Cercetari operationale

O.M. Gurzău

1Programare liniară

1.1 Algoritmul Simplex

(1947, G. Dantzig)

Problema:

Program liniar sub formă canonică:

Să se afle maximul funcţiei

$$f\left(x_1, ...x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + c_{n+1}$$

cu condiţiile:

(1.1.1) $$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \ \leq \ b_j, j = \overline{1, m}.$$

(1.1.2) $$x_i \ \geq \ 0, i = \overline{1, n}.$$

în cele ce urmează condiţiile (1.1.1) le vom rescrie sub forma:

(1.1.3) $$y_j = b_j + \sum_{i=1}^{n} \left(a_{ji}\right) \left(-x_i\right) \geq 0$$

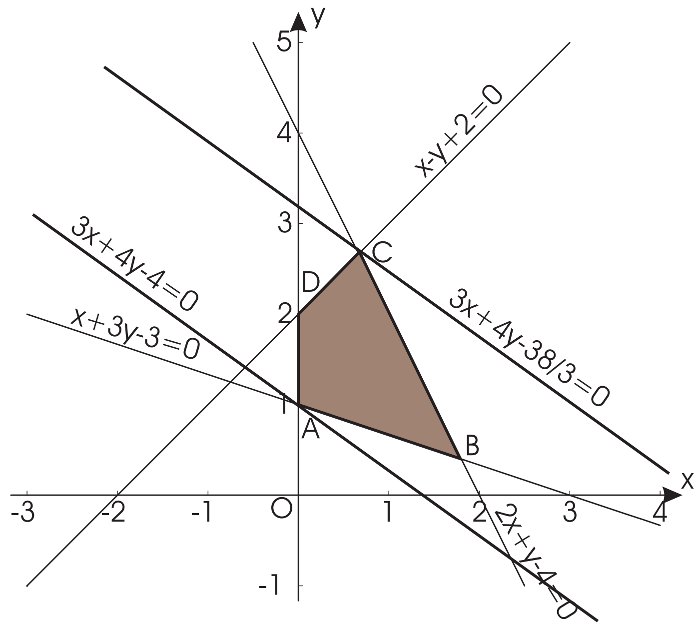
Soluţia $(x_1^*, ..., x_n^*)$ se numeşte soluţia optimă (program optim).
$f(x_1^*, ..., x_n^*) \geq f\left(x_1, ...x_n\right), \forall\left(x_1, ...x_n\right)$ care verifică ineg.(1.1.1),(1.1.2).

1.2 Interpretare geometrică pentru două variabile

Exemplul 2.1 *Să se afle minimul, respectiv maximul funcţiei* $f\left(x, y\right) = 3x + 4y$ *cu restricţiile:*

(1.2.1)
$$\begin{cases} x + 3y \geq 3 \\ x - y \geq -2 \\ 2x + y \leq 4 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{cases}$$

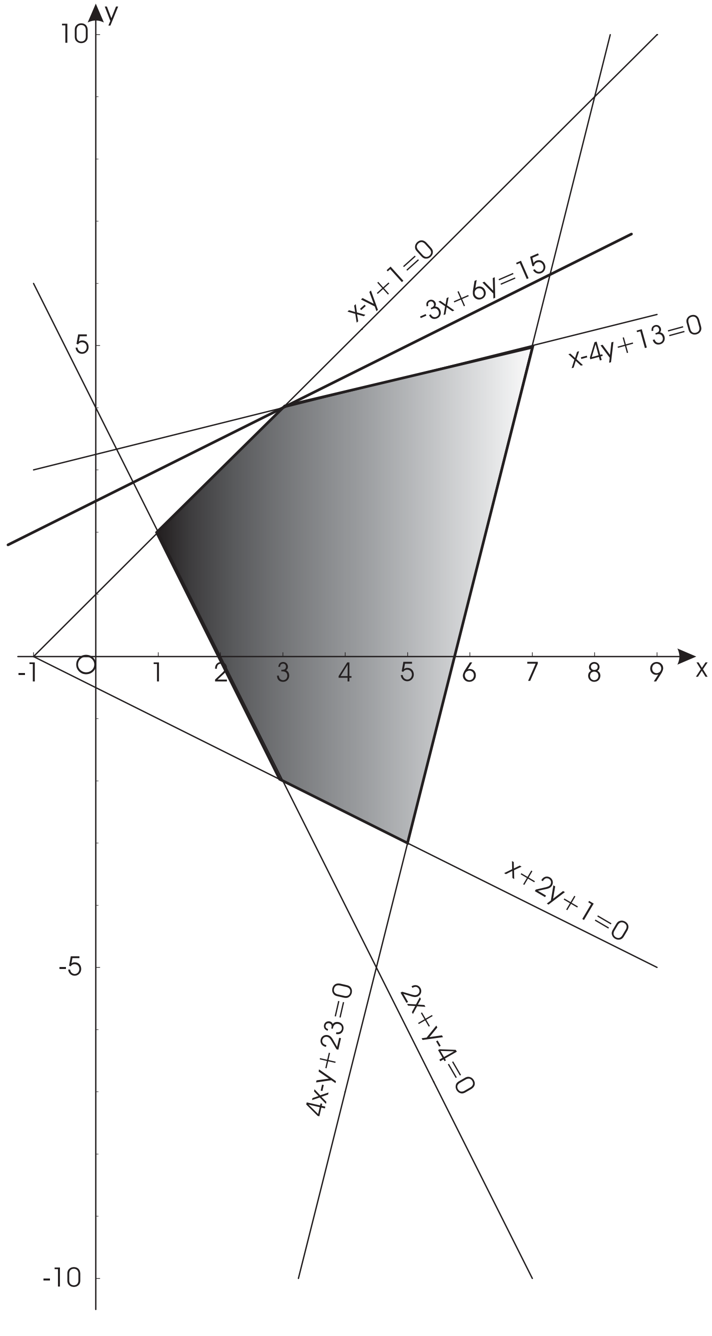
Pentru rezolvare se desenează zona din plan care corespunde la inegalităţile (1.2.1) şi se determină dreapta paralelă cu $3x + 4y = 0$ cea mai depărtată, respectiv cea mai apropiată de origine care intersectează zona:



