0}$$

adică :

$$2\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GA_3} = \vec{0}$$

unde  $G_1$  este mijloc  $A_1A_2$ . Deci punctele  $G, G_1, A_3$  sunt coliniare și  $GA_3 = 2GG_1$ .

3.  $n = 4$  și  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = 1$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MA_3} + \overrightarrow{MA_4} &= 4\overrightarrow{MG}.\end{aligned}$$

prima:

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2}) + (\overrightarrow{GA_3} + \overrightarrow{GA_4}) &= \vec{0} \\ 2\overrightarrow{GG'} + 2\overrightarrow{GG''} &= \vec{0}\end{aligned}$$

unde  $G'$  este mijloc  $A_1A_2$  și  $G''$  mijloc  $A_3A_4$ , deci  $G$  este mijloc  $G'G''$ ; dar :

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_3}) + \overrightarrow{GA_4} &= \vec{0} \\ 3\overrightarrow{GG_4} + \overrightarrow{GA_4} &= \vec{0}\end{aligned}$$

unde  $G_4$  este centrul de greutate al  $\triangle A_1A_2A_3$ .

### 3.3 Bază, coordonate, exprimarea operațiilor cu vectori folosind coordonatele

#### 3.3.1 Bază și coordonate

În acest paragraf vom generaliza noțiunea de vectori coliniari și vectori coplanari, pornind de la remarcă 3.1.8 și theorem 3.1.6:

**Definitia 3.3.1** Vectorii  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  se numesc liniar dependenți dacă există  $n$  scalari  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , nu toți nuli (adică  $\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \neq 0$ ) astfel încât:

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}, \quad (3.3.1)$$

și liniar independenți în caz contrar.

**Remarca 3.3.1** Doi vectori coliniari sunt liniar dependenți, căci conform remarcii mai sus amintite dacă  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  sunt coliniari atunci există un scalar  $\alpha$  astfel încât  $\vec{v}_1 = \alpha \vec{v}_2$  sau  $\vec{v}_2 = \alpha \vec{v}_1$  deci este verificată (3.3.1) cu  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -\alpha$  sau  $\lambda_1 = -\alpha, \lambda_2 = 1$ . Invers, dacă doi vectori sunt liniar dependenți atunci ei sunt coliniari, deoarece din  $\lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 = \vec{0}$  dacă  $\lambda_1 \neq 0$  rezultă  $\vec{v}_1 = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1} \vec{v}_2$ , iar dacă  $\lambda_2 \neq 0$  rezultă  $\vec{v}_2 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2} \vec{v}_1$ . Analog se arată (folosind theorem 3.1.6) că trei vectori coplanari sunt liniar dependenți și reciproc, trei vectori liniar dependenți sunt coplanari.

**Remarca 3.3.2** Suma din membrul stâng al egalității (3.3.1) se numește combinație liniară a vectorilor  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ , iar liniar independența lor este echivalentă cu afirmația: ”dacă o combinație liniară a vectorilor este egală cu vectorul nul, atunci toți scalarii din combinația liniară sunt nuli”.

**Remarca 3.3.3** Dacă unul din vectorii  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  este vectorul nul atunci ei sunt liniar independenți, deoarece putem lua scalarul corespunzător vectorului nul egal cu 1 iar ceilalți scalari egali cu 0 și egalitatea (3.3.1) este adevărată.

Folosind noțiunea de liniar dependență theorem 3.1.7 se reenunță astfel:

**Teorema 3.3.1** *Orice patru vectori din  $\mathcal{V}_3$  sunt liniar dependenți.*

**Demonstrație.** Fie vectorii  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$ . Dacă  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  sunt coplanari atunci, conform remarcii 3.3.1 ei sunt liniari dependenți, de unde rezultă că (vezi remarcă precedentă)  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$  sunt liniari dependenți. Dacă  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  nu sunt coplanari, atunci conform teoremei 3.1.7, există scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  astfel încât:

$$\bar{v}_4 = \lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3, \quad (3.3.2)$$

de unde rezultă  $\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \lambda_3 \bar{v}_3 - 1 \bar{v}_4 = 0$ , deci  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$  sunt liniari dependenți ( $\lambda_4 = -1 \neq 0$ ). ■

Folosind noțiunile de liniar dependență și liniar independență suntem în măsură să definim noțiunea de bază:

**Definitia 3.3.2** *O mulțime de vectori  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\} \subset \mathcal{V}_3$  se numește bază dacă verifică următoarele condiții:*

1. *Vectorii  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  sunt liniar independenți.*
2. *Oricare ar fi vectorul  $\bar{v} \in \mathcal{V}_3$  vectorii  $\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$  sunt liniar dependenți.*

Bineînțeles că se pune probleme dacă în  $\mathcal{V}_3$  există o bază și dacă existe mai multe baze, prin ce se aseamănă ele. Răspunsul la aceste probleme este dat de următoarea teoremă:

**Teorema 3.3.2** *Orice mulțime formată din trei vectori necoplanari formează o bază în  $\mathcal{V}_3$ .*

**Demonstrație.** Fie  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  trei vectori necoplanari. Repetând raționamentul de la demonstrația teoremei precedente rezultă că pentru orice vector  $\bar{v}_4$  există scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  astfel încât egalitatea (3.3.2) să fie adevărată, deci  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4$  sunt liniari dependenți. ■

**Remarca 3.3.4** theorem precedentă precizează că există baze în  $\mathcal{V}_3$  și că orice bază are exact trei elemente.

În legătură cu formula (3.3.2), este adevărată următoarea teoremă:

**Teorema 3.3.3** *Dacă  $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  este o bază în  $\mathcal{V}_3$  atunci pentru orice  $\bar{v}_4 \in \mathcal{V}_3$  scalarii care apar în (3.3.2) sunt unici.*

**Demonstrație.** Presupunem că există scalarii  $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3$  astfel încât  $\bar{v}_4 = \lambda'_1 \bar{v}_1 + \lambda'_2 \bar{v}_2 + \lambda'_3 \bar{v}_3$ . Scăzând din această egalitate egalitatea 3.3.2 rezultă  $(\lambda'_1 - \lambda_1) \bar{v}_1 + (\lambda'_2 - \lambda_2) \bar{v}_2 + (\lambda'_3 - \lambda_3) \bar{v}_3 = \bar{0}$ . Din liniar independența vectorilor  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  rezultă (vezi remarcă 3.3.2) că  $\lambda'_1 - \lambda_1 = 0, \lambda'_2 - \lambda_2 = 0, \lambda'_3 - \lambda_3 = 0$ , deci  $\lambda'_1 = \lambda_1, \lambda'_2 = \lambda_2, \lambda'_3 = \lambda_3$ . ■

theorem precedentă ne permite să dăm următoarea definiție:

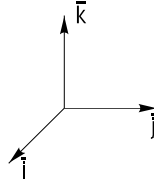
**Definitia 3.3.3** *Dacă  $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  este o bază în mulțimea  $\mathcal{V}_3$  atunci pentru un vector  $\bar{v}_4$  scalarii  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  din formula (3.3.2) se numesc coordonatele vectorului  $\bar{v}_4$  în baza  $\mathcal{B}$ .*

Dacă asupra vectorilor care formează baza punem condiții suplimentare, obținem baze cu diferite denumiri, conform definiției de mai jos:

**Definitia 3.3.4** *O bază  $\mathcal{B} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$  se numește:*

1. *ortogonală dacă fiecare dintre vectorii  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$  este perpendicular pe ceilalți;*
2. *ortonormată dacă este ortogonală și vectorii care o formează sunt versori;*
3. *ortonormată direct orientată dacă este ortonormată și  $\bar{v}_3 = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ .*

Vectorii care formează o bază ortonormată direct orientată îi vom nota cu  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ , ca și în figura de mai jos:



și în acest caz vom nota coordonatele unui vector  $\bar{v}$  cu literele  $x, y, z$  (adică  $\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ). Notăm  $\bar{v}(x, y, z)$ .

### Exprimarea operațiilor cu vectori folosind coordonatele

Deoarece legătura dintre operațiile cu vectori și operațiile cu coordonatele lor într-o bază arbitrară nu este chiar atât de simplă în cazul produselor, vom utiliza în cele ce urmează doar baze ortonormate direct orientate. În acest caz este adevărată următoarea teoremă:

**Teorema 3.3.4** Dacă  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  este o bază ortonormată direct orientată și vectorii  $\bar{v}_n, n = \overline{1, 3}$  au coordonatele  $(x_n, y_n, z_n)$  atunci sunt adevărate următoarele egalități:

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}; \quad (3.3.3)$$

$$\alpha\bar{v}_1 = (\alpha x_1)\bar{i} + (\alpha y_1)\bar{j} + (\alpha z_1)\bar{k}; \quad (3.3.4)$$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2; \quad (3.3.5)$$

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\bar{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\bar{k}; \quad (3.3.6)$$

$$(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \quad (3.3.7)$$

**Demonstrație.** Demonstrația egalităților (3.3.3) și (3.3.4) rezultă din proprietățile operațiilor de adunare a doi vectori (vezi theorem 3.1.4) și înmulțirea unui vector cu un scalar (vezi theorem 3.1.5), precum și din unicitatea coordonatelor unui vector într-o bază dată. Astfel (3.3.3) rezultă din următorul șir de egalități:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 + \bar{v}_2 &= (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) + (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = \\ &= x_1\bar{i} + x_2\bar{i} + y_1\bar{j} + y_2\bar{j} + z_1\bar{k} + z_2\bar{k} = \\ &= (x_1 + x_2)\bar{i} + (y_1 + y_2)\bar{j} + (z_1 + z_2)\bar{k}. \end{aligned}$$

Egalitatea (3.3.5) rezultă din proprietățile (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10) ale produsului scalar, precum și din egalitățile  $\bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1^2, \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0$ , (baza fiind ortonormată):

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_2 &= (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \cdot (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\bar{i} \cdot \bar{i}) + x_1 y_2 (\bar{i} \cdot \bar{j}) + x_1 z_2 (\bar{i} \cdot \bar{k}) + y_1 x_2 (\bar{j} \cdot \bar{i}) + y_1 y_2 (\bar{j} \cdot \bar{j}) + y_1 z_2 (\bar{j} \cdot \bar{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\bar{k} \cdot \bar{i}) + z_1 y_2 (\bar{k} \cdot \bar{j}) + z_1 z_2 (\bar{k} \cdot \bar{k}) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \end{aligned}$$

Egalitatea (3.3.6) rezultă din proprietățile (3.1.11), (3.1.14), (3.1.15) ale produsului vectorial, precum și din egalitățile  $\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}, \bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}, \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$  (baza fiind ortonormată):

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 &= (x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}) \times (x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}) = \\ &= x_1 x_2 (\bar{i} \times \bar{i}) + x_1 y_2 (\bar{i} \times \bar{j}) + x_1 z_2 (\bar{i} \times \bar{k}) + y_1 x_2 (\bar{j} \times \bar{i}) + y_1 y_2 (\bar{j} \times \bar{j}) + y_1 z_2 (\bar{j} \times \bar{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\bar{k} \times \bar{i}) + z_1 y_2 (\bar{k} \times \bar{j}) + z_1 z_2 (\bar{k} \times \bar{k}) = (y_1 z_2 - y_2 z_1)\bar{i} + (z_1 x_2 - z_2 x_1)\bar{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\bar{k}. \end{aligned}$$

Ultima egalitate din teoremă rezultă din aplicarea precedentelor două și din dezvoltarea determinatului din membrul drept după prima linie. ■

**Remarca 3.3.5** Formula 4. se poate reține mai ușor astfel:

$$\bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \quad (3.3.8)$$

căci membrul drept al formulei este (formal) tocmai determinantul de mai sus dezvoltat după prima linie.

**Remarca 3.3.6** Formula lui Gibbs (3.1.17) rezultă și prin calcul, aplicând pentru membrul stâng de două ori formula pentru produsul vectorial, iar pentru membrul drept formulele 3. și 2. din theorem precedentă.

Din theorem precedentă rezultă următoarele consecințe:

**Corolarul 3.3.1** Dacă  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  atunci  $x = \vec{v} \cdot \vec{i}, y = \vec{v} \cdot \vec{j}, z = \vec{v} \cdot \vec{k}$ .

**Demonstrație.** Aplicând formula (3.) rezultă:

$$\vec{v} \cdot \vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) (1 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k}) = x \cdot 1 = x. \blacksquare$$

**Corolarul 3.3.2** Dacă  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  atunci lungimea sa este:

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.3.9)$$

**Demonstrație.** Din definiția produsului scalar rezultă  $v = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$ , și aplicând formula 3. din theorem precedentă rezultă egalitatea (3.3.9). ■

**Corolarul 3.3.3** Dacă  $\vec{v}_l, l = \overline{1, 2}$  au coordonatele  $x_l, y_l, z_l$  și  $\alpha$  este unghiul dintre ei atunci:

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (3.3.10)$$

**Demonstrație.** Din definiția produsului scalar rezultă că  $\cos \alpha = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{v_1 v_2}$ , și se aplică formula 3. din theorem precedentă precum și corolarul precedent.

O consecință a corolarului precedent este:

**Corolarul 3.3.4** Oricare ar fi numerele  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  este adevărată următoarea inegalitate:

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 \leq (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2), \quad (3.3.11)$$

inegalitate care este un caz particular al inegalității Cauchy-Buniakovski-Schwarz.

**Demonstrație.** Se consideră vectorii  $\vec{v}_l, l = \overline{1, 2}$  care au coordonatele  $x_l, y_l, z_l$  și notând cu  $\alpha$  unghiul dintre ei rezultă  $\cos^2 \alpha \leq 1$ . În această inegalitate se înlocuiește  $\cos \alpha$  conform formulei (3.3.10), și aducând la același numitor rezultă (3.3.11).

**Remarca 3.3.7** Din (3.3.10) rezultă că vectorii  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  sunt perpendiculari dacă și numai dacă:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (3.3.12)$$

**Corolarul 3.3.5** Oricare ar fi numerele  $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$  este adevărată următoarea identitate (*identitatea lui Lagrange*):

$$(x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 + (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$$

**Demonstrație.** Raționând ca și la corolarul 4.2.8 rezultă pentru unghiul  $\alpha$  egalitatea  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ , și înlocuind aici  $\cos \alpha$  conform (3.3.10) și  $\sin \alpha$  cu  $\frac{|\vec{v}_1 \times \vec{v}_2|}{v_1 v_2}$ , pe baza formulelor 3. și 4. din theorem precedentă rezultă identitatea de mai sus. ■

**Exemplul 3.3.1** Se dau vectorii  $\vec{v}_1 = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$  și  $\vec{v}_2 = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ . Să se determine un versor  $\vec{v}$  ortogonal pe  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ . Ideea 1:  $\vec{v}' = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ ,  $\vec{v} = \vec{v}' / |\vec{v}'|$ .

$$\begin{aligned}\vec{v}' &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 0\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k} \\ \vec{v} &= \frac{0\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{k}}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2}} = -\frac{\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Ideea 2.  $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .  $\vec{v} \perp \vec{v}_1, \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0$

$$\begin{aligned}x + y - z &= 0 : \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 0 \\ 2x - y + z &= 0 : \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1\end{aligned}$$

rezultă  $x = 0, y = z : 2y^2 = 1$

### 3.4 Geometria analitică liniară în spațiu

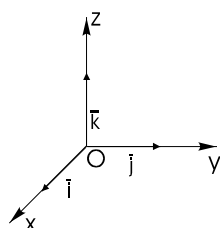
Pentru început să definim câteva noțiuni de bază în geometria analitică în spațiu:.

**Definitia 3.4.1** Se numește reper în spațiu o mulțime formată dintr-un punct  $O$  (numit originea reperului) și o bază din  $\mathcal{V}_3$ . Dacă baza este ortonormată reperul se va numi ortonormat.

**Remarca 3.4.1** În cele ce urmează vom considera numai repere în care baza este ortonormată și direct orientată. Un astfel de reper, conform notațiilor din secțiunea 4.3.4 se va nota cu  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ .

**Definitia 3.4.2** Se numește vector de poziție al unui punct  $M$  din spațiu într-un reper dat vectorul care are ca reprezentant segmentul orientat  $\vec{OM}$ . Se numesc coordonatele unui punct  $M$  într-un reper coordonatele vectorului de poziție al punctului  $M$  în baza din reper.

**Remarca 3.4.2** Dacă avem dat reperul  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  atunci coordonatele punctului  $M$  se notează  $(x, y, z)$  și sunt definite de egalitatea:  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Vom scrie în continuare  $M(x, y, z)$  și vom citi ”punctul  $M$  de coordonate  $(x, y, z)$ ”. Dreptele orientate determinate de  $O$  și versorii  $\vec{i}, \vec{j}$  respectiv  $\vec{k}$  se vor nota cu  $Ox, Oy$  respectiv  $Oz$  și se vor numi axe de coordonate, iar uneori vom folosi denumirea ”reperul  $Oxyz$ ” în loc de reperul  $\{O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , denumire ”justificată” și de desenul de mai jos:



### 3.4.1 Planul în spațiu

În această secțiune vom studia planul din punct de vedere al geometriei analitice, adică vom răspunde la întrebările: Dacă un punct  $M(x, y, z)$  este într-un anumit plan, ce relații există între coordonatele sale? Cum se reflectă asupra coordonatelor punctelor din plan proprietăți geometrice ale planului respectiv?. Pentru început vom răspunde la prima întrebare:

#### Diferite determinări ale planului

Vom studia ce condiții verifică coordonatele unui punct situat într-un plan care este definit prin anumite condiții geometrice:

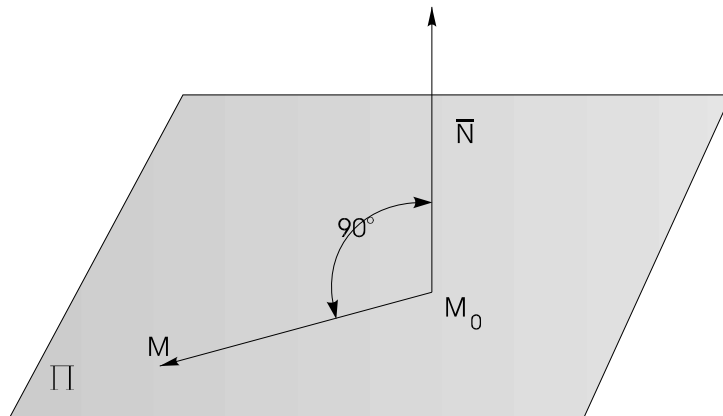
#### Plan determinat de un punct și un vector perpendicular pe plan

Fie punctul  $M_0$  și vectorul  $\vec{N}$  ( $\vec{N} \neq \vec{0}$ ). Din geometria de gimnaziu se știe că există un singur plan, pe care îl vom nota cu  $\Pi$  care trece prin punctul  $M_0$  și este perpendicular pe vectorul  $\vec{N}$ . Fie acum un punct  $M$  arbitrar din planul  $\Pi$ . Este adevărată următoarea teoremă:

**Teorema 3.4.1**  $M \in \Pi$  dacă și numai dacă este adevărată următoarea egalitate:

$$\vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0. \quad (3.4.1)$$

**Demonstrație.** Conform figurii de mai jos (în care  $M_0 \in \Pi$ ,  $\vec{N} \perp \Pi$ , sunt date, iar  $M$  este un punct arbitrar din planul  $\Pi$ ):



punctul  $M$  aparține planului  $\Pi$  dacă și numai dacă vectorii  $\vec{N}$  și  $\vec{M_0M}$  sunt perpendiculari<sup>13</sup>, ceea ce, conform remarcii 3.1.13 este echivalent cu egalitatea (3.4.1). ■

Să transcriem acum egalitatea (3.4.1) folosind coordonatele. Pentru aceasta să notăm coordonatele punctului  $M_0$  cu  $(x_0, y_0, z_0)$ , coordonatele punctului  $M$  cu  $(x, y, z)$  și coordonatele vectorului  $\vec{N}$  cu  $(A, B, C)$ . Atunci, pe baza teoremei 3.3.4 și a definiției coordonatelor unui punct (definiția 3.4.2)  $\vec{M_0M} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$  și deci  $\vec{M_0M} \cdot \vec{N} = (x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C$ , care înlocuită în membrul stâng al egalității (3.4.1) ne conduce la ecuația:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (3.4.2)$$

Dacă în ecuația de mai sus notăm  $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$  rezultă că punctul  $M(x, y, z)$  aparține planului  $\Pi$  dacă și numai dacă coordonatele sale verifică ecuația:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (\text{EGP})$$

<sup>13</sup> conform geometriei din liceu, o dreaptă este perpendiculară pe un plan dacă și numai dacă este perpendiculară pe orice dreaptă din plan.

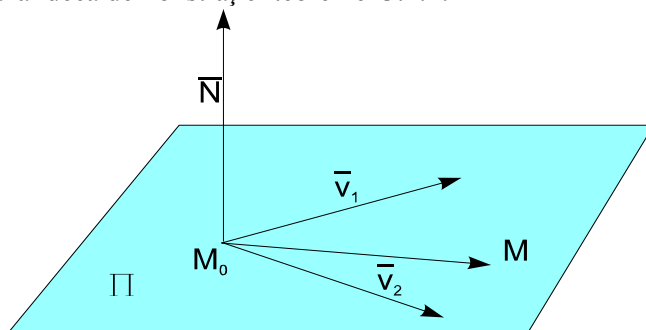
Ecuția (EGP) se numește ecuația generală a planului în spațiu (cu condiția  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ , pentru că  $\vec{N} \neq \vec{0}$ ).