Exemplul 2.2 *Să se afle minimul, respectiv maximul funcţiei* $f(x,y) = -3x + 6y$ *cu restricţiile:*

(1.2.2)
$$\begin{cases} x + 2y \geq -1 \\ 2x + y \geq 4 \\ x - y \geq -1 \\ x - 4y \geq 13,\ -4x + y \geq -23 \end{cases}$$

Pentru rezolvare se desenează zona din plan care corespunde la inegalităţile (1.2.2) şi se determină dreapta paralelă cu $-3x + 6y = 0$ care intersectează axa Oy în cel mai apropiat (depărtat) de origine şi intersectează zona:


y
x
10
5
-5
-10
-1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
x-y+1=0
-3x+6y=15
x-4y+13=0
x+2y+1=0
4x-y+23=0
2x+y-4=0

1.2.1 Algoritmul general

Algoritmul va consta din 2 faze:

1. Se determină o "soluţie admisibilă", adică $(x_1, ...x_n)$ care verifică ineg. date.
2. Se "imbunătăţeşte" soluţia astfel găsită.

Pasul de bază este "pas Gauss-Jordan modificat".

La problema de optimizare liniară ataşăm tabelul simplex:

(1.2.3)

	$-x_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$	1
$y_1 =$	a_{11}	a_{12}	$\cdots$	a_{1n}	b_1
$y_2 =$	a_{21}	a_{22}	$\cdots$	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m =$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots$	a_{mn}	b_m
$f =$	$-c_1$	$-c_2$	$\cdots$	$-c_n$	c_{n+1}

Schimbăm în acest tabel $(-x_1)$ cu y_1 :

ec 1:

$$y_1 = \sum_{i=1}^{n} (-a_{1i})\, x_i + b_1$$

$$a_{11} \neq 0$$

$$x_1 = \frac{-y_1 + \sum_{i=2}^{n} (a_{1i}) (-x_i) + b_1}{a_{11}} \tag{1.2.4}$$

Linia 1 din tabelul modificat:

$$\frac{1}{a_{11}} \quad \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad \cdots \quad \frac{b_1}{a_{11}}$$

înlocuind x_1 în expresiile y_2, ..., y_m avem:

$$\begin{aligned}
y_2 &= \sum_{i=1}^{n} a_{2i} (-x_i) + b_2 = \\
&= a_{21} \left(-\frac{-y_1 + \sum_{i=2}^{n} (a_{1i}) (-x_i) + b_1}{a_{11}} \right) + \sum_{i=2}^{n} a_{2i} (-x_i) + b_2 = \\
&= -\frac{a_{21}}{a_{11}} (-y_1) + \sum_{i=2}^{n} \frac{-a_{21}a_{1i} + a_{2i}a_{11}}{a_{11}} (-x_i) + \frac{-a_{21}b_1 + a_{11}b_2}{a_{11}}
\end{aligned}$$

....

$$
\begin{aligned}
y_m &= \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\left(-x_i\right) + b_m = \\
&= a_{m1}\left(-\frac{-y_1 + \sum_{i=2}^{n}\left(a_{1i}\right)\left(-x_i\right) + b_1}{a_{11}}\right) + \sum_{i=2}^{n} a_{mi}\left(-x_i\right) + b_m = \\
&= -\frac{a_{m1}}{a_{11}}\left(-y_1\right) + \sum_{i=2}^{n} \frac{-a_{m1}a_{1i} + a_{mi}a_{11}}{a_{11}}\left(-x_i\right) + \frac{-a_{m1}b_1 + a_{11}b_m}{a_{11}}
\end{aligned}
$$

Obs. La linia k adun linia 1 înmulţită cu $-\frac{a_{k1}}{a_{11}}$.

Linia 1 devine linia 1 : a_{11}

Coloana 1 devine $-$ coloana 1:a_{11}.

	$-y_1$	$-x_2$	$\cdots$	$-x_n$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{a_{11}}$	....	$\cdots$	$\frac{a_{1n}}{a_{11}}$	$\frac{b_1}{a_{11}}$
$y_2 =$	$-\frac{a_{21}}{a_{11}}$	$a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}$	$\cdots$	$a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}$	$b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m =$	$-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$	$a_{m2} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12}$	$\cdots$	$a_{mn} - \frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n}$	$b_m - \frac{a_{m1}}{a_{11}}b_1$
$f =$	$-\frac{c_1}{a_{11}}$	$c_2 - \frac{c_1}{a_{11}}a_{12}$	$\cdots$	$c_n - \frac{c_1}{a_{11}}a_{1n}$	$c_{n+1} - \frac{c_1}{a_{11}}b_1$

Procedând la fel cu $x_2, x_3, ..., x_n$ se ajunge la tabelul:

(1.2.5)

	$-y_1$	$-y_2$	$\cdots$	$-y_n$	1
$x_1 =$	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	d_1
$x_2 =$	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	d_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n =$	c_{n1}	c_{n2}	$\cdots$	c_{nn}	d_n
$y_{n+1} =$	$c_{n+1,1}$	$c_{n+1,2}$	$\cdots$	$c_{n+1,n}$	d_{n+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m =$	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	d_m
$f =$	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	Q

Acest tabel corespunde la următoarea problemă de optimizare:

(1.2.6) $$\max f(y) = \sum_{i=1}^{n} q_i(-y_i) + Q$$

cu condiţiile:

(1.2.7) $$y_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(-y_j) + d_i \geq 0,\ i = \overline{n+1, m}$$
$$y_i \geq 0, i = \overline{1, n}$$

iar legătura cu variabilele iniţiale este dată de:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(-y_j) + d_i, i = \overline{1, n}$$

Exemplul 2.1 *Să se elimine necunoscutele* x_1, x_2 *pentru problema:*

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2) &= -3x_1 + 6x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 1 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4 &\geq 0 \\ x_1 - x_2 + 1 &\geq 0 \\ x_1 - 4x_2 + 13 &\geq 0 \\ -4x_1 + x_2 + 23 &\geq 0. \end{aligned}$$

Tabelul simplex corespunzător:

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	$\overset{pivot}{-1}$	-2	1
$y_2 =$	-2	-1	-4
$y_3 =$	-1	1	1
$y_4 =$	-1	4	13
$y_5 =$	4	-1	23
$f =$	3	-6	0

	$-y_1$	$-x_2$	**1**
$x_1 =$	$\frac{1}{-1} = -1$	$\frac{-2}{-1} = 2$	$\frac{1}{-1} = -1$
$y_2 =$	$-\frac{-2}{-1} = -2$	*pivot* $-1 + \left(-\frac{-2}{-1}\right)(-2) = 3$	$-4 + \left(-\frac{-2}{-1}\right) 1 = -6$
$y_3 =$	$-\frac{-1}{-1} = -1$	$1 + \left(-\frac{-1}{-1}\right)(-2) = 3$	$1 + \left(-\frac{-1}{-1}\right) 1 = 0$
$y_4 =$	$-\frac{-1}{-1} = -1$	$4 + \left(-\frac{-1}{-1}\right)(-2) = 6$	$13 + \left(-\frac{-1}{-1}\right) 1 = 12$
$y_5 =$	$-\frac{4}{-1} = 4$	$-1 + \left(-\frac{4}{-1}\right)(-2) = -9$	$23 + \left(-\frac{4}{-1}\right) 1 = 27$
$f =$	$-\frac{3}{-1} = 3$	$-6 + \left(-\frac{3}{-1}\right)(-2) = -12$	$0 + \left(-\frac{3}{-1}\right) 1 = 3$

	$-y_1$	$-y_2$	**1**
$x_1 =$	$\frac{1}{-1} = -1 + \left(-\frac{2}{3}\right)(-2) : \frac{1}{3}$	$\frac{-2}{-1} = 2(-1/3) : -\frac{2}{3}$	3
$x_2 =$	$-\frac{-2}{-1} = -2/3 : -\frac{2}{3}$	*pivot* $-1 + \left(-\frac{-2}{-1}\right)(-2) = 3/3/3 : \frac{1}{3}$	-2
$y_3 =$	$-\frac{-1}{-1} = -1 + (-1)(-2) : 1$	$1 + \left(-\frac{-1}{-1}\right)(-2) = 3\,(-1/3) : -1$	6
$y_4 =$	$-\frac{-1}{-1} = -1 + (-2)(-2) : 3$	$4 + \left(-\frac{-1}{-1}\right)(-2) = 6\,(-1/3) : -2$	24
$y_5 =$	$-\frac{4}{-1} = 4 + (3)(-2) : -2$	$-1 + \left(-\frac{4}{-1}\right)(-2) = -9\,(-1/3) : 3$	9
$f =$	$-\frac{3}{-1} = 3 + (4)(-2) : -5$	$-6 + \left(-\frac{3}{-1}\right)(-2) = -12\,(-1/3) : 4$	-21

	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_1 =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	3
$x_2 =$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	-2
$y_3 =$	1	-1	6
$y_4 =$	3	-2	24
$y_5 =$	-2	3	9
$f =$	-5	4	-21

$$f = (-5)(-y_1) + 4(-y_2) - 21$$
$$x_1 = \frac{1}{3}(-y_1) - \frac{2}{3}(-y_2) + 3$$
$$x_2 = -\frac{2}{3}(-y_1) + \frac{1}{3}(-y_2) - 2$$

Definitia 2.1 $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ *se numeşte soluţie bazică a problemei (1.2.6)-(1.2.7) dacă este soluţie pentru sistemul de inegalităţi (1.2.7) (soluţie admisibilă) şi* n *din componente sunt nule.*

Definitia 2.2 *Dacă* $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ *este soluţie bazică atunci cele* n *variabile nule se numesc variabile nebazice, iar celelalte variabile bazice.*

Definitia 2.3 *Dacă* $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ *este soluţie bazică şi există variabile bazice nule, atunci soluţia bazică se numeşte degenerată, si nedegenerată în caz contrar.*

Importanţa soluţiilor bazice este dată de următoarea teoremă:

Teorema 2.1 *Problema de programare liniară (1.2.6)-(1.2.7) are soluţie optimă dacă* *şi numai dacă are soluţie optimă bazică.*

	$-y_1$	$-y_2$	$\cdots$	$-y_n$	1
$y_{n+1} =$	$c_{n+1,1}$	$c_{n+1,2}$	$\cdots$	$c_{n+1,n}$	d_{n+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m =$	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	d_m
$f =$	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	Q

Lema 2.1 *Dacă în tabelul (1.2.5)* $d_i \geq 0,\ i = \overline{n+1, m}$ *atunci o soluţie bazică este dată de:*

(1.2.8)
$$\begin{aligned} y_i &= 0, i = \overline{1, n} \\ y_i &= d_i, i = \overline{n+1, m}. \end{aligned}$$

Demonstraţie: Din tabelul (1.2.5) rezultă că dacă $y_i = 0, i = \overline{1, n}$ atunci $y_i = d_i, i = \overline{n+1, m}$ şi conform ipotezei $d_i \geq 0, i = \overline{n+1, m}$ rezultă că (vezi definiţia 2.1) $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ este soluţie bazică.

Lema 2.2 *Dacă în tabelul (1.2.5) există* $d_r < 0$ *(*$n + 1 \leq r \leq m$*) şi* $c_{ri} \geq 0, i = \overline{1, n}$ *atunci nu există* $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ *care să verifice inegalităţile (1.2.7).*

Demonstraţie: Presupunem că există $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ care verifică (1.2.7). Atunci

$y_i \geq 0, i = \overline{1,n}$ şi din $y_r = \sum_{j=1}^{n} c_{rj}(-y_j) + d_r$ rezultă $y_r < 0$, contradicţie cu $y_r \geq 0$.