**Exemplul 3.4.1** Ne propunem să aflăm ecuația planului  $xOy$ . Acest plan este determinat de punctul  $O(0, 0, 0)$  și are ca vector normal versorul  $\vec{k}$ , deci  $A = 0, B = 0, C = 1$ . Înlocuind în formula (3.4.2) obținem ecuația planului  $xOy$ :

$$z = 0. \quad (3.4.3)$$

### Plan determinat de un punct și doi vectori necoliniari paraleli cu planul

Fie un punct  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  și vectorii  $\vec{v}_1 = a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k}$ ,  $\vec{v}_2 = a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k}$  necoliniari (adică, conform remarcii 3.1.15  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \neq \vec{0}$ ). Ne propunem să aflăm ce ecuație (sau ecuații) verifică coordonatele unui punct  $M(x, y, z)$  care aparține unui plan  $\Pi$  care conține punctul  $M_0$  și este paralel cu vectorii  $\vec{v}_1$  și  $\vec{v}_2$ . Figura de mai jos ilustrează ideea demonstrației teoremei 3.4.2:



Analogul teoremei 3.4.1 este:

**Teorema 3.4.2** Punctul  $M$  aparține planului  $\Pi$  dacă și numai dacă este verificată ecuația:

$$(\overrightarrow{MM_0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0 \quad (3.4.4)$$

$$\overrightarrow{MM_0} \cdot (\vec{v}_1 \times \vec{v}_2) = 0 \quad (3.4.5)$$

**Demonstrație.** Punctul  $M$  aparține planului  $\Pi$  dacă și numai dacă vectorii  $\overrightarrow{MM_0}, \vec{v}_1, \vec{v}_2$  sunt coplanari, ceea ce este echivalent cu egalitatea (3.4.4), conform remarcii 3.1.16.

Folosind coordonatele egalitatea (3.4.4) se scrie, conform operațiilor cu vectori (vezi formula (3.3.7)):

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \blacksquare \quad (3.4.6)$$

**Remarca 3.4.3** Ecuația (3.4.6) se rescrie, folosind dezvoltarea unui determinant de ordin 3 după prima linie:

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} (x - x_0) + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} (y - y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (z - z_0) = 0$$

**Remarca 3.4.4** Din formulele de mai sus se pot obține ecuațiile parametrice ale planului:

$$\begin{cases} x = a_1 t + a_2 s + x_0 \\ y = b_1 t + b_2 s + y_0 \\ z = c_1 t + c_2 s + z_0 \end{cases}, t, s \in \mathbb{R}$$

### Plan determinat de trei puncte necoliniare

Fie punctele  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  necoliniare (adică vectorii  $\overrightarrow{M_1M_2}$  și  $\overrightarrow{M_1M_3}$  sunt necoliniari, sau folosind operații cu vectori, conform remarcii 3.1.12,  $\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \neq \vec{0}$ ). Ecuația planului determinat de cele trei puncte este dată de:

**Teorema 3.4.3** Planul  $\Pi$  care trece prin punctele  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  necoliniare are ecuația:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4.7)$$

**Demonstrație. Varianta 1.** (geometrică) Reducem problema la cazul precedent, considerând că planul  $\Pi$  este determinat de punctul  $M_1$  și vectorii  $\overrightarrow{M_1M_2}$  și  $\overrightarrow{M_1M_3}$ . Conform formulei (3.4.6) ecuația planului este:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuație care se poate scrie:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 & 0 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

adunând în determinantul de mai sus linia a doua la celelalte linii obținem ecuația (3.4.7).

**Varianta a 2-a.** (algebrică) Ecuația planului  $\Pi$  (vezi (EGP)) este:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3.4.8)$$

A determina ecuația planului  $\Pi$  se reduce la a determina coeficienții  $A, B, C, D$  din ecuația de mai sus. Scriind că punctele  $M_i$ ,  $i = \overline{1, 3}$  verifică această ecuație rezultă:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0. \end{cases} \quad (3.4.9)$$

Rezolvând acest sistem cu necunoscutele  $A, B, C$  (care are determinantul nenul din condiția de necoliniaritate a punctelor  $M_1, M_2, M_3$ ) și înlocuind în (3.6.6) rezultă ecuația planului  $\Pi$ . În loc să procedăm așa, considerăm sistemul omogen (cu necunoscutele  $A, B, C, D$ ) format din sistemul (3.4.9) și ecuația (3.6.6), sistem care are soluție nenulă. Condiția ca acest sistem să aibă soluție nenulă este ca determinantul său să fie egal cu 0, adică tocmai ecuația (3.4.7). ■

### Poziția relativă a două plane, unghiul a două plane

Fie planele  $\Pi_1, \Pi_2$  de ecuații, respectiv, :

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Poziția relativă a celor două plane, determinată pe baza ecuațiilor (3.4.10), este dată de :

**Teorema 3.4.4** Planele  $\Pi_1, \Pi_2$  sunt paralele, dacă

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \quad (3.4.11)$$

coincid dacă:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2} \quad (3.4.12)$$

și au o dreaptă comună dacă rangul matricei  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$  este doi.

**Demonstrație.** Dacă rangul matricei  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix}$  este doi atunci sistemul (3.4.10) format din ecuațiile celor două plane este simplu nedeterminat, iar soluțiile sale sunt coordonatele punctelor de pe o dreaptă (va urma). Dacă rangul matricei precedente este unu, atunci sistemul (3.4.10) este incompatibil, dacă rangul matricei extinse este doi, ceea ce este echivalent cu (3.4.11), și deci planele sunt paralele, sau sistemul (3.4.10) este compatibil cu rangul matricei extinse egal cu unu, ceea ce e echivalent cu (3.4.12), și în acest caz cele două ecuații se obțin una din cealaltă prin înmulțirea cu o constantă  $= \frac{A_2}{A_1}$ , deci reprezintă același plan. ■

**Remarca 3.4.5** Dacă se ține cont de semnificația geometrică a coeficienților lui  $x, y, z$  din (EGP) (ei sunt coordonatele normalei la plan), atunci egalitatea primelor trei rapoarte din (3.4.11), (3.4.12) nu este altceva decât paralelismul normalelor la plane.

Unghiul a două plane se definește astfel:

**Definiția 3.4.3** Unghiul planelor  $\Pi_1, \Pi_2$  date prin ecuațiile (3.4.10) este unghiul dintre normalele la cele două plane  $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$ ,  $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$ .

**Teorema 3.4.5** Dacă notăm cu  $\alpha$  unghiul celor două plane, atunci:

$$\cos \alpha = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Demonstrația formulei de mai sus este simplă, rezultând direct din definiția precedentă și din formula (3.3.10) care dă unghiul a doi vectori pe baza coordonatelor.

Din theorem de mai sus rezultă:

**Corolarul 3.4.1** Planele  $\Pi_1, \Pi_2$  date prin ecuațiile (3.4.10) sunt perpendiculare dacă și numai dacă:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

**Exemplul 3.4.2** Să se verifice că planele de ecuații  $x + y + z - 6 = 0$ ,  $x - 2y + z - 255 = 0$  sunt perpendiculare.

Cf. corolarului cu  $A_1 = B_1 = C_1 = 1$ ,  $A_2 = C_2 = 1$ ,  $B_2 = -2$ :

$$1 - 2 + 1 = 0.$$

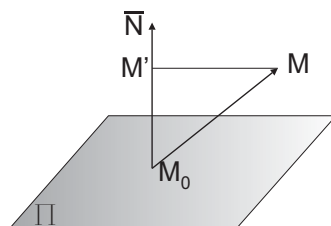
### Distanța de la un punct la un plan

Fie planul  $\Pi$  de ecuație (EGP), și punctul  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ .

**Teorema 3.4.6** Distanța de la punctul  $M$  la planul  $\Pi$  este egală cu:

$$\text{dist}(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (3.4.13)$$

**Demonstrație.** Să facem figura:



în figura de mai sus  $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$  este normala la planul  $\Pi$ ,  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  este un punct din plan (deci coordonatele sale verifică ecuația planului), iar  $M'_1$  este proiecția punctului  $M_1$  pe normală. Conform

geometriei "clasice" distanța de la  $M_1$  la planul  $\Pi$  este egală cu lungimea segmentului  $M_0M'_1$ . Dar din proprietățile produsului scalar avem:

$$\begin{aligned} M_0M'_1 &= \frac{|\vec{N} \cdot \vec{M_0M_1}|}{N} = \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \\ &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

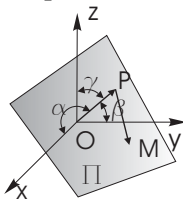
**Exemplul 3.4.3** Să se afle distanța de la punctul  $M_1(2, 3, 5)$  la planul  $x + 2y - 2z - 5 = 0$ .

Rezolvare: se aplică formula precedentă:

$$dist = \frac{|2 + 2 \cdot 3 + (-2) \cdot 5 - 5|}{\sqrt{1^2 + (2)^2 + (-2)^2}} = \frac{|-7|}{3} = \frac{7}{3}.$$

### Ecuția normală a unui plan (Hesse)

Fie  $\Pi$  un plan pentru care se cunoaște distanța de la origine la plan  $d$  și unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$  făcute de perpendiculara coborâtă din origine pe plan cu axele de coordonate. Să notăm cu  $P$  piciorul perpendicularei coborâte din origine pe plan și cu  $M(x, y, z)$  un punct arbitrar din plan.



Din datele cunoscute avem  $\vec{OP} = d(\cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k})$ , iar condiția ca  $M \in \Pi$  este echivalentă cu  $\vec{OP} \cdot \vec{PM} = 0$ . Transcriind această egalitate în coordonate avem:

$$d(\cos \alpha(-d \cos \alpha + x) + \cos \beta(-d \cos \beta + y) + \cos \gamma(-d \cos \gamma + z)) = 0$$

sau făcând calculele și ținând cont că  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ , rezultă că coordonatele punctului  $M$  verifică ecuația:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - d = 0 \quad (3.4.14)$$

Ecuția (3.4.14) se numește ecuația normală a planului (sau forma Hesse).

**Remarca 3.4.6** Din ecuația generală a planului se ajunge la ecuația normală a planului prin împărțirea ecuației (EGP) cu  $\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ , alegând semnul astfel ca în ecuația obținută termenul liber să fie negativ:

$$\frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}x + \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}y + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}z + \frac{D}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

**Remarca 3.4.7** O altă formă a ecuației planului este așa numita "ecuația planului prin tăieturi" de forma:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= 1 \\ Ax + By + Cz &= -D : (-D) \\ -\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z &= 1 \\ \frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} &= 1 \end{aligned}$$

care se obține din (EGP) prin împărțirea cu  $-D$ . Numitorii din ecuația de mai sus sunt tocmai coordonatele punctelor de intersecție cu axele (adică planul intersectează axa  $Ox$  în punctul  $(a, 0, 0)$ , axa  $Oy$  în punctul  $(0, b, 0)$  și axa  $Oz$  în  $(0, 0, c)$ ).

**Exercitiul 3.4.1** Să se afle latura cubului care are două fețe în planele  $x+2y+2z-6=0$ ,  $x+2y+2z+3=0$ .

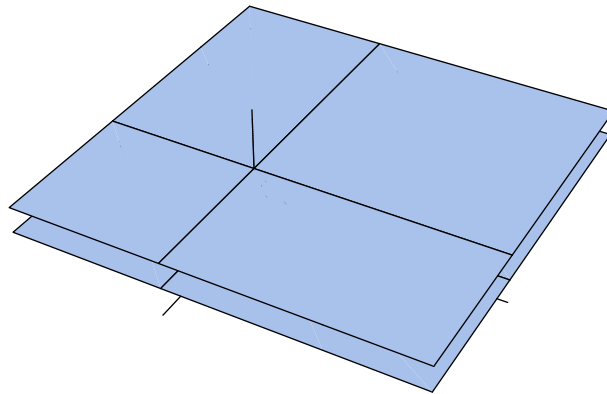
Sub forma "prin tăieturi":

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1, \frac{x}{-3} + \frac{y}{-3/2} + \frac{z}{-3/2} = 1$$

Sub forma Hesse cele 2 ec. devin (prin împărțire cu  $\pm\sqrt{1^2+2^2+2^2}$ :

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} - 2 = 0, -\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} - \frac{2z}{3} - 1 = 0$$

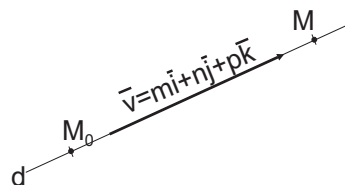
de unde  $l = 3$ .



### 3.4.2 Dreapta în spațiu

#### Dreapta determinată de un punct și un vector paralel cu ea

Fie o dreaptă  $d$  determinată de un punct  $M_0$  și un vector  $\vec{v} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$  - numit vector director al dreptei - (o "direcție") paralel cu ea, conform figurii:



Dacă  $M$  este un punct arbitrar pe dreaptă, acest lucru este echivalent cu (vezi remarcă 3.3.1) există  $t$  astfel încât:

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R}$$

Considerând că  $M$  are coordonatele  $(x, y, z)$  iar  $M_0$  are coordonatele  $(x_0, y_0, z_0)$ , egalitatea de mai sus devine:

$$(x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k} = t(m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}).$$

Egalând coordonatele vectorilor din egalitatea vectorială rezultă:

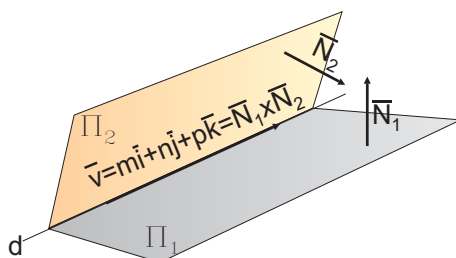
$$\begin{cases} x = mt + x_0 \\ y = nt + y_0 \\ z = pt + z_0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad (\text{EPD})$$

Ecuțiile de mai sus poartă numele de **ecuații parametrice ale unei drepte în spațiu**. Dacă rezolvăm fiecare ecuație în raport cu  $t$  și egalăm rapoartele astfel obținute rezultă **ecuațiile canonice ale unei drepte în spațiu**:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} \quad (\text{ECD})$$

**Remarca 3.4.8** Ecuțiile parametrice ale unei drepte se pot interpreta ca legea de mișcare a unui punct material care pleacă din  $M_0$  și se deplasează cu viteza constantă  $\vec{v}$ .

### Dreapta ca intersecție de două plane neparalele



Fie dreapta  $d = \Pi_1 \cap \Pi_2$ , conform figurii de mai sus. Dacă ecuațiile celor două plane sunt:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

atunci coordonatele oricărui punct de pe dreaptă verifică sistemul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (\text{EDDP})$$

Ne propunem să deducem din ecuațiile de mai sus ecuațiile canonice ale dreptei. Pentru aceasta să observăm că vector director al dreptei se poate scrie ca produsul vectorial al normalelor la cele două plane, deoarece este un vector în ambele plane, deci perpendicular pe ambele normale:

$$\vec{v} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

(am folosit expresia analitică a produsului vectorial (3.3.8)). Punctul  $M_0$  de pe dreaptă îl alegem ca având coordonatele o soluție oarecare a sistemului (EDDP). Atunci ecuațiile canonice ale dreptei determinate de două plane sunt:

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

**Exemplul 3.4.1** Să se scrie ecuațiile canonice ale axei  $Ox$  știind că ea e intersecția planelor  $xOy$  și  $xOz$ . Ecuația planului  $xOy$  este  $z = 0$  iar ecuația planului  $xOz$  este  $y = 0$ , deci ecuațiile axei  $Ox$  sunt:

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ecuațiile canonice ale axei  $Ox$  vor fi:

$$\frac{x - 0}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y - 0}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z - 0}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

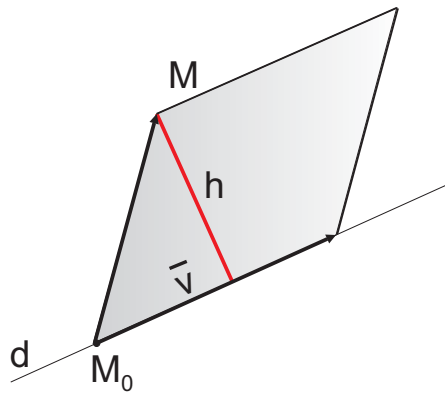
sau făcând calculele:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}.$$

**Remarca 3.4.9** Dacă într-un șir de rapoarte egale un numitor e 0 atunci se consideră automat că și numărătorul este nul.

### Distanța de la un punct la o dreaptă

Fie punctul  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  și dreapta  $d$  de ecuații canonice (ECD). Distanța de la punctul dat la dreaptă este egală cu înălțimea  $h$  a paralelogramului construit pe vectorii  $\vec{v}$  și  $\overrightarrow{M_0M_1}$ , conform figurii de mai jos:



Folosind operațiile cu vectori rezultă:

$$h = \frac{|\vec{v} \times \overrightarrow{M_0M_1}|}{v} = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} n & p \\ y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p & m \\ z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m & n \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

**Remarca 3.4.10**

$$\vec{v} \times \overrightarrow{M_0M_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & n & p \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}$$

**Remarca 3.4.11** Distanța de la un punct la o dreaptă se poate afla și ca minimul distanțelor de la punctul dat la un punct care parcurge dreapta, în acest caz folosindu-se ecuațiile parametrice ale drepte și calculând minimul unei funcții de grad 2:

$$\begin{aligned} f(t) &= (mt + x_0 - x_1)^2 + (nt + y_0 - y_1)^2 + (pt + z_0 - z_1)^2 = \\ &= at^2 + bt + c, a = m^2 + n^2 + p^2, b = \dots, c = \dots \\ \min f(t) &= -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

**Exemplul 3.4.2** Să se afle distanța de la punctul  $M_1(2, 2, 1)$  la dreapta de ecuații:

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2} = t$$

funcția de minimizat:

$$\begin{aligned} f(t) &= (t - 2)^2 + (t - 2)^2 + (2t - 1)^2 = \\ &= 6t^2 - 12t + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\min f(t) &= -\frac{(-12)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 9}{4 \cdot 6} = 3 \\ -\frac{b}{2a} &= -\frac{-12}{2 \cdot 6} = 1, \min f(t) = f(1)\end{aligned}$$

Distanța minimă:  $\sqrt{3}$ .

### Poziția relativă a trei plane

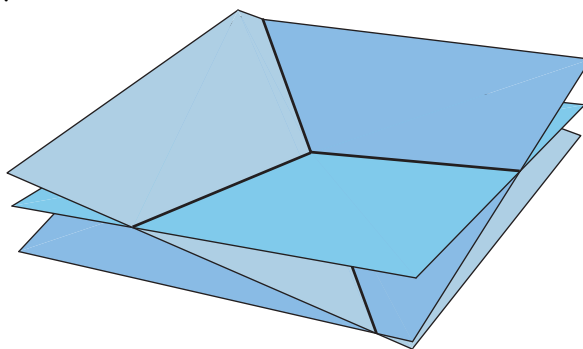
Fie planele  $\Pi_i$   $i = \overline{1, 3}$  trei plane. A stabili poziția lor relativă înseamnă a determina punctele comune. Din punct de vedere algebric aceasta este echivalent cu discuția sistemului format cu ecuațiile celor trei plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1 \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2 \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3 \end{cases} \quad (\text{STrei})$$

Discuția sistemului este următoarea:

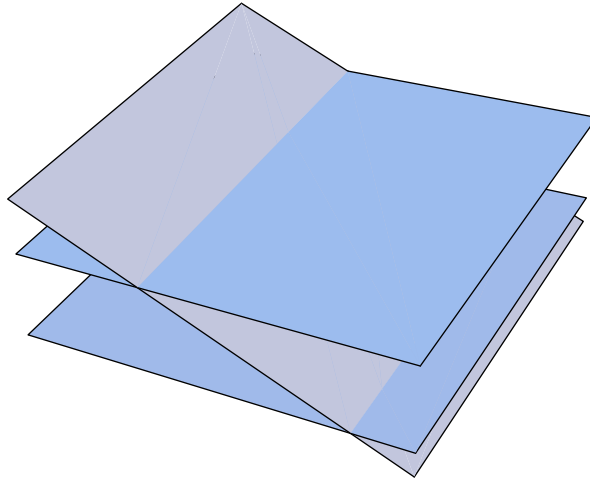
1. Sistemul (STrei) are soluție unică, dacă determinantul  $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = (\overline{N}_1, \overline{N}_2, \overline{N}_3)$  este nenul.

Geometric înseamnă că cele trei plane au un singur punct comun (normalele la plane nu sunt în același plan), vezi figura următoare:

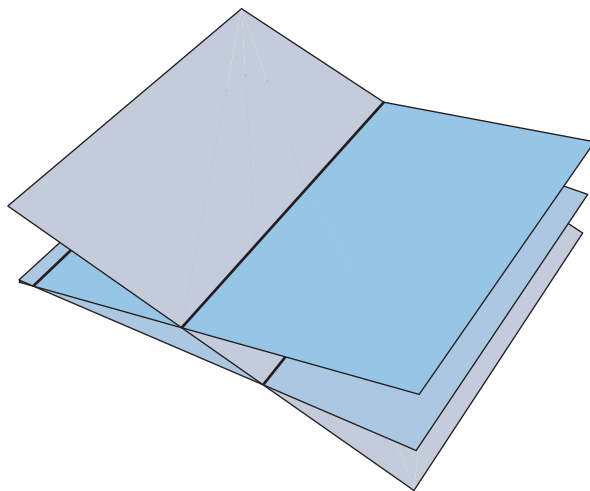


2. Rangul matricei  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$  este doi, iar sistemul este incompatibil. În acest caz sunt două subcazuri:

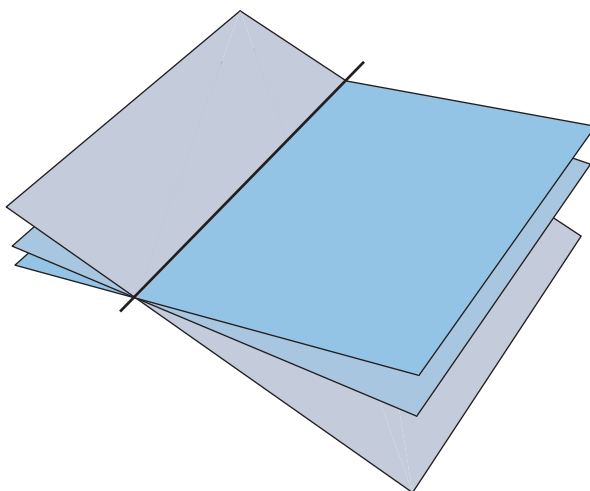
- (a) Două linii din matricea de mai sus sunt proporționale. Atunci două plane sunt paralele, și sunt intersectate fiecare de cel de al treilea plan, conform figurii:



b) Matricea de mai sus nu are linii proporționale. Atunci planele se intersectează două câte două după drepte paralele:



(b) Rangul matricei  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$  este doi, iar sistemul (STrei) este compatibil nederminat. Cele trei plane au o dreaptă comună:



2. Rangul matricei  $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$  este unu.

- (a) Dacă sistemul (STrei) este compatibil atunci cele trei plane coincid.
- (b) Dacă sistemul (STrei) este incompatibil, atunci planele sunt paralele.

### Fascicol de plane

Fie planele  $\Pi_1, \Pi_2$  de ecuații

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

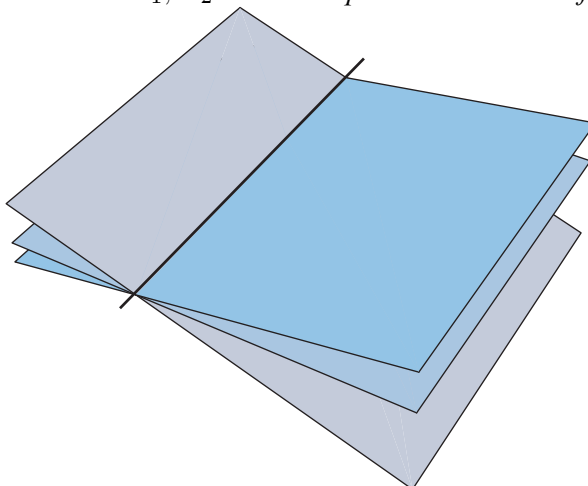
$$\Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

**Definitia 3.4.4** Se numește fascicol de plane mulțimea planelor care au ecuația:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

(fasc)

unde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$ . Planele  $\Pi_1, \Pi_2$  se numesc planele de bază ale fascicolului.



**Remarca 3.4.12** Dacă planele nu sunt paralele, atunci pentru  $\lambda, \mu$  luând toate valorile reale obținem toate planele care trec prin dreapta de intersecție, iar dacă sunt paralele, toate planele paralele cu ele.

**Exercitiul 3.4.2** Să se afle ecuația planului care tece prin dreapta de ecuații  
 $-3(x-1) = 2(y+2), 2(y+2) = -3(z-2)$   
 și care este perpendicular pe planul de ecuație  $3x + 2y - z - 15 = 0$ .

Ec. căutată e de forma:

$$\lambda(2(y+2) + 3(x-1)) + \mu(2(y+2) + 3(z-2)) = 0$$

normala la acest plan este:

$$\vec{N} = 3\lambda\vec{i} + (2\lambda + 2\mu)\vec{j} + (3\mu)\vec{k}$$

Normala la planul  $3x + 2y - z - 15 = 0$  este  $\vec{N}_1 = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ . Cond. de  $\perp$  este:

$$(3\lambda)3 + (2\lambda + 2\mu)2 + (3\mu)(-1) = 0$$

adică:

$$13\lambda + \mu = 0 : \mu = -13\lambda$$

$$\lambda(2(y+2) + 3(x-1)) - 13\lambda(2(y+2) + 3(z-2)) = 0$$

$$3x - 24y - 39z + 27 = 0$$

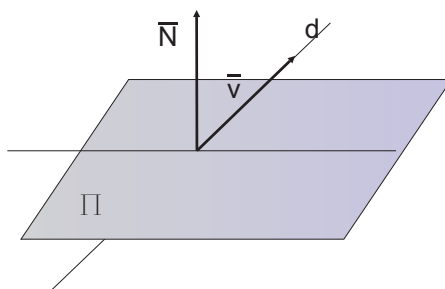
$$x - 8y - 13z + 9 = 0.$$

### Unghiul dintre o dreaptă și un plan

Fie dreapta  $d$  și planul  $\Pi$ .

**Definiția 3.4.5** Unghiul  $\beta$  dintre dreapta  $d$  și planul  $\Pi$  este unghiul dintre dreaptă și proiecția ei ortogonală pe plan.

Dacă dreapta e dată sub forma (ECD) iar planul sub forma (EGP) atunci, conform figurii:

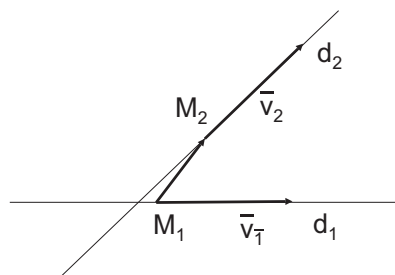


$$\begin{aligned} \sin \beta &= \cos(\vec{N}, \vec{v}) = \frac{\vec{N} \cdot \vec{v}}{Nv} = \\ &= \frac{Am + Bn + Cp}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \end{aligned}$$

### Poziția relativă a două drepte în spațiu

Fie dreptele  $d_1, d_2$  de ecuații:

$$\begin{aligned} \frac{x-x_1}{m_1} &= \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \\ \frac{x-x_2}{m_2} &= \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}. \end{aligned}$$



Ele n-au în general puncte comune (patru ecuații cu trei necunoscute) dacă:

$$\left( \overrightarrow{M_1 M_2}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \right) \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Dacă

$$\left( \overrightarrow{M_1 M_2}, \bar{v}_1, \bar{v}_2 \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

atunci sunt trei posibilități:

1.  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ ,  $M_1 \notin d_2$ , dreptele sunt paralele.
2.  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$ ,  $M_1 \in d_2$  dreptele coincid.
3. dacă nu sunt cazurile precedente, dreptele se află în același plan (care?) și au un punct comun. care?: este planul determinat de  $M_1, \bar{v}_1, \bar{v}_2$ .

de ecuație:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

### Perpendiculara comună a două drepte în spațiu

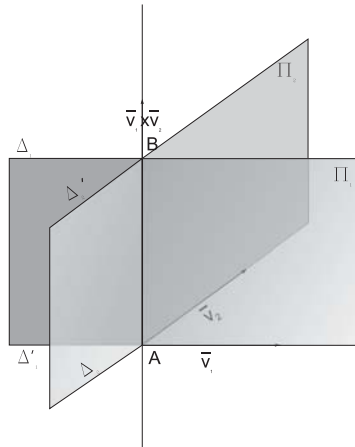
Fie în spațiu dreptele  $d_1, d_2$  de ecuații:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1}$$

$$\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

, neparalele.

**Definiția 3.4.6** Se numește perpendiculara comună a celor două drepte o dreaptă care le intersectează pe amândouă și este perpendiculară pe fiecare.



AB este perpendiculara comună a dreptelor  $\Delta$  și  $\Delta'$ .

**Teorema 3.4.7** Perpendiculara comună a celor două drepte este intersecția planelor  $\Pi_1$  și  $\Pi_2$  determinate de punctul  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ , vectorii  $\bar{v}_1(m_1, n_1, p_1)$  și  $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ , respectiv  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ , vectorii  $\bar{v}_2(m_2, n_2, p_2)$  și  $\bar{v}_1 \times \bar{v}_2$ .

**Remarca 3.4.13** Ecuația planului  $\Pi_1$  este:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0$$

**Definiția 3.4.7** Se numește distanța dintre două drepte în spațiu lungimea segmentului de pe perpendiculara comună cuprins între cele două drepte.

Din geometria sintetică se știe că distanța dintre două drepte este egală cu distanța de la un punct arbitrar al unei drepte la planul paralel cu ea dus la prin cealaltă dreaptă.

Din figura precedentă rezultă că distanța dintre drepte este înălțimea paralelipipedului construit pe vectorii  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \overrightarrow{M_2M_1}$  deci:

$$\begin{aligned} \text{dist}(d_1, d_2) &= \frac{\left| (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \overrightarrow{M_2M_1}) \right|}{|\bar{v}_1 \times \bar{v}_2|} = \\ &= \frac{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2}}. \end{aligned}$$

**Remarca 3.4.14** Perpendiculara comună a două drepte în spațiu și distanța dintre ele se poate afla și folosind Analiza: Se scriu ecuațiile parametrice ale celor două drepte:

$$\begin{aligned} \Delta_1 : \begin{cases} x = m_1 t_1 + x_1 \\ y = n_1 t_1 + y_1 \\ z = p_1 t_1 + z_1 \end{cases} \\ \Delta_2 : \begin{cases} x = m_2 t_2 + x_2 \\ y = n_2 t_2 + y_2 \\ z = p_2 t_2 + z_2 \end{cases} \end{aligned}$$

A a distanța dintre drepte este echivalent cu a a minimul:

$$f(t_1, t_2) = (m_1 t_1 + x_1 - (m_2 t_2 + x_2))^2 + (n_1 t_1 + y_1 - (n_2 t_2 + y_2))^2 + (p_1 t_1 + z_1 - (p_2 t_2 + z_2))^2$$

Minimul este atins pentru  $t_1, t_2$  soluția sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial t_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial t_2} = 0.$$

**Exercitiul 3.4.3** Să se "deseneze" dreapta de ecuații:

$$2x + 3y + 3z = 9$$

$$4x + 2y + z = 8$$

Ideea: se scriu ec. planelor prin tăieturi:

$$\frac{2x}{9} + \frac{3y}{9} + \frac{3z}{9} = 1$$

$$\frac{x}{4.5} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1$$

Deci primul plan intersectează axa  $Ox$  în  $(4.5, 0, 0)$ , axa  $Oy$  în  $(0, 3, 0)$  și axa  $Oz$  în  $(0, 0, 3)$  Analog :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1$$

decu  $Ox (2, 0, 0)$ ,  $Oy (0, 4, 0)$   $Oz (0, 0, 8)$ .

**Exercitiul 3.4.4** Să se a e ecuația planului care trece prin dreapta

$$2x - y - 12z = 3$$

$$3x + y - 7z = 2$$

și este perpendicular pe planul:

$$x + 2y + 5z - 1 = 0.$$

Soluție: ecuația planului căutat este:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Trece prin dreaptă: sistemul format cu ec. dreptei are o infinitate de sol:

$$Ax + By + Cz = -D$$

$$2x - y - 12z = 3$$

$$3x + y - 7z = 2$$

cond.:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ 2 & -1 & -12 \\ 3 & 1 & -7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} A & B & -D \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

din  $\perp$  rezultă:

$$A + 2B + 5C = 0$$

Avem sistemul:

$$\begin{aligned} 19A - 22B + 5C &= 0 \\ 5B - 5A - 5D &= 0 \\ A + 2B + 5C &= 0 \end{aligned}$$

cu soluțiile:

$$A = -4D, B = -3D, C = 2D$$

deci ec.planului căutat este:

$$\begin{aligned} -4Dx - 3Dy + 2Dz + D &= 0 \\ -4x - 3y + 2z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

### 3.5 Sfera

**Definitia 3.5.1** Se numește sferă mulțimea tuturor punctelor din spațiu pentru care distanța la un punct fix numit centrul sferei este egală cu un număr numit raza sferei.

Aria sferei:

$$S = 4\pi R^2$$

Volumul "bilei":

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Fie centrul sferei  $C(a, b, c)$  și raza sferei  $R$ .

**Teorema 3.5.1** Punctul  $M(x, y, z)$  aparține sferei dacă și numai dacă (ddacă) coordonatele sale verifică ecuația:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (3.5.1)$$

**Demonstrație:** distanța de la  $M$  la  $C$  este egală cu  $\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2}$  care egalată cu  $R$  este echivalentă cu (3.5.1).  $\square$

Dacă în ecuația de mai sus se fac calculele și se reduc termenii asemenea obținem:

$$x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0 \quad (\text{EGS})$$

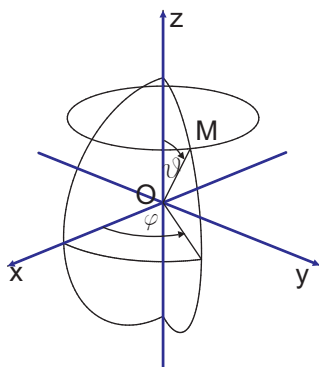
ecuație care poartă denumirea de ecuația generală a sferei. (EGS) reprezintă o sferă cu centrul în punctul  $C\left(-\frac{m}{2}, -\frac{n}{2}, -\frac{p}{2}\right)$  și de rază  $R = \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  dacă expresia de sub radical este pozitivă.

**Remarca 3.5.1** Sfera se mai poate da și folosind ecuațiile parametrice:

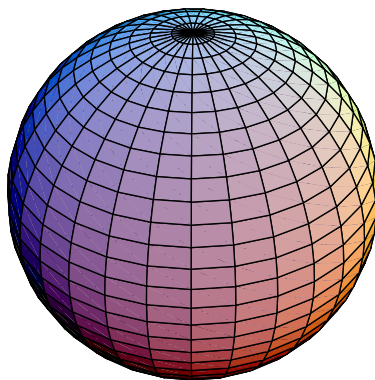
$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \vartheta + a \\ y = R \sin \varphi \sin \vartheta + b \\ z = R \cos \vartheta + c \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi] \quad (\text{EPS})$$

$$\text{sau } \varphi \in [-180, 180], \vartheta \in [0, 180] \quad (3.5.2)$$

unde parametrii sunt unghiurile  $\varphi, \vartheta$  din figura de mai jos:



pentru  $\varphi$  constant se obțin pe sferă jumătăți de cercuri mari ("meridiane"), iar pentru  $\vartheta$  constant se obțin pe sferă cercuri ("paralele").



Legat de sferă ne propunem să determinăm ecuația unui plan tangent la sferă **într-un punct de pe sferă**. Fie  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  un punct pe sferă.

**Teorema 3.5.2** Ecuația planului tangent la sferă în punctul  $M_0$  este:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) = R^2 \quad (\text{EPTS})$$

**Demonstrație\*\*\*:** Planul tangent la sferă în  $M_0$  este determinat de  $M_0$  și normala  $\overrightarrow{OM_0} = (x_0 - a)\vec{i} + (y_0 - b)\vec{j} + (z_0 - c)\vec{k}$  (planul este perpendicular pe rază), deci ecuația sa este (unde  $(x, y, z)$  sunt coordonatele unui punct din planul tangent):

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) + (z - z_0)(z_0 - c) = 0$$

Dar  $x - x_0 = (x - a) - (x_0 - a)$ , .. care înlocuite în ecuația de mai sus dau:

$$(x - a)(x_0 - a) + (y - b)(y_0 - b) + (z - c)(z_0 - c) - ((x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 + (z_0 - c)^2) = 0$$

Ținând cont de faptul că coordonatele lui  $M_0$  verifică ecuația sferei, rezultă (EPTS).  $\square$

**Remarca 3.5.2** Ecuația planului tangent la sferă se obține din (EGS) prin dedublare :

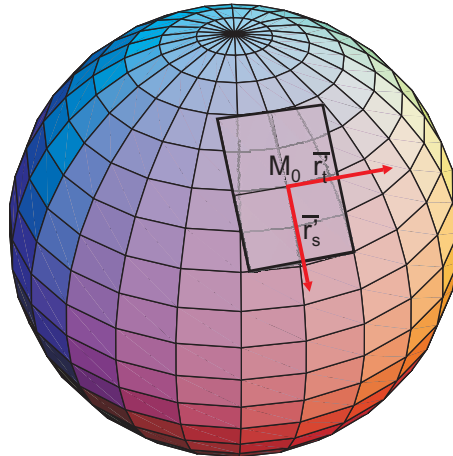
$$(x - a)^2 = (x - a)(x - a) \rightarrow (x - a)(x_0 - a), \dots$$

**Remarca 3.5.3** Dacă sfera este dată sub formă generală atunci ecuația planului tangent în punctul  $M_0$  de

pe sferă este:

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 + m\frac{x+x_0}{2} + n\frac{y+y_0}{2} + p\frac{z+z_0}{2} + q = 0$$

dedublarea fiind:  $x^2 = xx \rightarrow xx_0$ ,  $x = \frac{x+x}{2} \rightarrow \frac{x+x_0}{2}$ .



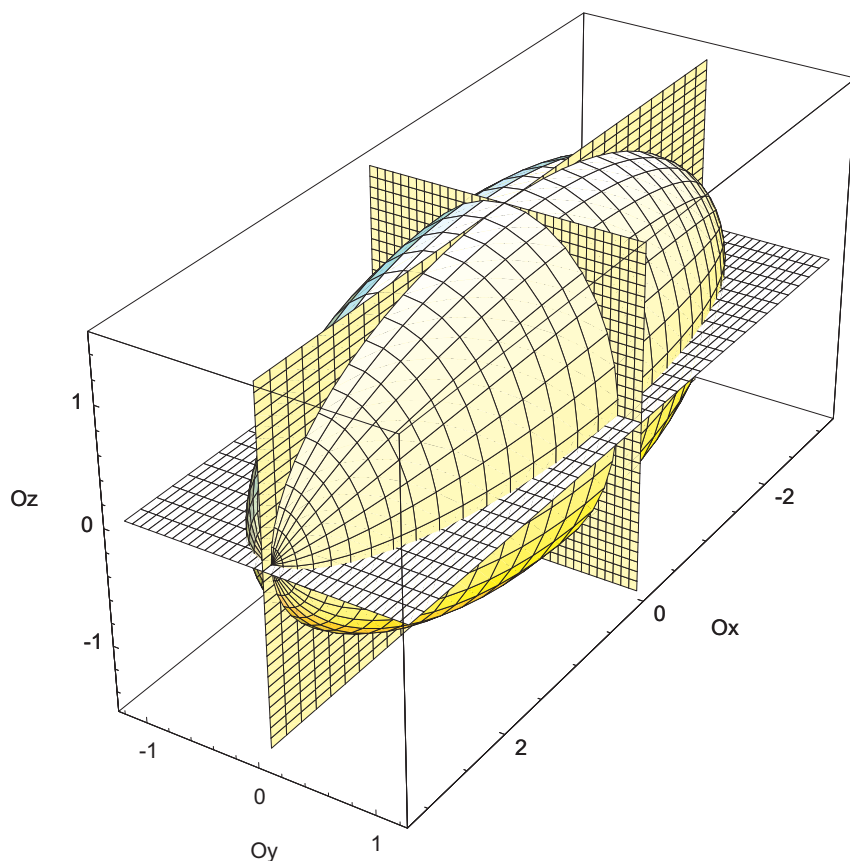
**Remarca 3.5.4** În general un plan este tangent la sferă dacă distanța de la centrul sferei la plan este egală cu raza.

## 3.6 Cuadrice pe ecuații reduse

### 3.6.1 Elipsoid

**Definitia 3.6.1** Se numește elipsoid mulțimea punctelor din spațiu  $M(x, y, z)$  care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{Elips})$$



Pentru a studia suprafața dată vom aște intersecțiile ei cu planele de coordonate și cu plane paralele cu planele de coordonate. Un calcul simplu ne conduce la:

**Teorema 3.6.1** *Intersecția elipsoidului cu planul  $xOy$  este elipsa de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , iar cu plane paralele cu  $xOy$ ,  $z = \gamma$ , este elipsa de ecuație  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{\gamma^2}{c^2}$ , pentru  $|\gamma| < c$ , un punct pentru  $|\gamma| = c$  și vidă pentru  $|\gamma| > c$ .*

**Remarca 3.6.1** Este devărată o teoremă analoagă pentru intersecția cu plane paralele cu celelate plane de coordonate.

**Remarca 3.6.2** Axele de coordonate și planele de coordonate sunt axe, respectiv plane de simetrie pentru elipsoid. (adică dacă un punct se află pe elipsoid și simetricul său față de axe, respectiv plane se află pe elipsoid (două puncte sunt simetrice față de o dreaptă sau plan dacă mijlocul segmentului care le unește este pe dreaptă sau plan și acest segment este perpendicular pe dreaptă, respectiv plan). Ex. simetricul punctului  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  față de  $yOz$  este  $M_1(-x_0, y_0, z_0)$  față de  $Ox$  este  $M_2(x_0, -y_0, -z_0)$ .