Lema 2.3 *Dacă în tabelul (1.2.5) există $d_r < 0$ ($n+1 \leq r \leq m$) şi există $1 \leq s \leq n$ asfel încât $c_{rs} < 0$ atunci efectuând un pas Gauss Jordan modificat cu pivotul $c_{i_0 s}$ ales după regula:*

(1.2.9)
$$0 < \frac{d_{i_0}}{c_{i_0 s}} = \min_{n+1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{d_i}{c_{is}} > 0 \right\}$$

(adică în tabelul (1.2.5) se schimbă $-y_s$ cu y_{i_0}) avem (notând elementele noului tabel cu accent) pentru $i_0 \neq r$ $d'_r > d_r$ iar pentru $i_0 = r$ y_r este variabilă nebazică, deci $y_r = 0 > d_r$.

Demonstraţie: Conform ipotezei în coloana s există cel puţin un indice i astfel încât $\frac{d_i}{c_{is}} > 0$. Alegem i_0 conform regulii (1.2.9). Dacă $i_0 \neq r$ atunci, conform Gauss-Jordan :

$$d'_r = d_r - \frac{d_{i_0}}{c_{i_0 s}} c_{rs} > d_r.$$

Teorema 2.2 *Pentru orice problemă de programare liniară după un număr finit de paşi se ajunge la o soluţie admisibilă bazică sau se ajunge la concluzia că problema nu are soluţie.*

Demonstraţie: Rezultă din cele trei leme precedente.

Teorema precedentă rezolvă prima fază.

Pentru optimizare plecăm tot de la tabelul (1.2.5) în care presupunem că ultima coloană are doar numere pozitive (adică de la o soluţie bazică).

Lema 2.4 *Dacă în (1.2.5)* $q_i \geq 0, i = \overline{1,n}$ *atunci soluţia optimă este* $y_i = 0, i = \overline{1,n}$.

Demonstraţie: Avem $f = -\sum_{k=1}^{n} q_k y_k + Q \leq Q$ pentru $y_k \geq 0, k = \overline{1,n}$, egalitatea având loc doar pentru $y_k = 0, k = \overline{1,n}$.

Lema 2.5 *Dacă există* $q_s < 0$, $1 \leq s \leq n$ *şi* $c_{rs} \leq 0, n+1 \leq r \leq m$ *atunci* $\sup f(x_1, ..., x_n) = \infty$.

Demonstraţie: Alegem $y_s = t > 0, \ y_k = 0, k \neq s, k = \overline{1,n}$ avem $y_i = -c_{is}t + d_i \geq 0, i = \overline{n+1,m}, \forall t > 0$. Dar $f = -q_s t + Q \to \infty$ când $t \to \infty$.

Lema 2.6 *Dacă există* $q_s < 0$, $1 \leq s \leq n$ *şi există* $c_{is} > 0, n+1 \leq i \leq m$ *atunci alegând un element pivot din coloana* s *după regula (1.2.9) se obţine efectuând un pas G-J modificat un nou tabel simplex (notând elementele noului tabel cu accent) cu* $Q' > Q$.

Demonstraţie: Alegând elementul pivot ca în enunţ avem $Q' = -\frac{d_{i_0}}{c_{i_0 s}} q_s + Q > Q$.

Din cele trei leme rezultă:

Teorema 2.3 *Oricare ar fi problema de progamare liniară cu soluţii admisibile, după* *un număr finit de paşi G-J modificaţi se obţine sau soluţia optimă sau concluzia că maximul este infinit.*

Exemplul 2.2 *Continuare la exemplul 2.1.*

	$-y_1$	$-y_2$	1
$y_3 =$	$\overset{pivot}{1}$	$-1/1$	$6/1$
$y_4 =$	$-3/1$	$-2+(-3/1)(-1)=1$	$24+(-3/1)\,6=6$
$y_5 =$	$-(-2)/1=2$	$3+(-(-2)/1)(-1)=1$	$9+(-(-2)/1)\,6=21$
$f =$	$-(-5)/1=5$	$4+(-(-5)/1)(-1)=-1$	$-21+-(-5)/1*6=9$

$f=(-5)(-y_1)+4(-y_2)-21$

$x_1=\frac{1}{3}(-y_1)-\frac{2}{3}(-y_2)+3$

$x_2=-\frac{2}{3}(-y_1)+\frac{1}{3}(-y_2)-2$

$q_1=-5<0$

$\frac{d_1}{c_{11}}=\frac{6}{1};\ \frac{d_2}{c_{21}}=\frac{24}{3}$ aleg $i_0=1$: pivot:c_{11}

	$-y_3$	$-y_2$	1		$-y_3$	$-y_4$	1
$y_1 =$	1	-1	6	$y_1 =$	$1+1*(-3)=-2$	1	$6+1*6=12$
$y_4 =$	-3	$\overset{pivot}{1}$	6	$y_2 =$	-3	$\overset{pivot}{1}$	6
$y_5 =$	2	1	21	$y_5 =$	$2+(-1)*(-3)=5$	-1	$21-1*6=15$
$f =$	5	-1	9	$f =$	$5+1*(-3)=2$	1	$9+1*6=15$

$f_{\max}=15$

$\min(\max) f(x),\ x=(x_1,x_2,x_3),\ f(x)=x_1+x_3+x_2$ Cu restricţiile:

$$\begin{cases} 12x_1+28x_2+7x_3\geq 84 \\ 8x_1+5x_2+10x_3\geq 40 \\ 20x_1+7x_2=6x_3\geq 42 \\ x_k\geq 0,\ k=\overline{1,3}. \end{cases}$$

1

$$x_1=\tfrac{1}{3}(-y_1)-\tfrac{2}{3}(-y_2)+3=\tfrac{1}{3}(-12)-\tfrac{2}{3}(-6)+3=3$$
$$x_2=-\tfrac{2}{3}(-y_1)+\tfrac{1}{3}(-y_2)-2=-\tfrac{2}{3}(-12)+\tfrac{1}{3}(-6)-2=4$$