Dacă avem un punct  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  pe elipsoid, atunci:

**Teorema 3.6.2** *Ecuația planului tangent la elipsoid în  $M_0$  este:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1.$$

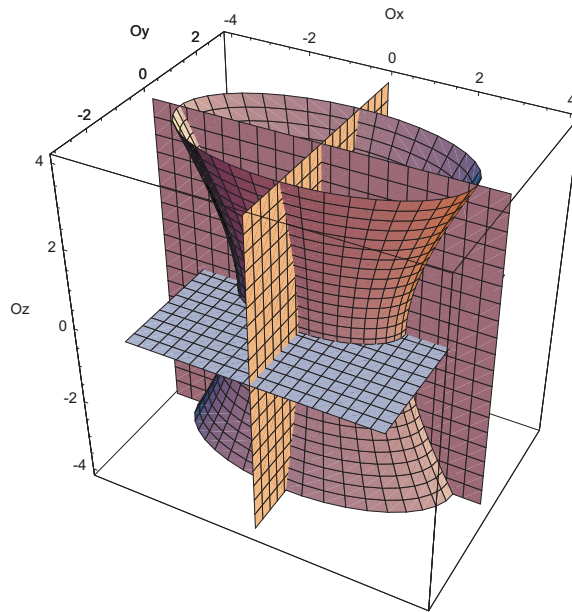
**Remarca 3.6.3** Elipsoidul se poate da și cu ecuații parametrice:

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \vartheta \\ y = b \sin \varphi \sin \vartheta \\ z = c \cos \vartheta \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \vartheta \in [0, \pi]$$

### 3.6.2 Hiperboloidul cu o pânză

**Definitia 3.6.2** Se numește hiperboloid cu o pânză mulțimea punctelor din spațiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{HIP1})$$



Un calcul simplu ne conduce la:

**Teorema 3.6.3** Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu  $xOy$ ,  $z = \gamma$ , este o familie de elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

**Teorema 3.6.4** Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu  $xOz$ ,  $y = \beta$ , este o familie de hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\beta^2}{b^2}.$$

**Teorema 3.6.5** Intersecția hiperboloidului cu o pânză cu plane paralele cu  $yOz$ ,  $x = \alpha$ , este o familie de hiperbole:

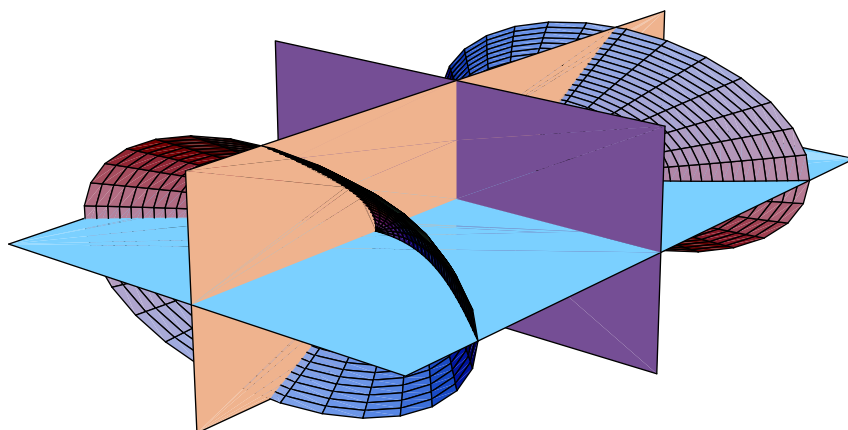
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\alpha^2}{a^2}.$$

**Remarca 3.6.4** Axele și planele de simetrie sunt aceleași ca la elipsoid.

### 3.6.3 Hiperboloidul cu două pânze

**Definitia 3.6.3** Se numește hiperboloid cu două pânze mulțimea punctelor din spațiu care într-un sistem de coordonate bine ales verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (\text{HIP2})$$



1

Un calcul simplu ne conduce la:

**Teorema 3.6.6** *Intersecția hiperboloidului cu 2 pânze cu plane paralele cu  $xOy$ ,  $z = \gamma$ , este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{\gamma^2}{c^2}.$$

**Teorema 3.6.7** *Intersecția hiperboloidului cu 2 pânze cu plane paralele cu  $xOz$ ,  $y = \beta$ , este o familie de hiperbole:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{\beta^2}{b^2}.$$

**Teorema 3.6.8** *Intersecția hiperboloidului cu 2 pânze cu plane paralele cu  $yOz$ ,  $x = \alpha$ , (pentru  $|\alpha| > a$ ) este o familie de elipse:*

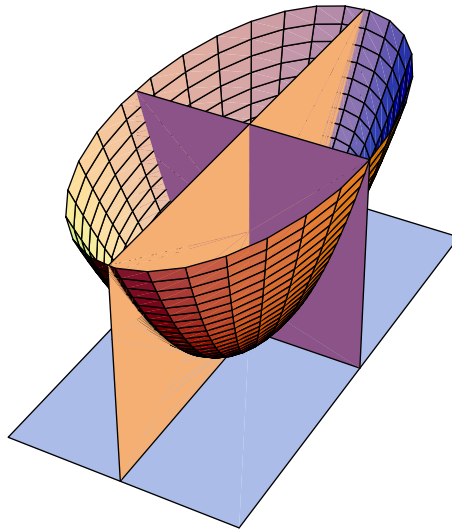
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{\alpha^2}{a^2} - 1.$$

**Remarca 3.6.5** Axele și planele e simetrie sunt aceleași ca la elipsoid.

### 3.6.4 Parabolidul eliptic

**Definiția 3.6.4** *Se numește paraboloid eliptic mulțimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuația:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (\text{PE})$$



Un calcul simplu ne conduce la:

**Teorema 3.6.9** *Intersecția paraboloidului eliptic cu plane paralele cu  $xOy$ ,  $z = \gamma > 0$ , este o familie de elipse:*

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2\gamma \\ z &= \gamma \end{aligned}$$

**Teorema 3.6.10** Intersecția paraboloidului eliptic cu plane paralele cu  $xOz$ ,  $y = \beta$ , este o familie de parabole:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} &= 2z \\ y &= \beta.\end{aligned}$$

**Teorema 3.6.11** Intersecția paraboloidului eliptic cu plane paralele cu  $yOz$ ,  $x = \alpha$ , este o familie de parabole:

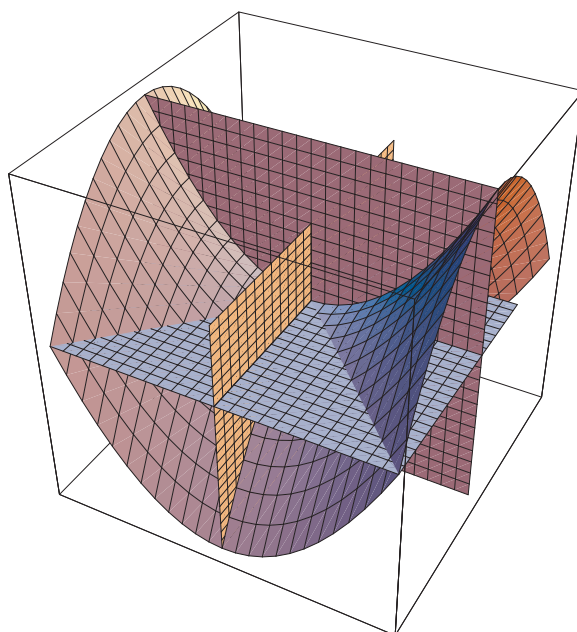
$$\begin{aligned}\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 2z \\ x &= \alpha.\end{aligned}$$

**Remarca 3.6.6** Axa de simetrie e doar  $Oz$ , iar plane de simetrie  $xOz$ ,  $yOz$ .

### 3.6.5 Paraboloidul hiperbolic (șa)

**Definitia 3.6.5** Se numește paraboloid hiperbolic mulțimea punctelor a căror coordonate, într-un sistem bine ales, verifică ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (\text{PH})$$



Un calcul simplu ne conduce la:

**Teorema 3.6.12** Intersecția paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu  $xOy$ ,  $z = \gamma$ , este formată din hiperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2\gamma.$$

**Teorema 3.6.13** Intersecția paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu  $xOz$ ,  $y = \beta$ , este formată din parabole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{\beta^2}{b^2} = 2z.$$

**Teorema 3.6.14** Intersecția paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu  $yOz$ ,  $x = \alpha$ , este formată din parabole:

$$\frac{\alpha^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z.$$

**Remarca 3.6.7** Axa de simetrie e doar  $Oz$ , iar plane de simetrie  $xOz$ ,  $yOz$ .

**Remarca 3.6.8** Exemplu de astfel de suprafață: acoperișul gării din Predeal.

### 3.6.6 Generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză

Fie ecuația hiperboloidului cu o pânză (HIP1). Ea se poate pune sub forma:

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 + \frac{y}{b}\right)$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} \quad (3.6.1)$$

sau:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} \quad (3.6.2)$$

Dacă egalăm rapoartele din (3.6.1) cu  $\lambda$ , pentru  $\lambda$  fixat ele sunt ecuațiile unei drepte, aflată în întregime pe suprafață.

**Definiția 3.6.6** Se numește prima familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 - \frac{y}{b}} = \frac{1 + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (G1)$$

și a doua familie de generatoare rectilinii pentru hiperboloidul cu o pânză mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

$$\frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} = \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \mu \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (G2)$$

Proprietățile generatoarelor rectilinii sunt date de:

**Teorema 3.6.15** Prin orice punct de pe hiperboloid trece câte o generatoare din fiecare familie.

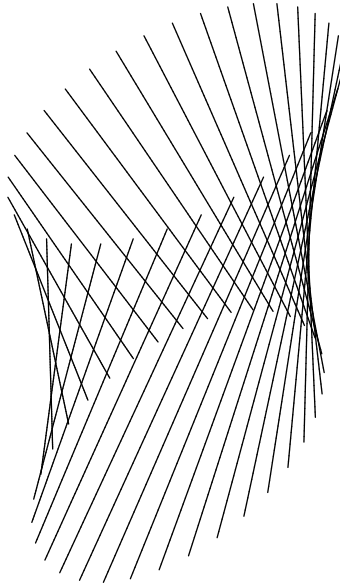
**Teorema 3.6.16** Două generatoare din aceeași familie nu se intersectează.

**Demonstrație:** Arătăm că sistemul:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} &= \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \mu_1 \\ \frac{\frac{x}{a} - \frac{z}{c}}{1 + \frac{y}{b}} &= \frac{1 - \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{z}{c}} = \mu_2 \end{aligned}$$

nu are soluții pentru  $\mu_1 \neq \mu_2$ . Avem  $(\mu_1 - \mu_2) \left(1 + \frac{y}{b}\right) = 0$  rezultă  $y = -b$ .

**Teorema 3.6.17** Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.



### 3.6.7 Generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic (șă)

Fie ecuația paraboloidului hiperbolic (PH). ea se poate pune sub forma:

$$2z = \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)$$

care este echivalentă cu:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} \quad (3.6.3)$$

sau:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} \quad (3.6.4)$$

Dacă egalăm rapoartele din (3.6.3) cu  $\lambda$ , pentru  $\lambda$  fixat ele sunt ecuațiile unei drepte, așă în întregime pe suprafață.

**Definitia 3.6.7** Se numește prima familie de generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (G1)$$

și a doua familie de generatoare rectilinii pentru paraboloidul hiperbolic mulțimea dreptelor din spațiu de ecuații:

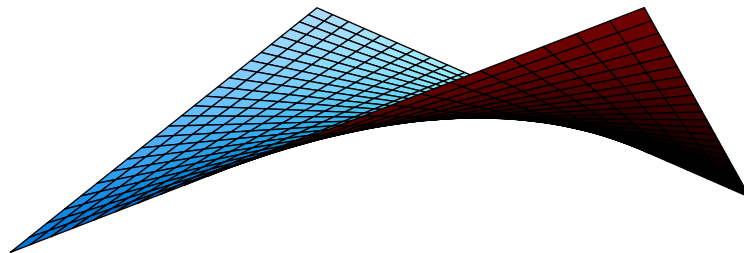
$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} = \mu \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (G2)$$

Proprietățile generatoarelor rectilinii sunt date de:

**Teorema 3.6.18** Prin orice punct de pe paraboloid trece câte o generatoare din fiecare familie.

**Teorema 3.6.19** Două generatoare din aceeași familie nu se intersectează.

**Teorema 3.6.20** Două generatoare din familii diferite au un singur punct comun.



Dem la tp2:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \lambda_1$$

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \lambda_2$$

cu  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . n-am sol.  
dem. la tp3:

$$\frac{2}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{z} = \lambda$$

$$\frac{2}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}} = \frac{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}{z} = \mu$$

sistem cu 4 ec. și 3 nec. *rescris* :

$$\begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{2}{\lambda} \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \lambda z = 0 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2}{\mu} \\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} - \mu z = 0 \end{cases}.$$

este compatibil dacă:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{2}{\lambda} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\lambda & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & \frac{2}{\mu} \\ \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & -\mu & 0 \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} 0$$

Scăzând prima linie din celelalte:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{1}{b} & 0 & \frac{2}{\lambda} \\ 0 & \frac{2}{b} & -\lambda & -\frac{2}{\lambda} \\ 0 & \frac{2}{b} & 0 & \frac{2}{\mu} - \frac{2}{\lambda} \\ 0 & 0 & -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{2}{b} & -\lambda & -\frac{2}{\lambda} \\ \frac{2}{b} & 0 & \frac{2}{\mu} - \frac{2}{\lambda} \\ 0 & -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{2}{b} & -\lambda & -\frac{2}{\lambda} \\ 0 & \lambda & \frac{2}{\mu} \\ 0 & -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} = \frac{2}{ab} \begin{vmatrix} \lambda & \frac{2}{\mu} \\ -\mu & -\frac{2}{\lambda} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{ab} (-2 + 2) = 0$$

**Example 3.6.1** Să se determine generatoarele rectilinii ale suprafeței

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1$$

care trec prin punctul  $M(1, 1, 1)$ .

Soluție: generatoarele rectilinii din prima familie:

$$\frac{x - z}{1 - y} = \frac{1 + y}{x + z} = \lambda$$

rezultă:

$$\lambda = 1$$

deci ec. vor fi:

$$\begin{aligned}\frac{x-z}{1-y} &= \frac{1+y}{x+z} = 1 \\ x-z &= 1-y \\ x+z &= 1+y\end{aligned}$$

sau,

$$\begin{aligned}x &= 1 \\ y &= z.\end{aligned}$$

generatoarele rectilinii din a doua familie:

$$\frac{x-z}{1+y} = \frac{1-y}{x+z} = \mu$$

rezultă:

$$\mu = 0$$

deci:

$$\begin{aligned}y &= 1 \\ x &= z.\end{aligned}$$

### 3.6.8 Noțiuni generale de curbe și suprafețe

**Definitia 3.6.8** Se numește curbă în spațiu mulțimea punctelor a căror coordonate sunt funcții continue de un parametru real, care ia valori într-un interval:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R} \quad (\text{EPC})$$

**Definitia 3.6.9** Se numește suprafață în spațiu mulțimea punctelor ale căror coordonate sunt funcții continue de doi parametri reali, fiecare luând valori într-un interval:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}, u \in I_1, v \in I_2, I_1, I_2 \subset \mathbb{R} \quad (\text{EPS})$$

**Remarca 3.6.9** Ecuațiile (EPC),(EPS) se numesc ecuațiile parametrice ale curbei, respectiv suprafeței.

**Remarca 3.6.10** Eliminând în ecuațiile parametrice ale suprafeței parametrii  $u, v$  se obține ecuația implicită a suprafeței:

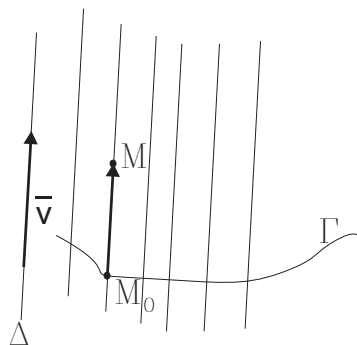
$$F(x, y, z) = 0, \quad (\text{EIS})$$

iar rezolvând ecuația de mai sus în raport cu  $z$  se obține ecuația explicită a suprafeței:

$$z = f(x, y). \quad (\text{EES})$$

**Remarca 3.6.11** Analog, pentru o curbă, eliminând  $t$  se obțin ecuațiile curbei ca intersecție de două suprafețe:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$



2

sau forma explicită:

$$\begin{cases} y = f_1(x) \\ z = f_2(x) \end{cases}.$$

**Example 3.6.2** Sfera: ec. implicită:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

Ec. explicite:

$$z = c \pm \sqrt{R^2 - (x - a)^2 - (y - b)^2}$$

ec. parametrice:

$$\begin{aligned} x &= a + R \cos u \sin v \\ y &= b + R \sin u \sin v \\ z &= c + R \cos v, u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi] \end{aligned}$$

### 3.6.9 Suprafețe cilindrice

**Definitia 3.6.10** Se numește suprafață cilindrică o suprafață generată de o dreaptă care rămâne paralelă cu o dreaptă dată și intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiție geometrică).

**Remarca 3.6.12** Curba  $\Gamma$  se numește curbă directoare, iar dreptele paralele cu  $\Delta$  se numesc generatoare ale sup. cil.

Ne propunem în cele ce urmează să determinăm ecuațiile suprafeței cilindrice.

Vom face acest lucru în două variante:

**Teorema 3.6.21** Dacă dreapta  $\Delta$  are ecuațiile canonice:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

și curba  $\Gamma$  are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}$$

atunci suprafața cilindrică are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} X = x(t) + \lambda a \\ Y = y(t) + \lambda b \\ Z = z(t) + \lambda c \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{EPSC})$$

**Demonstrație.** Fie  $M(X, Y, Z)$  un punct pe suprafața cilindrică. Există atunci un punct  $M_0(x(t), y(t), z(t))$  pe curba  $\Gamma$  astfel încât  $\overrightarrow{M_0M}$  este paralel cu dreapta  $\Delta$ , deci există  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda(a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k})$$

$$\overrightarrow{M_0M} = (X - x(t))\vec{i} + (Y - y(t))\vec{j} + (Z - z(t))\vec{k}$$

egalând coordonatele celor doi vectori din egalitatea de mai sus rezultă (EPSC).

**Example 3.6.3** Fie dreapta

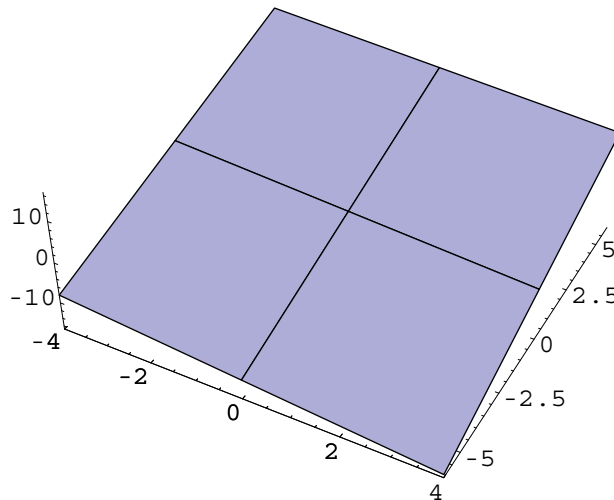
$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-\pi}{3}$$

și curba  $\Gamma$  :

$$x = 2t, y = 3t, z = 4t.$$

Ecuatiile parametrice ale suprafeței cilindrice vor fi

$$\begin{cases} X = 2t + 1 \cdot \lambda \\ Y = 3t + 2\lambda \\ Z = 4t + 3\lambda \end{cases} \quad t, \lambda \in \mathbb{R}$$



**Example 3.6.4** Fie dreapta  $\Delta$  ca mai sus, iar curba  $\Gamma$

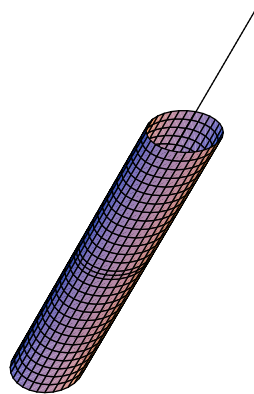
$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t \in [0, 2\pi].$$

Ecuatiile parametrice ale suprafeței cilindrice vor fi

$$\begin{cases} X = \cos t + \lambda \\ Y = \sin t + 2\lambda \\ Z = 3\lambda \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi], \lambda \in \mathbb{R}$$

Ecuția implicită:

$$(X - Z/3)^2 + (Y - 2Z/3)^2 = 1$$



**Teorema 3.6.22** Dacă dreapta  $\Delta$  este dată ca intersecție de două plane

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

și curba  $\Gamma$  ca intersecție de două suprafețe atunci ecuația implicită a suprafeței cilindrice este de forma:

$$H(A_1x + B_1y + C_1z + D_1, A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (3.6.5)$$

**Demonstrație.** Dacă un punct  $M(x, y, z)$  se află pe suprafață atunci el se află pe o dreaptă paralelă cu  $\Delta$ , deci coordonatele sale verifică:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \alpha \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \beta \end{cases} \quad (3.6.6)$$

Dreapta de mai sus intersectează curba  $\Gamma$ , deci sistemul:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = \alpha \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \beta \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

are soluție, de unde rezultă (eliminând  $x, y, z$ ):

$$H(\alpha, \beta) = 0$$

înlocuind în formula de mai sus pe  $\alpha, \beta$  din (3.6.6) rezultă formula (3.6.5).

**Example 3.6.5** Să se afle suprafața cilindrică care are generatoarele paralele cu  $Oz$  și trece prin curba:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Toate dreptele paralele cu  $Oz$  ( $x = 0, y = 0$ ) au ecuațiile:

$$x = \alpha, y = \beta,$$

sistemul de patru ecuații fiind:

$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \beta \\ z = 0 \\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

Obținem condiția de compatibilitate:

$$\alpha^2 + 2\beta^2 - 4 = 0$$

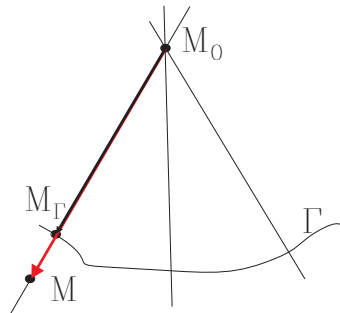
deci ecuația suprafeței va fi:

$$\begin{aligned} x^2 + 2y^2 - 4 &= 0 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} &= 1 \end{aligned}$$

**Remarca 3.6.13** Se poate demonstra că o ecuație în care apar doar coordonatele  $x, y$  reprezintă ecuația unei suprafețe cilindrice cu generatoarele paralele cu  $Oz$ .

### 3.6.10 Suprafețe conice

**Definitia 3.6.11** Se numește suprafață conică o suprafață generată de o dreaptă care trece printr-un punct fix și intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiție geometrică).



Ne propunem în cele ce urmează să determinăm ecuațiile suprafeței conice.

**Teorema 3.6.23** Dacă punctul  $M_0$  are coordonatele  $(x_0, y_0, z_0)$  și curba  $\Gamma$  are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}$$

atunci suprafața conică are ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} X = x_0 + \lambda(x(t) - x_0) = \lambda x(t) + (1 - \lambda)x_0 \\ Y = y_0 + \lambda(y(t) - y_0) \\ Z = z_0 + \lambda(z(t) - z_0) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{R}. \quad (\text{EPSC})$$

Demonstrația este asemănătoare cu cea de la suprafața cilindrică, înlocuind condiția de paralelism cu dreapta cu condiția de coliniaritate cu  $\overrightarrow{M_0M_\Gamma}$ .

**Example 3.6.6** Conul cu centrul în punctul  $M_0(0, 0, 2)$  care trece prin curba  $\Gamma$

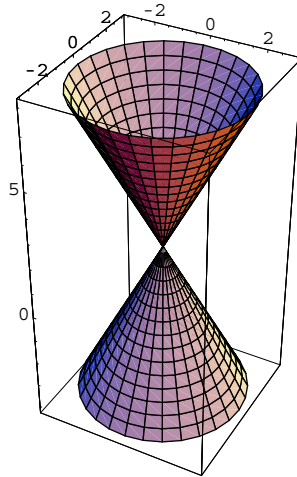
$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t \in [0, 2\pi].$$

are ecuațiile parametrice:

$$x = \lambda \cos t + 0(1 - \lambda), y = \lambda \sin t, z = 2 - 2\lambda.$$

ec. implicită:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2-z}{2}; \cos t = \frac{x}{\lambda}; \sin t = \frac{y}{\lambda} \\ \left(\frac{x}{\frac{2-z}{2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{2-z}{2}}\right)^2 &= 1 \\ 4x^2 + 4y^2 &= (2-z)^2 \end{aligned}$$



**Teorema 3.6.24** Dacă punctul  $M_0$  este dat ca intersecție de trei plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

și curba  $\Gamma$  ca intersecție de două suprafețe atunci ecuația implicită a suprafeței conice este:

$$H \left( \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}, \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1} \right) = 0.$$

**Demonstrație:** Toate drepte care trec prin  $M_0$  au ec. de forma (folosind fasciculul de plane):

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)$$

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \beta (A_1x + B_1y + C_1z + D_1)$$

punând condiția să intersecteze curba  $\Gamma$  avem sistemul:

$$\begin{cases} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = \alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \beta (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

care trebuie să fie compatibil. Eliminând  $(x, y, z)$  rezultă:

$$H(\alpha, \beta) = 0$$

Înlocuind  $\alpha, \beta$  din primele 2 ec. rezultă

$$H \left( \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}, \frac{A_3x + B_3y + C_3z + D_3}{A_1x + B_1y + C_1z + D_1} \right) = 0.$$

**Example 3.6.7** Să se afle ecuația implicită a unei suprafețe conice cu vârful intersecția planelor  $x - 2 = 0, y - 3 = 0, z + 1 = 0$  și care este tangentă la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1/4$ .

Soluție: Toate drepte care trec prin vârful au ecuațiile:

$$\begin{cases} x - 2 = \alpha (z + 1) \\ y - 3 = \beta (z + 1) \end{cases}$$

Sub formă canonică:

$$\frac{x - 2}{\alpha} = \frac{y - 3}{\beta} = \frac{z + 1}{1}$$

Aceste drepte sunt tangente la sferă, deci au un singur punct comun cu sfera, adică ecuația:

$$(2 + \alpha(z + 1))^2 + (3 + \beta(z + 1))^2 + z^2 - 1/4 = 0$$

are o singură soluție în  $z$ . Ecuația este:

$$z^2\alpha^2 + z^2\beta^2 + z^2 + 2z\alpha^2 + 4z\alpha + 2z\beta^2 + 6z\beta + \alpha^2 + 4\alpha + \beta^2 + 6\beta + \frac{51}{4} = 0$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 + 1)z^2 + 2(\alpha^2 + 2\alpha + \beta^2 + 3\beta)z + \alpha^2 + 4\alpha + \beta^2 + 6\beta + \frac{51}{4} = 0$$

Condiția:

$$(\alpha^2 + 2\alpha + 3\beta + \beta^2)^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + 1)\left(\alpha^2 + 4\alpha + \beta^2 + 6\beta + \frac{51}{4}\right) = 0$$

Făcând reducerile de termeni asemenea rezultă:

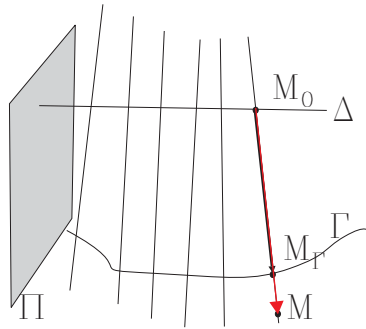
$$-\frac{39}{4}\alpha^2 + 12\alpha\beta - 4\alpha - \frac{19}{4}\beta^2 - 6\beta - \frac{51}{4} = 0$$

Ecuația suprafeței se obține înlocuind în ecuația de mai sus:

$$\alpha = \frac{x-2}{z+1}, \beta = \frac{y-3}{z+1}.$$

### 3.6.11 Suprafețe conoide

**Definitia 3.6.12** Se numește suprafață conoidă o suprafață generată de o dreaptă care intersectează o dreaptă dată, este paralelă cu un plan dat și intersectează o curbă dată (sau verifică altă condiție geometrică).



**Teorema 3.6.25** Dacă dreapta  $\Delta$  este dată ca intersecție de două plane:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

planul  $\Pi_3$  are ecuația:

$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

și curba  $\Gamma$  este dată ca intersecție de două suprafețe

$$F_1(x, y, z) = 0$$

$$F_2(x, y, z) = 0$$

atunci ecuația suprafeței conoide este:

$$H\left(A_3x + B_3y + C_3z + D_3, \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}\right) = 0.$$

Pentru demonstrație se ține cont că dacă  $M(x, y, z)$  aparține suprafeței conoide atunci coordonatele sale verifică sistemul:

$$\begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = \alpha \\ \frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{A_2x + B_2y + C_2z + D_2} = \beta \\ F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

iar din condiția de compatibilitate rezultă că  $H(\alpha, \beta) = 0$ , de unde rezultă formula cerută.

**Example 3.6.8** Să se afle ecuația suprafeței conoide care are generatoarele paralele cu  $xOy$ , trec prin  $Oz$  și intersectează curba:

$$x^2 + z^2 = 1, y = 4$$

Sistemul precedent devine:

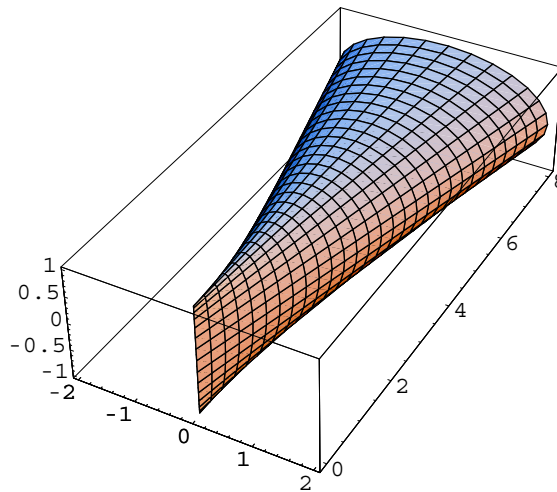
$$x^2 + z^2 = 1, y = 4, z = \alpha, \frac{x}{y} = \beta$$

Rezolvând sistemul format cu ultimele trei ecuații și înlocuind în prima obținem:

$$(4\beta)^2 + \alpha^2 - 1 = 0$$

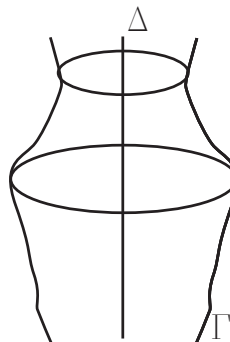
deci ecuația suprafeței va fi:

$$\left(\frac{4x}{y}\right)^2 + z^2 - 1 = 0.$$



### 3.6.12 Suprafețe de rotație

**Definiția 3.6.13** Se numește suprafață de rotație o suprafață obținută din rotația unei curbe în jurul unei drepte.



Dacă dreapta  $\Delta$  este dată sub forma canonică:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

și curba  $\Gamma$  ca intersecție de două suprafețe:

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

atunci ecuația implicită a suprafeței de rotație va fi:

$$H(ax + by + cz, (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2) = 0,$$

unde funcția  $H(\alpha, \beta)$  rezultă din compatibilitatea sistemului:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= \alpha \text{ (ecuația unui plan perp. pe } \Delta) \\ (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 &= \beta \text{ (ec. unei sfere cu centrul pe } \Delta) \\ F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

**Example 3.6.9** Să se aște suprafața obținută prin rotația dreptei:

$$x - z = 1 - y, x + z = 1 + y$$

în jurul axei  $Oz$ . (Răspuns:  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ ): axa  $Oz$

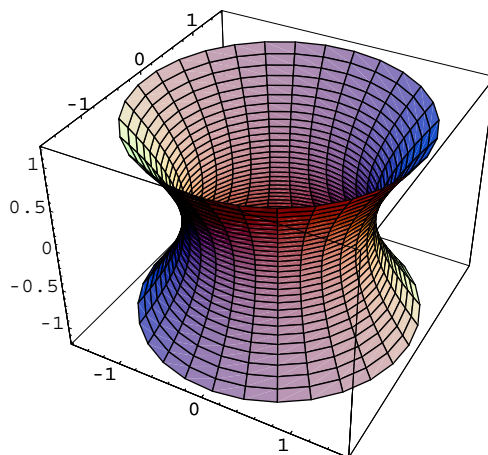
$$\frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$

sistemul:

$$\begin{aligned} z &= \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 &= \beta \\ x - z &= 1 - y \\ x + z &= 1 + y \end{aligned}$$

rezultă:

$$\begin{aligned} x &= 1, z = \alpha, y = \alpha \Rightarrow \\ 1^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - \beta &= 0 \Rightarrow \text{ec. supr. de rot.:} \\ 1 + z^2 + z^2 - (x^2 + y^2 + z^2) &= 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 1 \end{aligned}$$



\*\*\*Ec. parametrice ale unei supr. de rotație: Dacă dreapta  $\Delta$  este dată sub forma canonică:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

și curba  $\Gamma$  are ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in I \subset \mathbb{R}$$

Ideea: pt.  $t$  fixat să se aște ec. parametrice ale cercului descris de punctul de pe  $\Gamma$ , cerc cu centrul pe  $\Delta$ , în plan perpendicular pe  $\Delta$ .

Centrul cercului: intersecția cu  $\Delta$  a planului perp. pe  $\Delta$  prin  $(x(t), y(t), z(t))$ :

$$\frac{X - x_1}{a} = \frac{Y - y_1}{b} = \frac{Z - z_1}{c} = s$$

$$a(X - x(t)) + b(Y - y(t)) + c(Z - z(t)) = 0$$

rezultă  $(X, Y, Z)$ . Raza cercului va fi distanța de la  $(x(t), y(t), z(t))$  la dreapta  $\Delta$ :

$$R = \frac{\sqrt{\left| \frac{y(t) - y_1}{b} \quad \frac{z(t) - z_1}{c} \right|^2 + \left| \frac{z(t) - z_1}{c} \quad \frac{x(t) - x_1}{a} \right|^2 + \left| \frac{x(t) - x_1}{a} \quad \frac{y(t) - y_1}{b} \right|^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

un vector perp. pe vectorul director al dreptei  $\Delta$  este:

$$\vec{v}_1 = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \times (\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = (a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}) \times \vec{v}_1$$

Fie  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  versorii vectorilor  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ . Dacă notez cu  $\vec{r}$  vectorul de poziție al unui punct de pe cerc:

$$\vec{r} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} + R(\vec{u}_1 \cos s + \vec{u}_2 \sin s), s \in [0, 2\pi]$$

### Example 3.6.10 TOR

Să se aște ecuațiile parametrice și ecuația implicită a suprafeței obținute prin rotația cercului:

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ (y - a)^2 + z^2 &= b^2 \end{aligned}$$

în jurul axei  $Oz$ .

Ec. implicită:

$$\begin{cases} x = 0 \\ (y - a)^2 + z^2 = b^2 \\ z = \alpha \\ x^2 + y^2 + z^2 = \beta \end{cases}$$

din ec. a doua rezultă

$$y = a \pm \sqrt{b^2 - \alpha^2}$$

Înlocuind în ultima ec.:

$$(a \pm \sqrt{b^2 - \alpha^2})^2 + \alpha^2 = \beta$$

ec. implicită:

$$(a \pm \sqrt{b^2 - z^2})^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$a^2 \pm 2a\sqrt{b^2 - z^2} + b^2 - z^2 = (x^2 + y^2)$$

$$4a^2(b^2 - z^2) = (x^2 + y^2 + z^2 - b^2 - a^2)^2$$

Ec. parametrice:

curba care se rotește are ec. parametrice:

$$x = 0$$

$$y = b \cos t + a$$

$$z = b \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

centrul cercului pe care se mișcă un punct cu  $t$  fixat este:

$$(0, 0, b \sin t)$$

iar raza cercului pe care se rotește este  $a + b \cos t$ . Punctul de pe TOR va avea vectorul de pozitie:

$$\vec{r} = (0, 0, b \sin t) + (a + b \cos t) (\cos s, \sin s, 0)$$

adică:

$$x = (a + b \cos t) \cos s$$

$$y = (a + b \cos t) \sin s$$

$$z = b \sin t, t \in [0, 2\pi], s \in [0, 2\pi]$$

# Capitolul 4

## Geometrie diferențială

Studiază proprietăți ale curbelor și suprafețelor care se caracterizează cu ajutorul derivatelor funcțiilor care le definesc.

### 4.1 Noțiuni preliminare

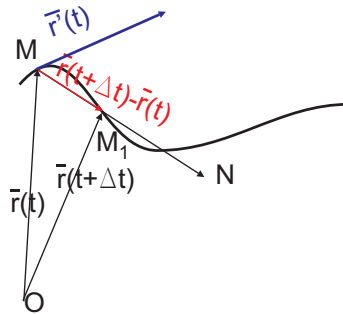
Fie un vector a cărui coordonate depind de un parametru real  $t$  :

$$\vec{r} = \vec{r}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (4.1.1)$$

**Definitia 4.1.1** Se numește derivata vectorului  $\vec{r}$  în punctul  $t$  vectorul  $\vec{r}'(t)$  definit de:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \vec{r}'(t). \quad (4.1.2)$$

dacă limita din membrul stâng există și este finită.



Derivata unui vector

(în figura de mai sus  $\overrightarrow{MN} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$ )

**Remarca 4.1.1** Derivata unui vector se poate interpreta mecanic ca viteza instantanee, expresia lui  $\vec{r}(t)$  fiind legea de mișcare a unui punct.

Dacă:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

atunci se poate demonstra:

**Teorema 4.1.1**  $\vec{r}'(t)$  există dacă și numai dacă funcțiile reale de o variabilă reală  $x, y, z$  sunt derivabile în  $t$  și:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}$$

Regulile de derivare pentru vectori sunt aceleași ca pentru funcții reale. Mai precis:

**Teorema 4.1.2** Dacă  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$  sunt vectori derivabili, iar  $f$  o funcție reală derivabilă în  $t$  atunci:

$$(\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t) \quad (3)$$

$$(f(t) \vec{r}_1(t))' = f'(t) \vec{r}_1(t) + f(t) \vec{r}_1'(t) \quad (4)$$

$$(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t) \quad (5)$$

$$(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t) \quad (6)$$

Din teorema precedentă rezultă:

**Corolarul 4.1.1** Dacă vectorul  $\vec{r}(t)$  are lungime constantă atunci  $\vec{r}'(t)$  este perpendicular pe  $\vec{r}(t)$ .

**Demonstrație:** Din (4.1.5) pentru  $\vec{r}_1(t) = \vec{r}_2(t) = \vec{r}(t)$  deoarece  $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = ct.$  rezultă prin derivare  
 $0 = 2\vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$

adică (dacă niciunul din vectori nu e vectorul nul) că  $\vec{r}'(t)$  este perpendicular pe  $\vec{r}(t)$ .

## 4.2 Geometria diferențială a curbelor plane

### 4.2.1 Curbe plane: noțiuni generale, exemple.

Reamintim că o curbă plană poate fi dată parametric sub forma:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R} \quad (\text{EPCP})$$

Vectorial:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

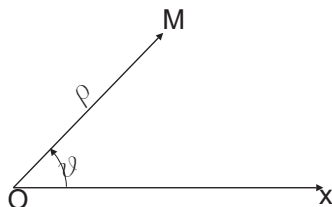
sau sub forma implicită:

$$F(x, y) = 0 \quad (\text{EiCP})$$

sau sub forma explicită:

$$y = f(x) \text{ sau } x = g(y) \quad (\text{EECP})$$

În plan se mai utilizează și coordonatele polare, în care un punct  $M$  este determinat prin distanța de la punct la un punct fixat  $O$  (originea) și unghiul făcut de o axă fixă care trece prin  $O$  (axa polară) cu vectorul  $\vec{OM}$ :



Coordonatele polare ale punctului  $M$  din figura de mai sus sunt  $(\rho, \theta)$ . Legătura dintre coordonatele polare și cele carteziane este dată de:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \text{ respectiv } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \theta = \frac{y}{\rho}, \cos \theta = \frac{x}{\rho} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

O curbă poate fi dată și în coordonate polare, dând  $\rho$  în funcție de  $\theta$ :

$$\rho = \rho(\theta) \quad (\text{ECPP})$$

**Remarca 4.2.1** În anumite condiții ecuațiile unei curbe plane (parametrice, implicite, explicite, polare) sunt echivalente.

**Exemplul 4.2.1** Fie cercul de centru  $O$  și rază  $R$ . Ecuațiile parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

ecuația implicită  $x^2 + y^2 = R^2$ , ecuațiile explicite  $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $x \in [-R, R]$ , iar ecuația în coordonate polare este  $\rho = R$  ( $ct$ ).

**Remarca 4.2.2** O aceeași curbă admite mai multe parametrizări:

$$\bar{r} = \bar{r}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

$$\bar{r} = \bar{r}(t_1), t_1 \in I_1 \subseteq \mathbb{R}$$

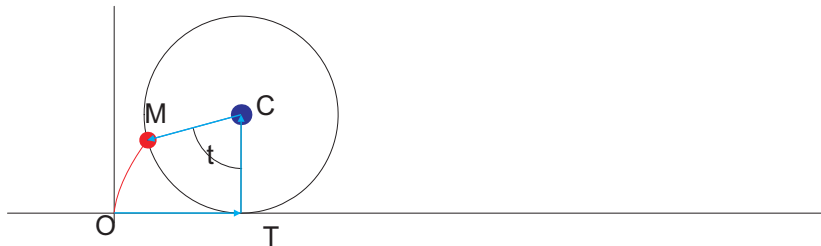
care sunt echivalente dacă:

$$t = t(t_1), t_1 \in I_1$$

este o funcție derivabilă, cu derivată continuă și pozitivă pe  $I_1$ , dacă  $t_1$  parcurge  $I_1$  atunci  $t$  parcurge  $I$ .

## 4.2.2 Câteva exemple de curbe plane

**Exemplul 4.2.1** Să se aște traieectoria descrisă de un cui intrat în anvelopa unei mașini aște în mișcare rectilinie.



Fie raza roții  $a$ , și alegem ca și parametru unghiul  $t$  dintre  $MC$  și  $CT$  unde  $M$  este poziția cuiului,  $C$  axul roții iar  $T$  este punctul de contact dintre roată și șosea.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC} + \overrightarrow{CM}$$

unde:

$$\overrightarrow{OT} = at\vec{i}$$

$$\overrightarrow{TC} = a\vec{j}$$

$$\overrightarrow{CM} = a \left( \cos \left( \frac{3\pi}{2} - t \right) \vec{i} + \sin \left( \frac{3\pi}{2} - t \right) \vec{j} \right)$$

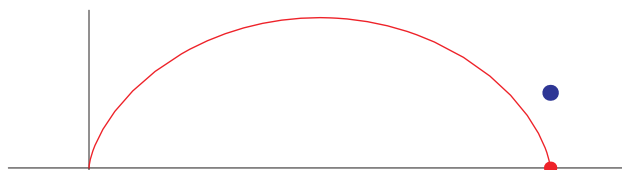
Rezultă:

$$\overrightarrow{OM} = a(t - \sin t)\vec{i} + a(1 - \cos t)\vec{j} = \bar{r}(t)$$

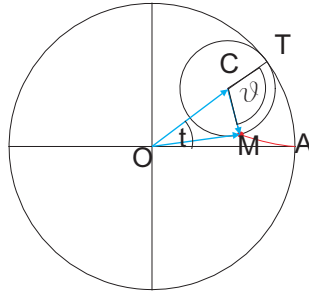
deci ecuațiile parametrice ale curbei (numită **cicloidă**) sunt:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Graficul ei pentru  $t \in [0, 2\pi]$  este:



**Exemplul 4.2.2** Să se aște ecuațiile traiectoriei descrise de un punct de pe un cerc de rază  $r$  care se rostogolește fără alunecare în interiorul unui cerc de rază  $R > r$ .



În figura de mai sus alegem parametru unghiul  $t$  făcut de  $\overrightarrow{OC}$  ( $C$  este centrul cercului care se rostogolește) cu axa  $Ox$ . deoarece lungimile arcelor  $TM$  și  $AT$  sunt egale avem:

$$\varphi = \frac{R}{r}t$$

Deoarece

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} \\ \overrightarrow{OC} &= (R - r) (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}) \\ \overrightarrow{CM} &= r (\cos (2\pi - \varphi + t) \vec{i} + \sin (2\pi - \varphi + t) \vec{j})\end{aligned}$$

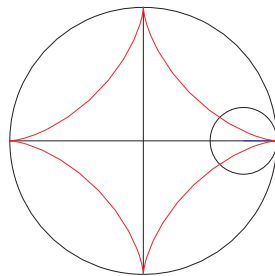
rezultă ecuațiile parametrice ale hipocicloidei:

$$\begin{cases} x = (R - r) \cos t + r \cos \left( \frac{R}{r}t - t \right) \\ y = (R - r) \sin t - r \sin \left( \frac{R}{r}t - t \right) \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Dacă  $R = 4r$  curba se numește **astroidă** și are ecuațiile parametrice:

$$x = r \cos^3 t, y = r \sin^3 t, t \in [0, 2\pi]$$

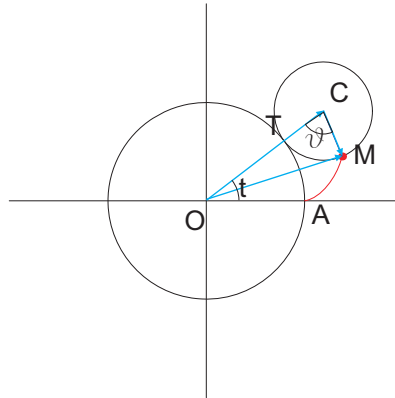
și graficul:



Ecuația implicită a astroidei este:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}.$$

**Exemplul 4.2.3** Să se aște ecuațiile traiectoriei descrise de un punct de pe un cerc de rază  $r$  care se rostogolește fără alunecare în exteriorul unui cerc de rază  $R$ .



caz particular  $R = r$  cardioidă.