Remarca 2.1 *La pas G-J modificat cu pivot c_{rs} se fac următoarele modificări: elementele din capul de tabel de pe coloana s şi linia r se schimbă intre ele, cu schimbare de semn. (adică $-y_s, y_r \leftrightarrow -y_r, y_s$. elementele de pe coloana s se înlocuiesc cu ele/pivot şi cu semn schimbat. Elementele de pe linia pivot se împart cu pivotul, iar în locul pivotului se pune $\frac{1}{c_{rs}}$. Celelalte elemente din noul tabel se obţin din adunarea la vechiul element a (elementului de pe coloana corespunzătoare şi linia pivotului din vechiul tabel)*elementul de pe linia lui şi coloana pivotului din noul tabel.*

Exemplu:

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-12	-28	-7	-84
$y_2 =$	-8	-5	-10	-40
$y_3 =$	-20	-7	-6	-42
$f1 =$	-1	-1	-1	0

$\min\left\{\frac{-40}{-5}, \frac{-84}{-28}, \frac{-42}{-7}\right\} = 3$ deci pivotul este (-28)

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{-12}{-28} = \frac{3}{7}$	$\frac{1}{-28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-84}{-28} = 3$
$y_2 =$	$-8 + (-12)\left(\frac{5}{-28}\right) = -\frac{41}{7}$	$\frac{5}{-28}$	$-\frac{35}{4}$	$-40 + (-84)\left(\frac{5}{-28}\right) = -25$
$y_3 =$	$-20 + (-12)\left(\frac{7}{-28}\right) = -17$	$\frac{7}{-28}$	$-\frac{17}{4}$	$-42 + (-84)\left(\frac{7}{-28}\right) = -21$
$f1 =$	$-1 + (-12)\left(\frac{1}{-28}\right) = -\frac{4}{7}$	$\frac{1}{-28}$	$-\frac{3}{4}$	$0 + (-84)\left(\frac{1}{-28}\right) = 3$

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{-28}$	$\frac{1}{4}$	3
$y_2 =$	$-\frac{41}{7}$	$\frac{5}{-28}$	$-\frac{35}{4}$	-25
$y_3 =$	-17	$\overset{pivot}{\frac{7}{-28}}$	$-\frac{17}{4}$	-21
$f1 =$	$-\frac{4}{7}$	$\frac{1}{-28}$	$-\frac{3}{4}$	3

$\min\left\{\frac{-25}{-\frac{5}{28}}, \frac{-21}{-\frac{7}{28}}\right\} = 84$ deci pivotul e $-\frac{7}{28}$

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{3}{7} + (-17)\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{20}{7}$	$-\frac{\frac{1}{-28}}{\frac{7}{-28}} = -\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	$3 + (-21)\left(-\frac{1}{7}\right) = 6$
$y_2 =$	$-\frac{41}{7} + (-17)\left(-\frac{5}{7}\right) = \frac{44}{7}$	$\frac{-\frac{5}{-28}}{\frac{7}{-28}} = -\frac{5}{7}$	$-\frac{40}{7}$	$-25 + (-21)\left(-\frac{5}{7}\right) = -10$
$y_1 =$	$(-17)/(-7/28) = 68$	$-\frac{28}{7} = -4$	17	$(-21)/(-7/28) = 84$
$f1 =$	$-\frac{4}{7} + (-17)\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{13}{7}$	$-\frac{\frac{1}{-28}}{\frac{7}{-28}} = -\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$3 + (-12)\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{33}{7}$

	$-x_1$	$-y_3$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{20}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{6}{7}$	6
$y_2 =$	$\frac{44}{7}$	*pivot* $-\frac{5}{7}$	$-\frac{40}{7}$	-10
$y_1 =$	68	-4	17	84
$f1$	$\frac{13}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{33}{7}$

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{20}{7} + \frac{44}{7}(-1/5) = \frac{8}{5}$	$-\frac{1}{7}/(5/7) = -\frac{1}{5}$	2	$6 + (-10)(-1/5) = 8$
$y_3 =$	$\frac{44}{7}/\left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{44}{5}$	*pivot* $1/\left(-\frac{5}{7}\right) : -\frac{7}{5}$	8	$-10/\left(-\frac{5}{7}\right) = 14$
$y_1 =$	$68 + \left(\frac{44}{7}\right)\left(-\frac{28}{5}\right) = \frac{164}{5}$	$-4/(5/7) = -\frac{28}{5}$	49	$84 + (-10)\left(-\frac{28}{5}\right) = 140$
$f1$	$\frac{13}{7} + \left(\frac{44}{7}\right)\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5}$	$-\frac{1}{7}/(5/7) = -\frac{1}{5}$	1	$\frac{33}{7} + (-10)\left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{47}{7}$

$\min(\max) f(x),\ x=(x_1,x_2,x_3),\ f(x)=x_1+2x_2+3x_3$ Cu restricţiile:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3\geq 8 \\ 2x_1+x_2+5x_3\geq 12 \\ x_k\geq 0,\ k=\overline{1,3}. \end{cases}$$

2

	$-x_1$	$-y_2$	$-x_3$	1
$x_2 =$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	2	8
$y_3 =$	$-\frac{44}{5}$	$-\frac{7}{5}$	8	14
$y_1 =$	$\frac{164}{5}$	$-\frac{28}{5}$	49	140
$f1$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	1	$\frac{47}{7}$

soluţie bazică:$x_1 = 0, x_2 = 28, x_3 = 0, y_1 = 10, y_2 = 10, y_3 = 0.$

pivotul: $\min\{28/68, 10/(20/7), 10/(44/7)\} = \frac{7}{17}$ deci e 68

	$-x_2$	$-y_3$	$-x_3$	1
$x_1 =$	$1/68 = \frac{1}{68}$	-4	17	28
$y_2 =$	$\frac{-20}{7}/68 = -\frac{5}{119}$	$\frac{3}{119}$	$\frac{1}{7}$	$10 + 28\left(-\frac{5}{119}\right) = \frac{150}{17}$
$y_1 =$	$\frac{-44}{7}/68 = -\frac{11}{119}$	$-\frac{41}{119}$	$-\frac{51}{7}$	$10 + 28\left(-\frac{11}{119}\right) = \frac{126}{17}$
$f1 =$	$-\frac{-13}{7}/68 = \frac{13}{476}$	$\frac{4}{119}$	$\frac{17}{28}$	$-4 + 28\left(\frac{13}{476}\right) = -\frac{55}{17}$