### 4.2.3 Tangenta și normala la o curbă plană

Fie  $\Gamma$  o curbă plană dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

și un punct  $M(x(t), y(t))$  pe curbă.

**Definiția 4.2.1** Se numește tangentă la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  poziția limită a dreptei determinată de punctele  $M$  și  $M_1$  de pe curbă când punctul  $M_1$  tinde către  $M$ . (dacă această limită există).

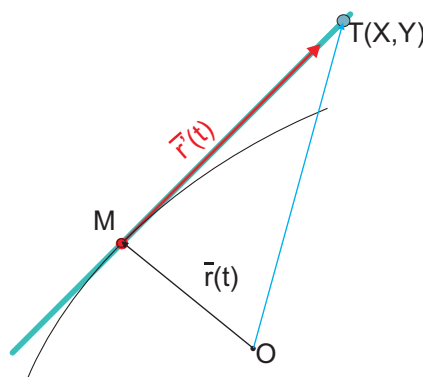
**Teorema 4.2.1** Dacă funcțiile  $x, y$  sunt derivabile în  $t$  și

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuația tangentei la curbă este (coordonatele unui punct de pe tangentă la curbă fiind notate cu  $(X, Y)$ ):

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} \quad (\text{ETP})$$

**Demonstrație:**



Conform definiției derivatei unui vector și a tangentei, dacă  $T$  aparține tangentei (vezi figura precedentă) atunci vectorii  $\overrightarrow{MT}$  și  $\overrightarrow{r}'(t)$  sunt coliniari, deci coordonatele lor sunt proporționale:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \lambda \in \mathbb{R}$$

adică tocmai ecuația (ETP).

**Remarca 4.2.3** Dacă curba este dată explicit, ecuația tangentei este:

$$\begin{aligned} Y - f(x) &= f'(x)(X - x) \\ y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \end{aligned}$$

iar dacă curba este dată implicit (EiCP):

$$\begin{aligned} F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) &= 0. \\ \frac{\partial F}{\partial x}(x, y)(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)(Y - y) &= 0 \end{aligned}$$

se folosește:

$$y'(x) = f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

**Exemplul 4.2.1** Cercul: ec. parametrice:

$$\begin{cases} x = a + R \cos t \\ y = b + R \sin t \end{cases}$$

ec. tang.:

$$\frac{X - a - R \cos t}{-R \sin t} = \frac{Y - b - R \sin t}{R \cos t}$$

Ec. explicită:

$$y = b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$$

ec. tg.:

$$Y - \left( b + \sqrt{R^2 - (x - a)^2} \right) = \frac{-2(x - a)}{2\sqrt{R^2 - (x - a)^2}}(X - x)$$

Ec. implicită:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

ec. tang.:

$$\begin{aligned} 2(x - a)(X - a + a - x) + 2(y - b)(Y - y) &= 0 \\ (X - a)(x - a) + (Y - b)(y - b) &= R^2 \end{aligned}$$

**Definitia 4.2.2** Se numește normala la curba  $\Gamma$  în punctul  $M \in \Gamma$  perpendiculara pe tangenta în  $M$  (prin punctul  $M$ ).

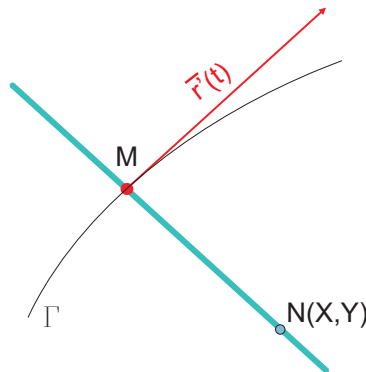
**Teorema 4.2.2** Dacă funcțiile  $x, y$  sunt derivabile în  $t$  și

$$x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuația normalei la curbă este (coordonatele unui punct de pe normala la curbă fiind notate cu  $(X, Y)$ ):

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) = 0. \quad (\text{ENP})$$

**Demonstrație:**



Dacă  $N$  este un punct pe normală atunci vectorul  $\overrightarrow{MN}$  este perpendicular pe  $\overrightarrow{r'}(t)$  deci

$$\overrightarrow{r'}(t) \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

care transpusă analitic  $(\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}, \overrightarrow{MN} = (X - x(t))\vec{i} + (Y - y(t))\vec{j})$  dă tocmai ecuația (ENP).

**Remarca 4.2.4** Dacă curba  $\Gamma$  este dată explicit ecuația normalei este:

$$(X - x) + f'(x)(Y - f(x)) = 0$$

iar dacă e dată implicit ecuația normalei este::

$$\frac{X - x}{F'_x(x, y)} = \frac{Y - y}{F'_y(x, y)}.$$

**Exemplul 4.2.2** Fie cicloida:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ecuațiile tangentei, respectiv normalei sunt:

$$\frac{X - a(t - \sin t)}{a(1 - \cos t)} = \frac{Y - a(1 - \cos t)}{a \sin t}$$

$$a(1 - \cos t)(X - a(t - \sin t)) + a \sin t(Y - a(1 - \cos t)) = 0$$

**Exemplul 4.2.3** Fie cercul:

$$x^2 + y^2 = 1$$

Ecuațiile tangentei, respectiv normalei, într-un punct  $(x, y)$  de pe cerc sunt  $(F(x, y) = x^2 + y^2 - 1)$ :

$$2x(X - x) + 2y(Y - y) = 0$$

$$\frac{X - x}{2x} = \frac{Y - y}{2y}$$

Făcând calculele rezultă forma simplificată:

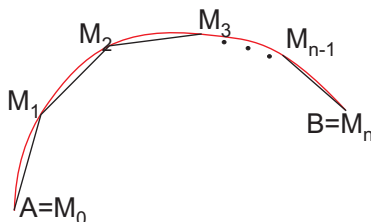
$$\begin{aligned} xX + yY &= 1 \\ xY - yX &= 0. \end{aligned}$$

## 4.2.4 Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe

Fie curba  $\Gamma$  dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Ne propunem să definim lungimea acestei curbe, precum și o formulă de calcul pentru lungime.



Pentru aceasta înscriem în curba  $\Gamma$  linia poligonală  $M_0M_1...M_n$  (vezi figura precedentă).

**Definiția 4.2.3** Se numește lungimea curbei  $\Gamma$  limita lungimii liniei poligonale  $M_0M_1...M_n$  când  $n \rightarrow \infty$  și lungimea celui mai mare segment de pe linia poligonală tinde la zero.

**Teorema 4.2.3** Dacă funcțiile  $x(t), y(t)$  au derivată continuă atunci curba  $\Gamma$  are lungime finită, dată de:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad (\text{LC})$$

**\*Demonstrație:** lungimea liniei poligonale  $M_0M_1\dots M_n$  este dată de ( $t_i$  este valoarea parametrului  $t$  corespunzătoare punctului  $M_i$ ):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\zeta_i)} = \sum \Delta t_i \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\zeta_i)} \end{aligned}$$

unde  $\xi_i, \zeta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ . Se demonstrează la analiză matematică că limita lui  $l_n$  când  $n \rightarrow \infty$  și  $\max_{i=1,n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$  este tocmai integrala din partea dreaptă a egalității (LC).  $\square$

**Definiția 4.2.4** Se numește parametrul natural  $s$  al curbei  $\Gamma$  lungimea arcului de curbă  $AM$ ,  $A$  fiind punctul de coordonate  $(x(a), y(a))$ , iar  $M$  punctul de coordonate  $(x(t), y(t))$ .

Din theorem precedentă rezultă imediat:

**Corolarul 4.2.1** Parametrul natural al curbei este dat de:

$$s = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau. \quad (4.2.2)$$

**Exemplul 4.2.1** Cercul:  $x(t) = R \cos t, y(t) = R \sin t, t \in [0, 2\pi]$ .

$x'(t) = -R \sin t, y'(t) = R \cos t. x'^2(t) + y'^2(t) = R^2$ . deci

$$s = \int_0^t R dt = Rt.$$

**Exemplul 4.2.2** Cicloidă lungimea:  $x(t) = a(t - \sin t), y(t) = a(1 - \cos t). x'^2(t) + y'^2(t) = a^2((1 - \cos t)^2 + \sin^2 t) = a^2(2 - 2 \cos t) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}$ . Lungimea unei bucle de cicloidă:

$$l = \int_0^{2\pi} 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 8a$$

parametrul natural:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^t 2a \sin \frac{\tau}{2} d\tau = 4a \left( -\cos \frac{\tau}{2} \right) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = \\ &= 4a \left( 1 - \cos \frac{t}{2} \right) \end{aligned}$$

**Remarca 4.2.5** Dacă în loc de parametrul  $t$  se consideră ca și parametru parametrul natural  $s$  se obține o parametrizare echivalentă a curbei (vezi remark 4.2.2), numită parametrizarea naturală:

$$\bar{r}(s) = x(s) \bar{i} + y(s) \bar{j}, s \in [0, l(\Gamma)]. \quad (4.2.3)$$

**Teorema 4.2.4** Dacă curba  $\Gamma$  este parametrizată natural atunci:

$$|\bar{r}'(s)| = 1. \quad (4.2.4)$$

$\bar{r}'(s)$  este versor).

**Demonstrație:**

$$\begin{aligned}
 \overline{r}'(s) &= x'(s) \vec{i} + y'(s) \vec{j} = \\
 &= \frac{dt}{ds} x'(t) \vec{i} + \frac{dt}{ds} y'(t) \vec{j} = \\
 &= \frac{x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}}{\frac{ds}{dt}} = \\
 &= \frac{x'(t) \vec{i} + y'(t) \vec{j}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}
 \end{aligned}$$

de unde calculând modulul rezultă formula (4.3.2).

Din theorem precedentă și corollary 4.3.2 rezultă:

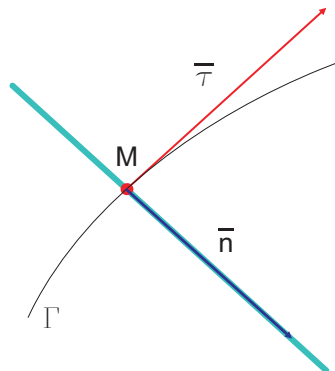
**Corolarul 4.2.2** Vectorul  $\overline{r}''(s)$  este perpendicular pe  $\overline{r}'(s)$ .

Din acest corolar și definiția normalei rezultă că vectorul  $\overline{r}''(s)$  este pe normala la curbă.

Dacă notăm cu  $\vec{\tau}$  și  $\vec{n}$  versorii tangentei, respectiv normalei la curbă, theorem și corollary precedent se pot scrie astfel:

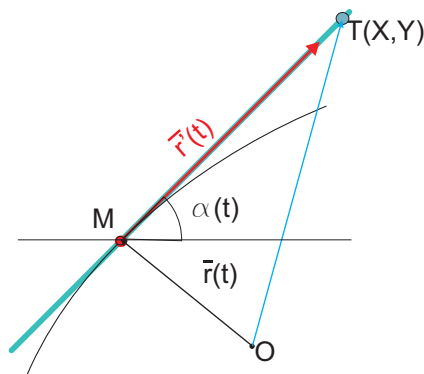
$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= \vec{\tau} \\
 \frac{d\vec{\tau}}{ds} &= K\vec{n}
 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

unde  $K$  este funcție de  $s$  care se va preciza.



## 4.2.5 Curbura unei curbe plane, ecuația intrinsecă a unei curbe plane

Fie  $\Gamma$  o curbă plană,  $M(x(t), y(t))$  un punct de pe curbă,  $\alpha(t)$  unghiul făcut de tangenta la curbă în punctul  $M$  cu axa  $Ox$ .



**Definiția 4.2.5** Se numește curbura curbei  $\Gamma$  în punctul  $M$  derivata unghiului  $\alpha$  în raport cu parametrul

natural al curbei:

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (4.2.6)$$

**Teorema 4.2.5** Dacă curba  $\Gamma$  este dată parametric atunci:

$$K = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3} \quad (4.2.7)$$

**Demonstrație:** Deoarece

$$\alpha(t) = \arctg \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

avem:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \\ &= \frac{\frac{\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} = \\ &= \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{\left(\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\right)^3}. \end{aligned}$$

**Remarca 4.2.6** Dacă curba  $\Gamma$  este dată explicit atunci curbura se calculează conform:

$$K = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + f'^2(x)}\right)^3}$$

iar dacă este dată în coordonate polare:

$$K = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

**Exemplul 4.2.1** Să se calculeze curbura pentru  $y = 0$  la parabola de ecuație  $y^2 = 2px$ . ( $x = y^2/2/p$ )

**Soluție:** aplicăm formula  $K = \frac{f''(y)}{\left(\sqrt{1+f'^2(y)}\right)^3}$ ,  $x = f(y) = \frac{y^2}{2p}$ :

$$K = \frac{\frac{1}{p}}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{p}\right)^2}} \Big|_{y=0} = \frac{1}{p}.$$

**Definitia 4.2.6** Inversa curburii se numește raza de curbura.

**Definitia 4.2.7** Se numește ecuația intrinsecă a unei curbe plane ecuația care definește curbura funcție de  $s$ :

$$K = K(s) \quad (\text{EINCP})$$

**Teorema 4.2.6** O curbă plană este perfect determinată de ecuația ei intrinsecă.

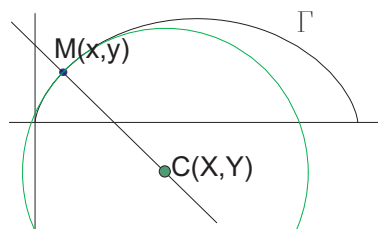
**Demonstrație:** Din definiția curburii rezultă:

$$\alpha(s) = \int K(s) ds$$

iar cu  $\alpha$  astfel determinat, avem (de verificat):

$$\begin{cases} x(s) = \int \cos(\alpha(s)) ds \\ y(s) = \int \sin(\alpha(s)) ds \end{cases}.$$

**Definitia 4.2.8** Se numește **cerc osculator** la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  cercul care are centrul pe normala la curbă (în sensul determinat de versorul  $\vec{n}$ ) și raza egală cu raza de curbură.



**Teorema 4.2.7** Centrul cercului osculator are coordonatele:

$$\begin{aligned} X &= x(t) - y'(t) \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \\ Y &= y(t) + x'(t) \frac{x'^2(t) + y'^2(t)}{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

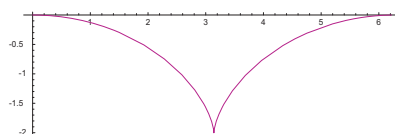
**Definitia 4.2.9** Se numește **evoluta** unei curbe plane locul geometric al centrelor de curbură (centrelor cercurilor osculatoare).

**Remarca 4.2.7** Ecuațiile (4.2.8) reprezintă ecuațiile parametrice ale evolutei.

**Exemplul 4.2.2** Evoluta cicloidei

$$\begin{cases} x = (t - \sin t) \\ y = (1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

este curba din desenul de mai jos:



Ecuațiile:

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 - \cos t \\ y'(t) &= \sin t \\ x'(t)^2 + y'(t)^2 &= 2 - 2 \cos t \\ x''(t) &= \sin t \\ y''(t) &= \cos t \\ x'y'' - x''y' &= (1 - \cos t) \cos t - \sin^2 t = \cos t - 1 \\ X &= t - \sin t - \sin t \frac{2 - 2 \cos t}{\cos t - 1} = t + \sin t \\ Y &= 1 - \cos t + (1 - \cos t)(-2) = \cos t - 1 = 2 - (1 - \cos t) \end{aligned}$$

**Remarca 4.2.8** Se poate demonstra că cercul osculator este poziția limită a unui cerc care trece prin punctele  $M, M_1, M_2$  de pe curbă când  $M_1$  și  $M_2$  tind către  $M$ .

**Definitia 4.2.10** Se numește *evolventa* unei curbe  $\Gamma$  o curbă  $\Gamma_1$  cu proprietatea că  $\Gamma$  este evoluta curbei  $\Gamma_1$ .

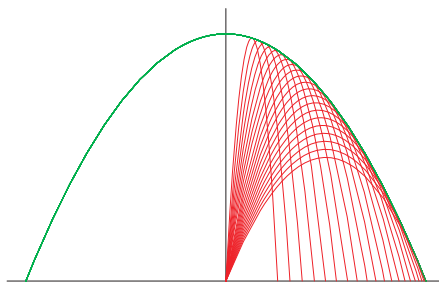
**Exemplul 4.2.3** (*evolventa cercului*) Un câine este legat cu lanțul de un par de rază  $a$ . Un copil enervează câinele și începe să fugă în jurul parului cu câinele după el, lanțul înfășurându-se în jurul parului, până când câinele dă cu capul de par. Se cere traiectoria câinelui și lungimea ei, dacă lungimea inițială a lanțului este  $l$ .

## 4.2.6 Infășurătoarea unei familii de curbe plane

Fie o familie de curbe plane care depind de un parametru  $p$  :

$$F(x, y, p) = 0 \quad (4.2.9)$$

**Definitia 4.2.11** Se numește *înășurătoarea* familiei de curbe (4.2.9) o curbă cu proprietatea că fiecare punct al ei se află pe una din curbele familiei și are aceeași tangentă cu curba respectivă din familie în punctul comun..



**Teorema 4.2.8** Punctele de pe înășurătoarea familiei (4.2.9) verifică sistemul:

$$\begin{cases} F(x, y, p) = 0 \\ F'_p(x, y, p) = 0 \end{cases} \quad (4.2.10)$$

**Demonstrație\*:** Căutăm ecuația curbei sub forma:

$$F(x, y, p(x)) = 0$$

Panta tangentei la curbă pentru un  $x$  fixat este:

$$m = -\frac{F'_x(x, y, p) + F'_p(x, y, p)p'(x)}{F'_y(x, y, p)}$$

iar panta tangentei la curba din familie care trece prin același punct este:

$$m = -\frac{F'_x(x, y, p)}{F'_y(x, y, p)}$$

Egalând cele două fracții rezultă că  $F'_p(x, y, p) = 0$ , care împreună cu ecuația familie de curbe implică (4.2.10).

**Exemplul 4.2.1** Să se afle înășurătoarea traiectoriilor descrise de un proiectil care pleacă din origine cu viteza  $v_0$  sub un unghi  $p$  față de orizontală, când  $p$  ia toate valorile posibile.

Soluție: Ec. traiectoriei:

$$\begin{cases} x = tv_0 \cos p \\ y = tv_0 \sin p - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

adică:

$$y - x \tan p + g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 p} = 0.$$

Derivând în raport cu  $p$  :

$$\begin{aligned} -x \frac{1}{\cos^2 p} + \frac{gx^2}{2v_0^2} \frac{-(-2 \cos p \sin p)}{\cos^4 p} &= 0 \\ -1 + \frac{gx \sin p}{v_0^2 \cos p} &= 0 \\ \tan p &= \frac{v_0^2}{gx} \end{aligned}$$

înfășurătoarea:

$$\begin{cases} y - x \tan p + g \frac{x^2}{2v_0^2 \cos^2 p} = 0 \\ \tan p = \frac{v_0^2}{gx} \end{cases}$$

$$y - x \frac{v_0^2}{gx} + \frac{gx^2}{2v_0^2} \left( 1 + \left( \frac{v_0^2}{gx} \right)^2 \right) = 0$$

$$: \frac{1}{2gv_0^2} (g^2 x^2 + 2ygv_0^2 - v_0^4) = 0,$$

$$y = \frac{1}{2gv_0^2} (v_0^4 - g^2 x^2)$$

**Teorema 4.2.9** Evoluta unei curbe este înfășurătoarea familiei de normale la curbă.

**Remarca 4.2.9** Orice curbă plană este înfășurătoarea familiei de tangente la curbă.

**Exemplul 4.2.2** Să se aște înfășurătoarea familiei de drepte care au proprietatea că segmentul de pe dreaptă cuprins între punctele de intersecție a dreptei cu axe de coordonate are lungime constantă  $a$ . (astroida).

## 4.3 Geometria diferențială a curbelor în spațiu

### 4.3.1 Generalități curbe în spațiu (strâmbe)

**Definitia 4.3.1** Se numește curbă în spațiu dată parametric mulțimea punctelor  $M(x, y, z)$  din spațiu a căror coordonate sunt date de

$$\Gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b] \quad (4.3.1)$$

funcțiile reale  $x, y, z$  fiind continue pe  $[a, b]$ .

**Definitia 4.3.2** Se numește curbă în spațiu dată vectorial mulțimea punctelor  $M(x, y, z)$  din spațiu pentru care vectorul de poziție  $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$  este dat de:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

**Remarca 4.3.1** O curbă în spațiu poate fi dată și ca intersecție de două suprafețe, în anumite condiții putându-se pune și sub forma parametrică, ca în următorul exemplu:

**Exemplul 4.3.1** (curba lui VIVIANI) Fie curba obținută din intersecția unei sfere cu un cilindru circular drept care trece prin centrul sferei și are raza jumătate raza sferei. Să aflăm ecuațiile parametrice, considerând că sfera are centrul în origine, raza  $R$  iar cilindrul are generatoarele paralele cu  $Oz$  și centrul în  $(R/2, 0, 0)$ .