Exemplul 2.3

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	1
$y_1 =$	-2	$\overset{pivot}{-1}$	-2	-8
$y_2 =$	-2	-1	-5	-12
$f1 =$	-1	-2	-3	0

	$-x_1$	$-y_1$	$-x_3$	1
$x_2 =$	2	-1	2	8
$y_2 =$	0	-1	$\overset{pivot}{-3}$	-4
$f1 =$	3	-2	1	16

	$-x_1$	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_2 =$	2	$-1+(-1)(2/3)=-\frac{5}{3}$	$-2/(-3)=\frac{2}{3}$	$8+(-4)*(2/3)=\frac{16}{3}$
$x_3 =$	0	$-1/(-3)=\frac{1}{3}$	$\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$	$-4/(-3)=\frac{4}{3}$
$f1 =$	3	$-2+(-1)(1/3)=-\frac{7}{3}$	$-1/(-3)=\frac{1}{3}$	$16+(-4)*(1/3)=\frac{44}{3}$

	$-x_1$	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_2 =$	2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$
$x_3 =$	0	$\overset{pivot}{\frac{1}{3}}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
$f1 =$	3	$-\frac{7}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{44}{3}$

	$-x_1$	$-y_1$	$-y_2$	1
$x_2 =$	2	$\left(-\frac{5}{3}\right)/\left(-\frac{1}{3}\right)=5$	$\frac{2}{3}+5*\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$	$\frac{16}{3}+5*4/3=12$
$x_3 =$	0	$\overset{pivot}{1/\frac{1}{3}:3}$	$-\frac{1}{3}/(1/3)=-1$	$\frac{4}{3}/(1/3)=4$
$f1 =$	3	$\left(-\frac{7}{3}\right)/\left(-\frac{1}{3}\right)=7$	$\frac{1}{3}+7\left(-\frac{1}{3}\right)=-2$	$\frac{44}{3}+7*4/3=24$

1.3 Problema de transport

Se dau m centre de producţie şi n centre de desfacere. Se notează cu c_{ij} costul transportului unei unitaţi de produs de la c.p. i la c. d. j , cu x_{ij} cantitatea de produs transportată de la c.p. i la c. d. j , cu a_i cantitatea produsă la c.p. i, cu b_j cantitatea necesară la c.d. j. Se cere să se determine x_{ij} astfel încât costul total al transportului să fie minim.

(1.3.1) $$\min \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{\substack{j=n \\ i=m}} c_{ij} x_{ij} = f(X)$$

cu condiţiile:

(1.3.2) $$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n} x_{ij} \right) \\ x_{ij} \geq 0 \end{gathered}$$

Exemplul 3.1

Exemplul 3.2

Exemplul 3.3

1.

2	3	4	1	100
4	1	2	5	180
1	4	3	4	220
125	135	105	135	500

3

2.

2	1	2	3	100
1	3	2	1	150
2	3	1	2	150
110	80	95	115	400

4

4.

3	5	7	11	100
1	4	6	3	130
5	8	12	7	170
150	120	80	50	400

Remarca 3.1 *Conditiile (1.3.2) sunt un sistem de $n+m-1$ ecuaţii cu nm necunoscute, care are o infinitate de soluţii.*

Primul pas va consta în determinarea unei soluţii de pornire.

Definitia 3.1 *O soluţie a (1.3.2) se numeşte soluţie bazică dacă are cel mult $n+m-1$ variabile nenule; nedegenerată dacă are exact $n+m-1$ variabile nenule, degenerată în caz contrar.*

1.3.1 Metoda colţului de N-V.

(de aflare a unei soluţii bazice)

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}; \overline{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} & a_1 \\ \dots & \ddots & \dots & \dots \\ x_{m1} & \dots & x_{mn} & a_m \\ b_1 & \dots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

$x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. La ex. 1 $x_{11} = 100$.

Dacă $x_{11} = a_1$ atunci $x_{1j} = 0, j = \overline{2,n}$. $b_1 := b_1 - a_1$. "Tai" linia 1 din $\overline{X}$.
Dacă $x_{11} = b_1$ atunci $x_{i1} = 0, i = \overline{2,m}.a_1 := a_1 - b_1$. Tai coloana 1 din $\overline{X}$.
Continuăm până eliminăm toate liniile şi coloanele lui $\overline{X}$.
Pe ex. 1: $x_{11} = 100$, $x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0$. $b_1 := 125 - 100 = 25$.

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & 180 \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & 220 \\ 25 & 135 & 105 & 135 & 500 \end{pmatrix}$$

$x_{21} = 25, x_{31} = 0, 180 := 180 - 25$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} & x_{24} & 155 \\ x_{32} & x_{33} & x_{34} & 220 \\ 135 & 105 & 135 & 500 \end{pmatrix}$$

$x_{22} = 135, x_{32} = 0; 155 := 155 - 135$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{23} & x_{24} & 20 \\ x_{33} & x_{34} & 220 \\ 105 & 135 & 500 \end{pmatrix}$$

$x_{23} = 20; x_{24} = 0; 105 := 105 - 20.$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_{33} & x_{34} & 220 \\ 85 & 135 & 500 \end{pmatrix} x_{33} = 85; x_{34} = 135$$

2	100	0	3	0	0	4	0	0	1	0	0	0	100	0
4	25	0	1	135	0	2	20	0	5	0	0	0	180	0
1	0	0	4	0	0	3	85	0	4	135	0	0	220	0
0	125	0	0	135	0	0	105	0	0	135	0	0	1270	0

1.4 Optimizarea soluţiei bazice

1.4.1 Metoda potenţialelor

Definitia 4.1 *Având o soluţie bazică* X *se numeşte lanţ de celule un şir de celule cu proprietăţile că nu există 3 celule pe aceeaşi linie sau coloană şi 2 celule succesive sunt în aceeaşi linie sau coloană.*

Exemplul 4.1 x_{12}, x_{13}, x_{23}.

Definitia 4.2 *Se numeşte ciclu un lanţ la care indicele de linie sau de coloană de la primul el. şi ultimul coincid.*

Exemplul 4.2 $x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{22}$

Definitia 4.3 *O soluţie bazică se numeşte aciclică dacă nu există un ciclu cu el. nenule.*

Ideea : Soluţia optimă se caută printre sol. bazice aciclice.

Definitia 4.4 *Soluţia bazică X se numeşte sol. potenţială dacă există numerele u_i, v_j astfel încât:*

$$u_i + v_j \leq c_{ij}$$

egalitatea având loc pentru indicii i, j pentru care $x_{ij} > 0$. $\left(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}\right)$

Teorema 4.1 *Soluţia bazică X este sol. optimă dacă şi numai dacă este potenţială.*

Demonstraţie: dem. că dacă X este potenţială atunci X este sol. optimă. Fie X' o soluţie a sistemului
$$\begin{array}{c} \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = a_i, i = \overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = b_j, j = \overline{1,n} \\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\sum_{i,j=1}^{i=m,j=n} x_{ij}\right) \\ x'_{ij} \geq 0 \end{array}$$
$\sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} c_{ij}x'_{ij} \geq \sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} c_{ij}x_{ij}$

$$\sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} c_{ij}x'_{ij} \geq \sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} (u_i + v_j) x'_{ij} = \sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} u_i x'_{ij} + \sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} v_j x'_{ij}$$
$$= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m} u_i a_i + \sum_{j=1}^{n} v_j b_j =$$
$$= \sum_{i=1}^{m} u_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1,j=1}^{i=m,j=n} (u_i + v_j) x_{ij} = f(X)$$

Fie X o sol. bazică. determinăm u_işi v_j din:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

pentru ij pentru care $x_{ij} > 0.(n + m - 1$ ec., $n + m$ nec..$u_1 = 0.)$ calculăm

$$\delta_{ij} = -c_{ij} + u_i + v_j$$

dacă $\delta_{ij} < 0$. Dacă există ij astfel incât $\delta_{ij} > 0$ atunci X nu e optimă. aleg $i_0 j_0$:

$$\max \delta_{ij} = \delta_{i_0 j_0}$$

Se formează un ciclu pornind de la $i_0 j_0$ şi elem. nenule din X. se numerotează el ciclului pornind de la $x_{i_0 j_0}$ în sens trig. Se alege cel mai mic element cu număr par $x_{i'j'} = e$. Se construieşte o nouă soluţie bazică scăzând din ele. cu număr par pe e şi adunând pe e la cele cu nr. impar. Rezultă sol. bazică X.

Exemplul 4.3

1.

2	3	4	1	100
4	1	2	5	180
1	4	3	4	220
125	135	105	135	500

O sol. bazică $x_{11} = 100, x_{21} = 25, x_{22} = 135, x_{23} = 20; x_{33} = 85; x_{34} = 135$

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 2, u_1 = 0 \\ u_2 + v_1 &= 4 \\ u_2 + v_2 &= 1 \\ u_2 + v_3 &= 2 \\ u_3 + v_3 &= 3 \\ u_3 + v_4 &= 4 \end{aligned}$$

$v_1 = 2, u_2 = 2, v_2 = -1, v_3 = 0, u_3 = 3, v_4 = 1.$

$\delta_{12} = -3 + 0 - 1 = -4; \delta_{13} = -4 + 0 + 0 = -4; \delta_{14} = -1 + 0 + 1 = 0; \delta_{24} = -5 + 2 + 1 = -2; \delta_{31} = -1 + 3 + 2 = 4?;$

$\delta_{32} = -4 + 3 - 1 = -2.$

$_{i_0 j_0} = 31$

X= $\begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 25^4 & 135 & 20^3 & 0 \\ 0*^1 & 0 & 85^2 & 135 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 135 & 45 & 0 \\ 25 & 0 & 60 & 135 \end{pmatrix}$$

2	100	0	3	0	-4	4	0	-4	1	0	0	0	100	0
4	25	0	1	135	0	2	20	0	5	0	-2	0	180	2
1	0	4	4	0	-2	3	85	0	4	135	0	0	220	3
0	125	2	0	135	-1	0	105	0	0	135	1	0	1270	0

2	100	0	3	0	0	4	0	0	1	0	0	0	100	0
4	25	0	1	135	0	2	20	0	5	0	0	0	180	0
1	0	0	4	0	0	3	85	0	4	135	0	0	220	0
0	125	0	0	135	0	0	105	0	0	135	0	0	1270	0

2	100	0	3	0	0	4	0	0	1	0	0	0	100	0
4	0	0	1	135	0	2	45	0	5	0	0	0	180	0
1	25	0	4	0	0	3	60	0	4	135	0	0	220	0
0	125	0	0	135	0	0	105	0	0	135	0	0	1170	0

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 0, u_1 + v_1 = 2 \\
u_2 + v_2 &= 1; u_2 + v_3 = 2 \\
u_3 + v_1 &= 1; u_3 + v_3 = 3; u_3 + v_4 = 4
\end{aligned}
$$

2	100	0	3	0	0	4	0	0	1	0	4	0	100	0
4	0	-4	1	135	0	2	45	0	5	0	-2	0	180	-2
1	25	0	4	0	-2	3	60	0	4	135	0	0	220	-1
0	125	2	0	135	3	0	105	4	0	135	5	0	1170	0

2	100	0	3	0	0	4	0	0	1	0	0	0	100	0
4	0	0	1	135	0	2	45	0	5	0	0	0	180	0
1	25	0	4	0	0	3	60	0	4	135	0	0	220	0
0	125	0	0	135	0	0	105	0	0	135	0	0	1170	0

2	0	0	3	0	0	4	0	0	1	100	0	0	100	0
4	0	0	1	135	0	2	45	0	5	0	0	0	180	0
1	125	0	4	0	0	3	60	0	4	35	0	0	220	0
0	125	0	0	135	0	0	105	0	0	135	0	0	770	0

2	0	-4	3	0	-4	4	0	-4	1	100	0	0	100	0
4	0	-4	1	135	0	2	45	0	5	0	-2	0	180	2
1	125	0	4	0	-2	3	60	0	4	35	0	0	220	3
0	125	-2	0	135	-1	0	105	0	0	135	1	0	770	0