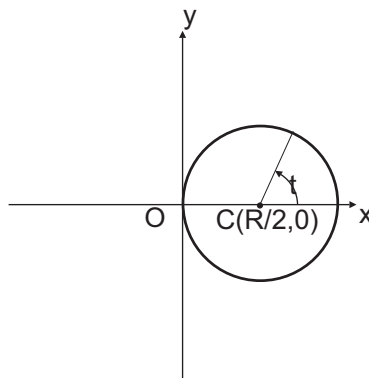
ecuația sferei este:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

iar a cilindrului:

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

Alegem ca și parametru unghiul  $t$  în parametrizarea cercului după care cilindrul intersectează planul  $xOy$ :



$$x = \frac{R}{2} \cos t + \frac{R}{2}, y = \frac{R}{2} \sin t, t \in [0, 2\pi]$$

înlocuind în ecuația sferei obținem:

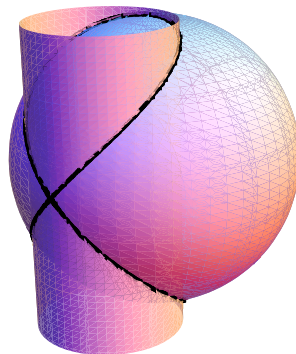
$$\left(\frac{R}{2} \cos t + \frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \sin t\right)^2 + z^2 = R^2$$

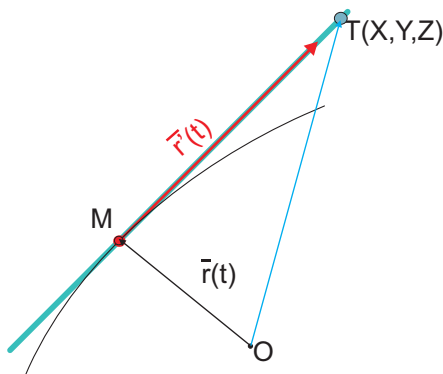
Făcând calculele rezultă:

$$z^2 = \frac{R^2}{2} (1 - \cos t) = R^2 \sin^2 \frac{t}{2}$$

deci curba VIVIANI are ecuațiile parametrice:

$$x = \frac{R}{2} \cos t + \frac{R}{2}, y = \frac{R}{2} \sin t, z = \pm R \sin \frac{t}{2}, t \in [0, 2\pi]$$





3

**Remarca 4.3.2** în cele ce urmează vom nota cu litere mici coordonatele unui punct de pe curbă și cu litere mari coordonatele unui punct de pe planele sau dreptele atașate curbei în punctul respectiv.

### 4.3.2 Tangenta și planul normal la o curbă în spațiu

Definiția tangentei la o curbă în spațiu este aceeași ca la o curbă plană:

**Definiția 4.3.3** Se numește tangentă la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  poziția limită a dreptei determinată de punctele  $M$  și  $M_1$  de pe curbă când punctul  $M_1$  tinde către  $M$ . (dacă această limită există).

**Teorema 4.3.1** Dacă funcțiile  $x, y, z$  sunt derivabile în  $t$  și

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

atunci ecuațiile tangentei la curbă sunt (coordonatele unui punct de pe tangentă fiind notate cu  $(X, Y, Z)$ ):

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)} \quad (\text{ETPS})$$

**Demonstrație:** Conform definiției derivatei unui vector și a tangentei, dacă  $T$  aparține tangentei (vezi figura precedentă) atunci vectorii  $\overrightarrow{MT}$  și  $\overrightarrow{r}'(t)$  sunt coliniari, deci coordonatele lor sunt proporționale:

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}$$

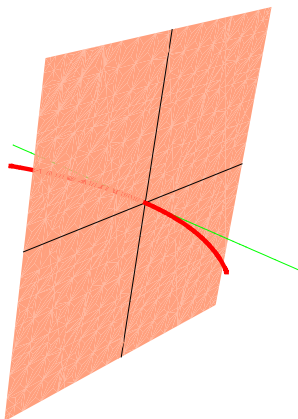
adică tocmai ecuațiile (ETPS).

**Definiția 4.3.4** Se numește plan normal la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  planul care trece prin  $M$  și este perpendicular pe tangenta la  $\Gamma$  în  $M$ .

**Teorema 4.3.2** Ecuația planului normal la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  este:

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) + z'(t)(Z - z(t)) = 0.$$

**Demonstrație:** Rezultă din definiția planului normal și ecuația planului determinat de un punct și un vector perpendicular pe el.

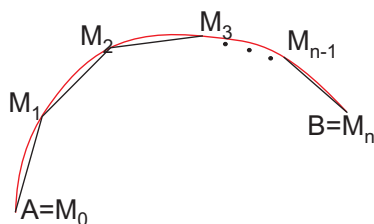


### 4.3.3 Lungimea unui arc de curbă, parametrul natural al unei curbe

Fie curba  $\Gamma$  dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Ne propunem să definim lungimea acestei curbe, precum și o formulă de calcul pentru lungime.



Pentru aceasta înscriem în curba  $\Gamma$  linia poligonală  $M_0M_1...M_n$  (vezi figura precedentă).

**Definitia 4.3.5** Se numește lungimea curbei  $\Gamma$  limita lungimii liniei poligonale  $M_0M_1...M_n$  când  $n \rightarrow \infty$  și lungimea celui mai mare segment de pe linia poligonală tinde la zero.

**Teorema 4.3.3** Dacă funcțiile  $x(t), y(t), z(t)$  au derivată continuă atunci curba  $\Gamma$  are lungime finită, dată de:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt \quad (\text{LCS})$$

**Demonstrație:**\* lungimea liniei poligonale  $M_0M_1...M_n$  este dată de ( $t_i$  este valoarea parametrului  $t$  corespunzătoare punctului  $M_i$ ):

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2 + (z(t_i) - z(t_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\zeta_i) + z'^2(\theta_i)} \end{aligned}$$

unde  $\xi_i, \zeta_i, \theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$ . Se demonstrează la analiză matematică că limita lui  $l_n$  când  $n \rightarrow \infty$  și  $\max_{i=1, n} |t_i - t_{i-1}| \rightarrow 0$  este tocmai integrala din partea dreaptă a egalității (LCS).  $\square$

**Exemplul 4.3.1** Să se calculeze lungimea curbei lui Viviani:

$$\begin{aligned} x &= \frac{R}{2} \cos t + \frac{R}{2}, y = \frac{R}{2} \sin t, z = +R \sin \frac{t}{2}, t \in [0, 2\pi] \\ l &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(-\frac{R}{2} \sin t\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \cos t\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \sin \frac{t}{2}\right)^2} dt = \\ &= \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \left(\sin \frac{t}{2}\right)^2} dt = ? \end{aligned}$$

**Definitia 4.3.6** Se numește parametrul natural  $s$  al curbei  $\Gamma$  lungimea arcului de curbă  $AM$ ,  $A$  fiind punctul de coordonate  $(x(a), y(a), z(a))$ , iar  $M$  punctul de coordonate  $(x(t), y(t), z(t))$ .

Din theorem precedentă rezultă imediat:

**Corolarul 4.3.1** Parametrul natural al curbei este dat de:

$$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)} d\tau. \quad (4.3.2)$$

**Remarca 4.3.3** Dacă în loc de parametrul  $t$  se consideră ca și parametru parametrul natural  $s$  se obține o parametrizare echivalentă a curbei (vezi remark 4.2.2), numită parametrizarea naturală:

$$\vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k}, s \in [0, l(\Gamma)]. \quad (4.3.3)$$

**Teorema 4.3.4** Dacă curba  $\Gamma$  este parametrizată natural atunci:

$$|\vec{r}'(s)| = 1. \quad (4.3.4)$$

**Demonstrație:**

$$\begin{aligned} \vec{r}'(s) &= x'(s)\vec{i} + y'(s)\vec{j} + z'(s)\vec{k} = \\ &= \frac{dt}{ds} \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dt}{ds} y'(t)\vec{j} + \frac{dt}{ds} z'(t)\vec{k} = \\ &= \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}}{\frac{ds}{dt}} = \\ &= \frac{x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}} \end{aligned}$$

de unde calculând modulul rezultă formula (4.3.4).

Din theorem precedentă și corollary 4.3.2 rezultă:

**Corolarul 4.3.2** Vectorul  $\vec{r}''(s)$  este perpendicular pe  $\vec{r}'(s)$ .

#### 4.3.4 Reperul și formulele lui Frénet

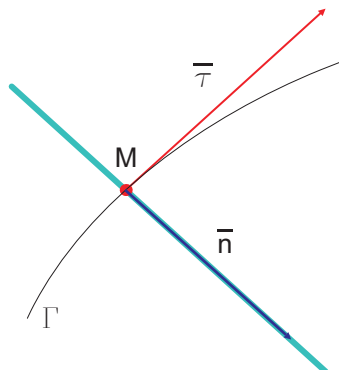
Din corollary 4.3.2 rezultă, notând cu  $\vec{\tau} = \vec{r}'(s)$  versorul tangentei și cu  $\vec{n}$  versorul lui  $\vec{r}''(s)$ , :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n} \quad (4.3.5)$$

unde  $K$  este funcție de  $s$  care se va preciza.

**Definitia 4.3.7** Se numește normala principală la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  dreapta care trece prin  $M$  și are ca vector director versorul  $\vec{n}$  (versorul normalei principale).

**Definitia 4.3.8** Se numește curbura curbei  $\Gamma$  în punctul  $M$  lungimea vectorului  $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$  (adică  $K$  din formula (4.3.5))

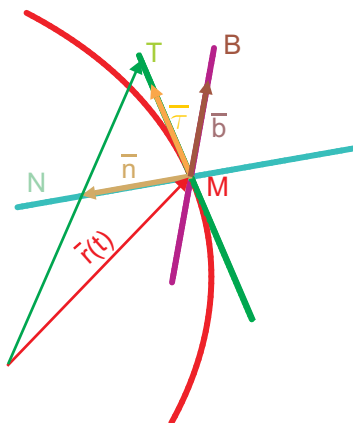


**Definitia 4.3.9** Se numește versorul binormalei la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  versorul  $\bar{b}$  definit de:

$$\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$$

și se numește binormala la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  dreapta care trece prin  $M$  și are ca vector director versorul  $\bar{b}$ .

**Definitia 4.3.10** Se numește reperul lui Frénet la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  reperul  $\{M, \bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}\}$ .



Reperul lui Frenet

Să calculăm acum derivatele versorilor reperului lui Frenet în raport cu parametrul natural al curbei  $\Gamma$ . Derivata lui  $\bar{\tau}$  este (vezi 4.3.5):

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds} = K\bar{n}$$

Derivata lui  $\bar{b}$  este un vector perpendicular pe  $\bar{b}$  și:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{b}}{ds} &= \frac{d\bar{\tau}}{ds} \times \bar{n} + \bar{\tau} \times \frac{d\bar{n}}{ds} = \\ &= K\bar{n} \times \bar{n} + \bar{\tau} \times \frac{d\bar{n}}{ds} = \\ &= \bar{\tau} \times \frac{d\bar{n}}{ds} \end{aligned}$$

deci  $\frac{d\bar{b}}{ds}$  este perpendicular și pe  $\bar{\tau}$ . Prin urmare  $\frac{d\bar{b}}{ds}$  este coliniar cu  $\bar{n}$  (a doua formulă a lui Frenet):

$$\frac{d\bar{b}}{ds} = -T\bar{n} \quad (4.3.6)$$

**Definitia 4.3.11** Se numește torsiunea curbei  $\Gamma$  în punctul  $M$  funcția  $T$  de  $s$  definită de (4.3.6).

Să calculăm acum  $\frac{d\bar{n}}{ds}$ . Deoarece

$$\bar{n} = \bar{b} \times \bar{\tau}$$

avem:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{n}}{ds} &= \frac{d\bar{b}}{ds} \times \bar{\tau} + \bar{b} \times \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \\ &= -T\bar{n} \times \bar{\tau} + \bar{b} \times K\bar{n} = \\ &= T\bar{b} - K\bar{\tau}. \end{aligned}$$

Am obținut astfel cea de a treia formulă a lui Frenet:

$$\frac{d\bar{n}}{ds} = -K\bar{\tau} + T\bar{b}. \quad (4.3.7)$$

**Remarca 4.3.4** Cele trei formule a lui Frenet se pot reține ușor sub forma unui tabel:

|                          | $\bar{\tau}$ | $\bar{n}$ | $\bar{b}$ |
|--------------------------|--------------|-----------|-----------|
| $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ | 0            | $K$       | 0         |
| $\frac{d\bar{n}}{ds}$    | $-K$         | 0         | $T$       |
| $\frac{d\bar{b}}{ds}$    | 0            | $-T$      | 0         |

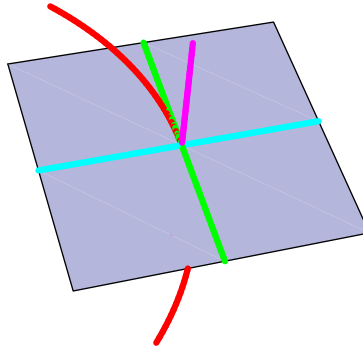
(4.3.8)

**Exemplul 4.3.1** Dacă  $\bar{r} = \bar{r}(t)$  reprezintă legea de mișcare a unui punct material, atunci:

$$\begin{aligned} \bar{v}(t) &= \bar{r}'(t) = \frac{d\bar{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau} = v\bar{\tau} \\ \bar{a}(t) &= \ddot{\bar{r}}(t) = \frac{d}{dt}(\bar{v}(t)) = \\ &= \frac{d}{dt}(v\bar{\tau}) = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \\ &= \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v^2K\bar{n} = \\ &= \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{n} = \bar{a}_t + \bar{a}_n \end{aligned}$$

### 4.3.5 Triedrul lui Frenet

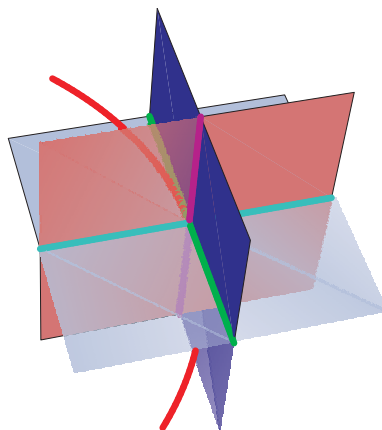
**Definitia 4.3.12** Se numește plan osculator la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  planul determinat de punctul  $M$  și versorii  $\bar{\tau}, \bar{n}$ .



**Remarca 4.3.5** Se demonstrează că planul osculator este poziția limită a unui plan care trece prin punctele  $M, M_1, M_2$  când  $M_1, M_2$  tind (pe  $\Gamma$ ) către  $M$ .

**Definitia 4.3.13** Se numește plan rectifiant la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  planul determinat de punctul  $M$  și versorii  $\bar{\tau}, \bar{b}$ .

**Definitia 4.3.14** Se numește triedrul lui Frenet la curba  $\Gamma$  în punctul  $M$  triedrul format din planul osculator, planul normal și planul rectifiant în punctul  $M$ , precum și din dreptele de intersecție ale acestor plane: binormala, tangenta, normala principală.



Triedrul lui Frenet

Să presupunem acum că curba  $\Gamma$  este dată parametric:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

Ne propunem să aflăm ecuațiile elementelor triedrului lui Frenet în funcție de  $t$ .

Ecuațiile tangentei și planului normal sunt deja cunoscute.

Avem:

$$\begin{aligned}\bar{\tau} &= \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{\overline{r'(t)}}{\frac{ds}{dt}} \\ \frac{d\bar{\tau}}{ds} &= \frac{\left(\frac{\overline{r'(t)}}{\frac{ds}{dt}}\right)'}{\frac{ds}{dt}} = \\ &= \frac{\overline{r''(t)} \frac{ds}{dt} - \frac{d^2s}{dt^2} \overline{r'(t)}}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} = K\bar{n}\end{aligned}$$

Din ultima egalitate și prima formulă a lui Frenet rezultă că  $\bar{n}$  este coplanar cu  $\overline{r''(t)}$  și  $\overline{r'(t)}$ , deci planul osculator este planul determinat de  $M$ ,  $\overline{r''(t)}$  și  $\overline{r'(t)}$ , prin urmare ecuația sa este:

$$\begin{vmatrix} X - x(t) & Y - y(t) & Z - z(t) \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{EPLO})$$

Din ecuația precedentă rezultă ecuațiile binormalei, ca dreaptă perpendiculară pe planul osculator:

$$\frac{X - x(t)}{\begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(t)}{\begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(t)}{\begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix}} \quad (\text{EB})$$

Planul rectifiant are ca și normală normala principală:

$$\bar{n} = \bar{b} \times \bar{\tau}$$

Din cele de mai sus rezultă că  $\bar{n}$  este paralel cu

$$\begin{aligned}\left(\overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)}\right) \times \overline{r'(t)} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \begin{vmatrix} y'(t) & z'(t) \\ y''(t) & z''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} z'(t) & x'(t) \\ z''(t) & x''(t) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} x'(t) & y'(t) \\ x''(t) & y''(t) \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \\ &= A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}\end{aligned}$$

Prin urmare ecuația planului rectifiant este:

$$A(X - x(t)) + B(Y - y(t)) + C(Z - z(t)) = 0 \quad (\text{EPR})$$

iar ecuațiile normalei principale sunt:

$$\frac{X - x(t)}{A} = \frac{Y - y(t)}{B} = \frac{Z - z(t)}{C} \quad (\text{ENPs})$$

**Exemplul 4.3.1** Să se determine elementele triedrului lui Frenet pt. curba:

$$x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, t \in \mathbb{R}$$

(elice circulară = arc)

$$\begin{aligned}\bar{r}(t) &= a \cos t \bar{i} + a \sin t \bar{j} + bt \bar{k} \\ \bar{r}'(t) &= -a \sin t \bar{i} + a \cos t \bar{j} + b \bar{k} \\ \bar{r}''(t) &= -a \cos t \bar{i} - a \sin t \bar{j}\end{aligned}$$

Ec. tangentei și planului normal:

$$\begin{aligned}\frac{X - a \cos t}{-a \sin t} &= \frac{Y - a \sin t}{a \cos t} = \frac{Z - bt}{b} \\ -a \sin t (X - a \cos t) + a \cos t (Y - a \sin t) + b (Z - bt) &= 0 \\ \bar{r}'(t) \times \bar{r}''(t) &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \end{vmatrix} = \\ &= ab \sin t \bar{i} - ab \cos t \bar{j} + a^2 \bar{k}\end{aligned}$$

Deci ec. planului osculator și ale binormalei sunt:

$$b \sin t (X - a \cos t) - b \cos t (Y - a \sin t) + a(Z - bt) = 0$$

$$\frac{X - a \cos t}{b \sin t} = \frac{Y - a \sin t}{-b \cos t} = \frac{Z - bt}{a}$$

$$\begin{aligned} \left( \overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)} \right) \times \overline{r'(t)} &= a \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b \sin t & -b \cos t & a \\ -a \sin t & a \cos t & b \end{vmatrix} = \\ &= - (a^2 + b^2) \cos t \vec{i} - (a^2 + b^2) \sin t \vec{j} + 0 \vec{k} \end{aligned}$$

Ec. plan rectifiant și normalei principale:

$$\begin{aligned} -\cos t (X - a \cos t) - \sin t (Y - a \sin t) &= 0 \\ \frac{X - a \cos t}{-\cos t} &= \frac{Y - a \sin t}{-\sin t} = \frac{Z - bt}{0} \end{aligned}$$

lungimea unei spire:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}.$$

#### 4.3.6 Calculul curburii și torsiunii

**Teorema 4.3.5** Dacă curba  $\Gamma$  este dată vectorial:

$$\overline{r(t)} = x(t) \vec{i} + y(t) \vec{j} + z(t) \vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

atunci:

$$\begin{aligned} K &= \frac{|\overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)}|}{|\overline{r'(t)}|^3} \\ T &= \frac{\left( \overline{r'(t)}, \overline{r''(t)}, \overline{r'''(t)} \right)}{|\overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)}|^2} \end{aligned}$$

**Exemplul 4.3.1** Să se calculeze curbura și torsiunea la elice.

Avem

$$\begin{aligned} \overline{r(t)} &= a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + bt \vec{k} \\ \overline{r'(t)} &= -a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k} \\ \overline{r''(t)} &= -a \cos t \vec{i} - a \sin t \vec{j} \\ \overline{r'''(t)} &= a \sin t \vec{i} - a \cos t \vec{j} \\ |\overline{r'(t)}| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \left| \overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)} \right| &= |ab \sin t \vec{i} - ab \cos t \vec{j} + a^2 \vec{k}| = \\ &= \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4} = a \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

deci:

$$K = \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{\left( \sqrt{a^2 + b^2} \right)^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{r'(t)}, \overline{r''(t)}, \overline{r'''(t)}\right) &= \left(\overline{r'''(t)}, \overline{r'(t)}, \overline{r''(t)}\right) = \\
&= \overline{r'''(t)} \cdot \left(\overline{r'(t)} \times \overline{r''(t)}\right) = \\
&= (a \sin t\bar{i} - a \cos t\bar{j}) \cdot (ab \sin t\bar{i} - ab \cos t\bar{j} + a^2\bar{k}) = \\
&= a^2b \sin^2 t + a^2b \cos^2 t = a^2b
\end{aligned}$$

deci:

$$T = \frac{a^2b}{\left(a\sqrt{a^2+b^2}\right)^2} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

**Teorema 4.3.6** Dacă curbura unei curbe este identic nulă, atunci curba este un segment dintr-o dreaptă.

**Teorema 4.3.7** Dacă torsiunea unei curbe este identic nulă, atunci curba este o curbă plană, planul curbei fiind planul osculator în un punct arbitrar.

**Exemplul 4.3.2** Să se dem. că curba  $\Gamma$  dată parametric de :

$$x = a_x t^2 + b_x t + c_x, y = a_y t^2 + b_y t + c_y, z = a_z t^2 + b_z t + c_z$$

unde  $a_x, \dots$  sunt constante este o curbă plană și să se afle planul ei.

Soluție: avem  $\overline{r'(t)} = (2a_x t + b_x)\bar{i} + (2a_y t + b_y)\bar{j} + (2a_z t + b_z)\bar{k}$ ,  $\overline{r''(t)} = (2a_x)\bar{i} + (2a_y)\bar{j} + (2a_z)\bar{k}$ ,  $\overline{r'''(t)} = \vec{0}$  deci  $T = 0$ . Planul curbei este planul osculator într-un punct arbitrar:

$$\begin{vmatrix}
X - (a_x t^2 + b_x t + c_x) & Y - (a_y t^2 + b_y t + c_y) & Z - (a_z t^2 + b_z t + c_z) \\
2a_x t + b_x & 2a_y t + b_y & 2a_z t + b_z \\
2a_x & 2a_y & 2a_z
\end{vmatrix} = 0$$

Făcând calculele obținem:

$$\begin{aligned}
&(2a_z b_y - 2a_y b_z)X + (2a_x b_z - 2a_z b_x)Y + (2a_y b_x - 2a_x b_y)Z + \\
&+ (2a_x b_y c_z - 2a_x b_z c_y - 2a_y b_x c_z + 2a_y b_z c_x + 2a_z b_x c_y - 2a_z b_y c_x) = 0
\end{aligned}$$

## 4.4 Geometria diferențială a suprafețelor

### 4.4.1 Generalități

**Definiția 4.4.1** Se numește suprafață dată parametric mulțimea punctelor din spațiu ale căror coordonate sunt date de:

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (\text{EPS})$$

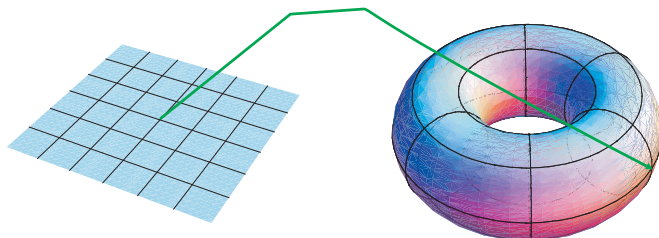
unde  $(u, v)$  iau valori într-o mulțime plană  $D$ .

**Remarca 4.4.1** De fapt suprafața nu este altceva decât "deformarea" mulțimii plane  $D$ .

**Exemplul 4.4.1** Fie torul dat parametric:

$$\begin{aligned}
x &= (a + b \cos u) \cos v \\
y &= (a + b \cos u) \sin v \\
z &= b \sin u
\end{aligned}$$

,  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ .



**Remarca 4.4.2** Ecuțiile (EPS) se pot scrie și vectorial, notând cu  $\vec{r}$  vectorul de poziție al unui punct de pe suprafață:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(u, v) = \\ &= x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

**Definitia 4.4.2** Se numește suprafață dată explicit mulțimea punctelor din spațiu a căror coordonate sunt date de:

$$z = f(x, y) \quad (\text{EES})$$

unde  $(x, y)$  iau valori într-o mulțime plană  $D$ .

**Definitia 4.4.3** Se numește suprafață dată implicit mulțimea punctelor din spațiu a căror coordonate verifică:

$$F(x, y, z) = 0 \quad (\text{EIS})$$

**Exemplul 4.4.2** Sfera cu centrul în origine și de rază  $R$  poate fi dată:

$$\text{implicit} : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

$$\text{explicit} : z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

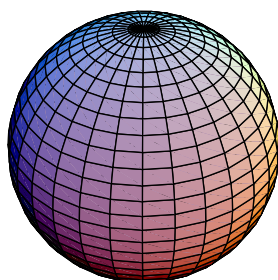
$$\text{parametric} : x = R \cos u \sin v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos v,$$

$$u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

**Definitia 4.4.4** Se numește curbă pe o suprafață dată parametric mulțimea punctelor de pe suprafață pentru care:

$$\begin{aligned}u &= \phi(v) \text{ sau } v = \psi(u) \text{ sau } h(u, v) = 0 \\ &\text{sau } u, v \text{ sunt funcții de un parametru } t.\end{aligned}$$

**Exemplul 4.4.3** Curbele de coordonate: curba de coordonată  $v : u = u_0(\text{constant})$ , curba de coordonată  $u : v = v_0(\text{constant})$ . Pe sferă acestea sunt "paralelele" și "meridianele":



#### 4.4.2 Plan tangent și normala la o suprafață

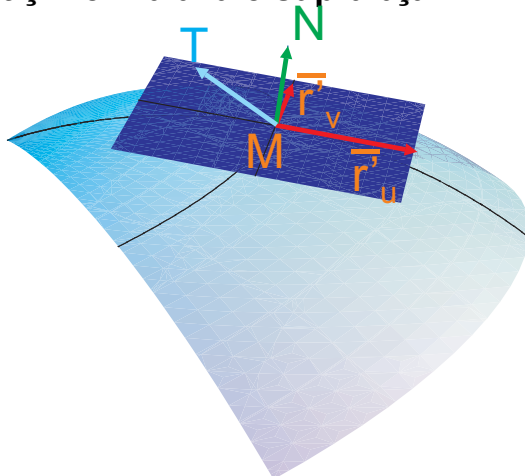


Figura precedentă

Fie o suprafață dată vectorial,  $M$  un punct pe suprafață,  $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$  derivatele parțiale ale vectorului de poziție al punctului  $M$ .

**Teorema 4.4.1** *Tangenta la orice curbă de pe suprafață (considerată în punctul  $M$ ) care trece prin  $M$  este coplanară cu  $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$ .*

**Demonstrație:** Dacă curba este dată  $u = \phi(v)$  atunci tangenta la curbă are vector director  $\vec{r}'_u \phi'(v) + \vec{r}'_v$ .  $\square$

**Definiția 4.4.5** *Se numește plan tangent la suprafață în punctul  $M$  planul format din toate tangentele la curbe de pe suprafața care trec prin  $M$ .*

**Definiția 4.4.6** *Se numește normală la suprafață în punctul  $M$  normala la planul tangent la suprafață în punctul  $M$ .*

Ecuția planului tangent la suprafață în punctul  $M$  este:

$$\begin{vmatrix} X - x(u, v) & Y - y(u, v) & Z - z(u, v) \\ x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{EPTS})$$

iar ecuațiile normalei la suprafață sunt:

$$\frac{X - x(u, v)}{\begin{vmatrix} y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{Y - y(u, v)}{\begin{vmatrix} z'_u(u, v) & x'_u(u, v) \\ z'_v(u, v) & x'_v(u, v) \end{vmatrix}} = \frac{Z - z(u, v)}{\begin{vmatrix} x'_u(u, v) & y'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) \end{vmatrix}}. \quad (\text{ENS})$$

**Demonstrație:** (vezi și figura precedentă) Conform definiției (4.4.5) și teoremei (4.4.1) planul tangent este determinat de punctul  $M$  și vectorii  $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$ . Notând cu  $(X, Y, Z)$  coordonatele punctului  $T$  din planul tangent rezultă ecuația (EPTS). Analog, notând cu  $(X, Y, Z)$  coordonatele punctului  $N$  de pe normală și ținând cont că vectorul director al normalei este  $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ ,

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u(u, v) & y'_u(u, v) & z'_u(u, v) \\ x'_v(u, v) & y'_v(u, v) & z'_v(u, v) \end{vmatrix} \quad (4.4.2)$$

rezultă (ENS).□

**Remarca 4.4.3** Considerăm numai suprafețe cu "2 fețe", adică în fiecare punct de pe suprafață normala dată de (4.4.2) este unic determinată ca sens.

**Remarca 4.4.4** Dacă suprafața este dată explicit (EES) atunci, folosind notațiile lui Monge:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

ecuația planului tangent devine:

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - f(x, y)) = 0,$$

iar ecuațiile normalei:

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - f(x, y)}{-1}.$$

Fie sfera dată

$$\begin{aligned} \text{parametric:} \quad x &= R \cos u \sin v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos v, \\ u &\in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]. \end{aligned}$$

Atunci ecuația planului tangent într-un punct arbitrar este:

$$\begin{vmatrix} X - R \cos u \sin v & Y - R \sin u \sin v & Z - R \cos v \\ -R \sin u \sin v & R \cos u \sin v & 0 \\ R \cos u \cos v & R \sin u \cos v & -R \sin v \end{vmatrix} = 0$$

iar ecuațiile normalei sunt:

$$\frac{X - R \cos u \sin v}{\begin{vmatrix} R \cos u \sin v & 0 \\ R \sin u \cos v & -R \sin v \end{vmatrix}} = \frac{Y - R \sin u \sin v}{\begin{vmatrix} 0 & -R \sin u \sin v \\ -R \sin v & R \cos u \cos v \end{vmatrix}} = \frac{Z - R \cos v}{\begin{vmatrix} -R \sin u \sin v & R \cos u \sin v \\ R \cos u \cos v & R \sin u \cos v \end{vmatrix}}$$

Dacă considerăm ecuația explicită:

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

atunci

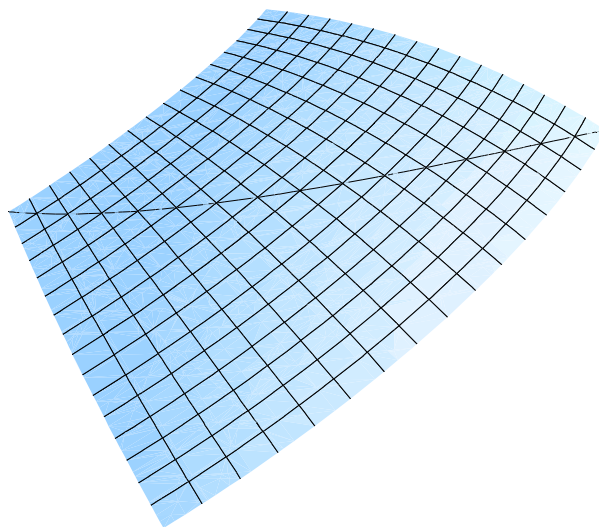
$$p = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, q = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

și ecuația planului tangent în punctul  $(x, y, \sqrt{R^2 - x^2 - y^2})$  va fi:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}(X - x) + \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}(Y - y) - (Z - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) &= 0 \\ xX + yY + zZ &= R^2 \end{aligned}$$

iar ecuațiile normalei în același punct:

$$\frac{X - x}{\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}} = \frac{Y - y}{\frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}} = \frac{Z - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{-1}.$$



4

**Remarca 4.4.5** Dacă suprafața este dată implicit:

$$F(x, y, z) = 0$$

din teorema Funcției Implicite

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

înlocuite în

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - f(x, y)) = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0$$

**Exemplul 4.4.1** Pt. sferă

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \frac{\partial F}{\partial y} = 2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z$$

ec. plan tangent:

$$2x(X - x) + 2y(Y - y) + 2z(Z - z) = 0$$

$$xX + yY + zZ - R^2 = 0$$

**Exemplul 4.4.2** Plan tangent la H1:

$$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$$

este

$$xX + yY - zZ - 1 = 0$$

### 4.4.3 Lungimea unei curbe pe o suprafață

Se știe

$$ds = |r'(t)| dt = \sqrt{r'(t) \cdot r'(t)} dt$$

$$\overline{r}(t) = \overline{r}(u(t), v(t))$$

$$\overline{r}'(t) = \overline{r}'_u(u(t), v(t)) u'(t) + \overline{r}'_v(u(t), v(t)) v'(t)$$

deci:

$$\begin{aligned} \overline{r}'(t) \overline{r}'(t) &= (\overline{r}'_u u'(t) + \overline{r}'_v v'(t)) (\overline{r}'_u u'(t) + \overline{r}'_v v'(t)) = \\ &= \overline{r}'_u \overline{r}'_u (u'(t))^2 + 2\overline{r}'_u \overline{r}'_v u'(t) v'(t) + \overline{r}'_v \overline{r}'_v (v'(t))^2 \end{aligned}$$

rezultă (ținând cont că  $u'(t) dt = du$ ):

$$\begin{aligned} ds^2 &= \overline{r}'_u \overline{r}'_u du^2 + 2\overline{r}'_u \overline{r}'_v dudv + \overline{r}'_v \overline{r}'_v dv^2 = \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

unde:

$$\begin{aligned} E &= (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2 \\ F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v \\ G &= (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2 \end{aligned}$$

Lungimea unei curbe  $\Gamma$  pe suprafață va fi:

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds$$

**Remarca 4.4.6** Membrul drept al formulei (4.4.3) poartă denumirea de prima formă pătratică fundamentală a unei suprafețe.

**Exemplul 4.4.1** Să se calculeze lungimea unui meridian pe sfera de rază  $R$ . Ec. parametrice  $x = R \cos u \sin v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos v$ . pt. un meridian avem  $u = ct., v \in [0, \pi]$ .

$$\begin{aligned} x'_u &= -R \sin u \sin v, y'_u = R \cos u \sin v, z'_u = 0 \\ x'_v &= R \cos u \cos v, y'_v = R \sin u \cos v, z'_v = -R \sin v \\ E &= (-R \sin u \sin v)^2 + (R \cos u \sin v)^2 + 0^2 = R^2 \sin^2 v \\ F &= .. = 0 \\ G &= (R \cos u \cos v)^2 + (R \sin u \cos v)^2 + (-R \sin v)^2 = R^2 \end{aligned}$$

$u = ct.$  atunci  $du = 0$

$$\begin{aligned} l(\Gamma) &= \int_{\Gamma} ds = \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 v \cdot 0^2 + R^2 dv^2} = \int_0^{\pi} R dv = \pi R. \end{aligned}$$

Dacă se calculează lungimea unei "paralele"  $v = v_0$  atunci se obține  $l = 2\pi R \sin v_0$ .

**Exemplul 4.4.2** Să se calculeze lungimea curbei de pe o sferă de rază  $R$ , obținută prin intersecția sferei cu un cilindru de diametru  $R$  care trece prin centrul sferei. (Viviani).

Rezolvare: Fie sfera de ec. parametrice:

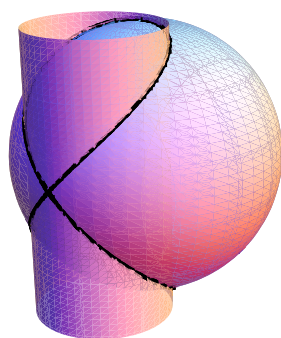
$$x = R \cos u \sin v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos v$$

Ec. cilindrului:

$$(x - R/2)^2 + y^2 = (R/2)^2$$

Pentru punctele de intersecție:

$$(R \cos u \sin v - R/2)^2 + (R \sin u \sin v)^2 = (R/2)^2$$



5

Făcând calculele:

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 u \sin^2 v - 4 \cos u \sin v + 1 + 4 \sin^2 u \sin^2 v &= 1 \\ \sin^2 v - \cos u \sin v &= 0 \\ \sin v - \cos u &= 0 \end{aligned}$$

elementul de arc:

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2 = \\ &= R^2 \sin^2 v du^2 + R^2 dv^2 \end{aligned}$$

din  $\sin v - \cos u = 0$  rezultă:

$$\begin{aligned} \cos v dv + \sin u du &= 0 \\ du &= \frac{\cos v dv}{\sin u} \end{aligned}$$

Înlocuind în  $ds^2$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2 \sin^2 v \frac{\cos^2 v}{\sin^2 u} dv^2 + R^2 dv^2 = \\ &= R^2 \left( \sin^2 v \frac{\cos^2 v}{1 - \cos^2 u} \right) dv^2 = \\ &= R^2 (\sin^2 v + 1) dv^2 \end{aligned}$$

Lungimea unui sfert din curbă:

$$l = R \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2 v} dv.$$

#### 4.4.4 Unghiul a două curbe situate pe o suprafață

Pe suprafață avem două curbe  $\Gamma_1$  și  $\Gamma_2$  care se intersectează în  $M$ . Dacă notăm diferențialele lui  $u, v$  pe  $\Gamma_1$  cu  $du, dv$  și diferențialele pe  $\Gamma_2$  cu  $\delta u, \delta v$  atunci unghiul curbelor va fi dat de:

$$\cos \alpha = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}} \quad (4.4.4)$$

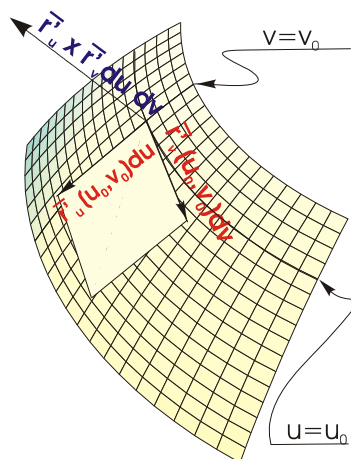
unde  $E, F, G$  se calculează în punctul  $M$ . Dacă curbele sunt curbe de coordonate atunci  $dv = 0, \delta u = 0$  și unghiul va fi

$$\cos \alpha = \frac{F du \delta v}{\sqrt{E} du \sqrt{G} \delta v} = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

acest unghi este  $\pi/2$  dacă și numai dacă  $F = 0$ .

#### 4.4.5 Elementul de arie al unei suprafețe

**Definitia 4.4.7** Se numește elementul de arie al unei suprafețe aria (notată  $d\sigma$ ) paralelogramului construit pe vectorii  $\overline{r'_u} du, \overline{r'_v} dv$ .



**Teorema 4.4.2** Elementul de arie este:

$$\begin{aligned} d\sigma &= |\overline{r'_u} \times \overline{r'_v}| du dv = \\ &= \sqrt{EG - F^2} du dv \end{aligned}$$

Aria suprafeței va fi:

$$A = \int_{S_1} d\sigma = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Dacă suprafața este dată explicit atunci:

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

**Exemplul 4.4.1** Aria sferei, care e dată parametric:  $x = R \cos u \sin v, y = R \sin u \sin v, z = R \cos v$ .

,  $u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi]$ .  $E = R^2 \sin^2 v, G = R^2, F = 0$ . Aria:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left( \int_0^{2\pi} \sqrt{R^4 \sin^2 v} du \right) dv &= R^2 \int_0^{2\pi} du \int_0^\pi \sin v dv = \\ &= R^2 2\pi (-\cos v) \Big|_0^\pi = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Exemplul 4.4.2** Aria torului:

$$\begin{aligned} x &= (a + b \cos u) \cos v \\ y &= (a + b \cos u) \sin v \\ z &= b \sin u \end{aligned}$$

,  $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ . Avem:

$$\begin{aligned} E &= x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = \\ &= (-b \sin u \cos v)^2 + (-b \sin u \sin v)^2 + (b \cos u)^2 = \\ &= b^2 \\ G &= x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = -(a + b \cos u) \sin v)^2 + ((a + b \cos u) \cos v)^2 = \\ &= (a + b \cos u)^2 \\ F &= (-b \sin u \cos v) (- (a + b \cos u) \sin v) + (-b \sin u \sin v) ((a + b \cos u) \cos v) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

aria torului va fi:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} b(a + b \cos u) du \right) dv &= \\
 &= 2\pi b \int_0^{2\pi} (a + b \cos u) du = \\
 &= 2\pi b (au + b \sin u) \Big|_0^{2\pi} = \\
 &= 2b\pi 2a\pi = 4\pi^2 ab = (2\pi a)(2\pi b)
 \end{aligned}$$

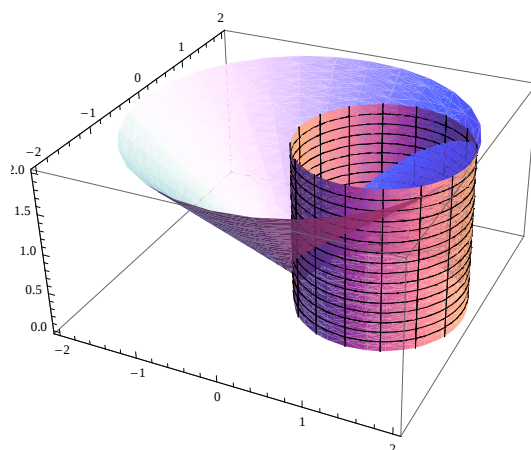
**Exemplul 4.4.3** Aria mărginită de curba lui Viviani pe sferă: Ec. explicită a semisferei:

$$\begin{aligned}
 z &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\
 d\sigma &= \sqrt{1 + \left( \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2 + \left( \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right)^2} dx dy = \\
 &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \\
 &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy
 \end{aligned}$$

Aria va fi:

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right). \\
 D &: (x - R/2)^2 + y^2 \leq (R/2)^2
 \end{aligned}$$

**Exemplul 4.4.4** Să se afle aria suprafeței din conul de ecuație  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  decupată de cilindrul  $x^2 + y^2 = 2x$ . Figura:



Avem:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

unde  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$ ,  $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . Deci:

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} dx dy = \\ &= \sqrt{2} \iint_D dx dy = \pi\sqrt{2}, \end{aligned}$$

deoarece aria domeniului  $D$  este aria unui cerc de rază 1. Dacă se calculează aria trecând la coordonate polare  $x = \rho \cos t$ ,  $y = \rho \sin t$  ecuația cercului  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  devine  $\rho^2 - 2\rho \cos t = 0$ ,  $\rho = 0$ ,  $\rho = 2 \cos t$  și:

$$\begin{aligned} \iint_D dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{2 \cos t} \rho d\rho \right) dt = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{4 \cos^2 t}{2} \right) dt = \dots = \pi. \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAFIE

- [1] NĂSTĂSESCU, *Algebr cl.XI-a*, E.D.P., 1996.
- [2] NĂSTĂSESCU, *Algebr cl. XII-a*, E.D.P., 1997
- [3] MALIȚA, MIRCEA, ZIDĂROIU, *Matematica organizrii*, Ed. . București 1979
- [4] RUSU, EUGEN , *Vectori*, E,.D.P București 198x.