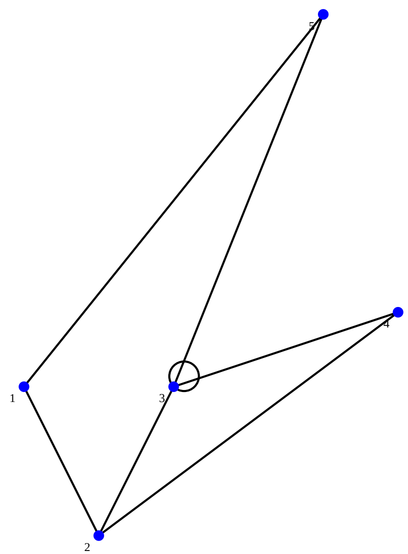
2Grafe

2.1 Grafe neorientate

Definitia 1.1 *Se numeşte* **graf neorientat** *un cuplu* $G = (V, E)$ *unde* V *este o mulţime finită de vârfuri, iar* E *o mulţime de perechi neordonate de el. din* V *numite muchii.*

Remarca 1.1 *Vom nota vârfurile cu* v_i *sau cu* i, *iar muchiile cu* e_j *sau cu* (v_i, v_j) *sau* (i, j) .

Exemplul 1.1



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (2, 4), (3, 5), (5, 1), (3, 3)\}$

Definitia 1.2 *Dacă $G = (V, E)$ este un graf atunci nr. el. lui V se numeşte ordinul grafului, iar nr. el. lui E dimensiunea grafului G.*

Definitia 1.3 *O muchie (i, i) se numeşte buclă.*

Definitia 1.4 *Un graf se numeşte simplu dacă n-are bucle.*

Definitia 1.5 *Se numeşte lanţ într-un graf o succcesiune de muchii adiacente.*

Definitia 1.6 *2 muchii sunt adiacente dacă au un vârf comun.*

Definitia 1.7 *O muchie este incidentă cu un vârf dacă vârful face parte din perechea care def. muchia.*

Definitia 1.8 *2 vârfuri sunt adiacente dacă există o muchie formată din perechea celor 2 v.*

Definitia 1.9 *Se numeşte gradul unui vârf numărul muchiilor incidente cu vârful respectiv.*

Exemplul 1.2 *grad*$(3) = 5$.

Teorema 1.1 *Dacă dimensiunea grafului este* m *atunci suma gradelor vârfurilor este* $2m$.

Demonstraţie: Fiecare muchie contribuie cu 2 la gradele vârfurilor.

Definitia 1.10 *Se numeşte ciclu într-un graf un lanţ la care ultimul vârf coincide cu primul.(!!).*

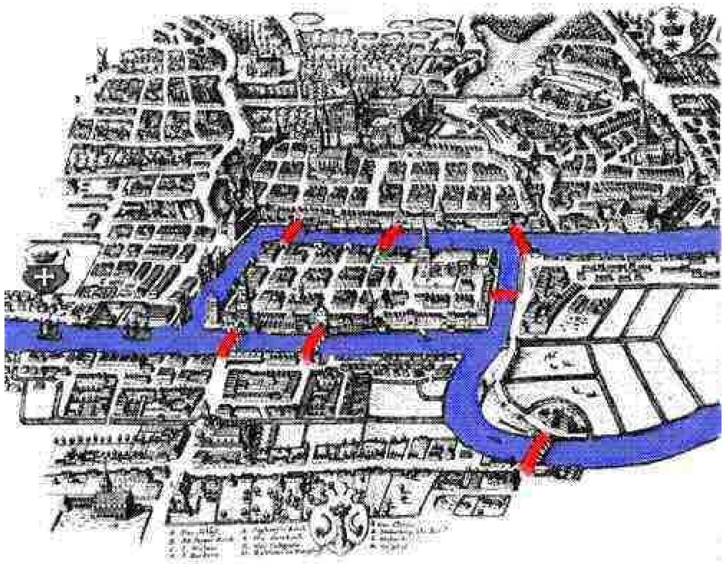
Definitia 1.11 *Se numeşte lanţ (ciclu) simplu un lanţ* $(ciclu)$ *care nu conţine de două ori aceeaşi muchie.*

Definitia 1.12 *Se numeşte lanţ (ciclu) eulerian un lanţ (ciclu) simplu care conţine toate muchiile.*

Definitia 1.13 *Se numeşte lanţ (ciclu) hamiltonian un lanţ (ciclu) care conţine toate vârfurile o singură dată.*

Exemplul 1.3 *Este posibil ca un grup de 11 persoane fiecare să strângă mâna la exact 5 persoane?NU: suma gradelor este 55.*

Exemplul 1.4 *Problema podurilor din Königsberg: să se găsească un traseu care să permită trecerea o singură dată pe fiecare pod şi să se ajungă la punctul de plecare.*



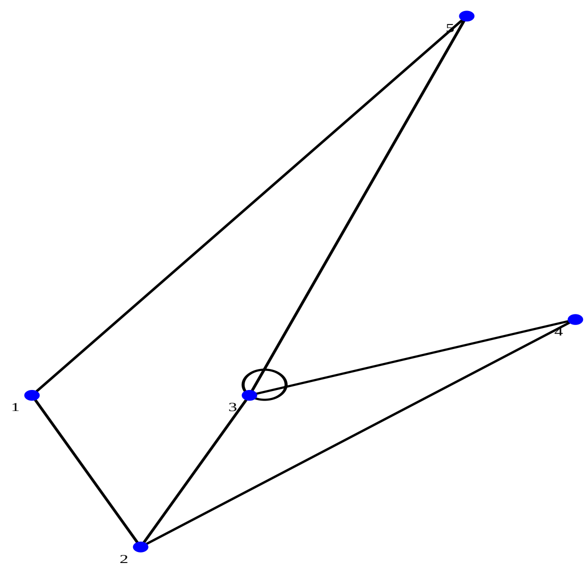
Atasam un "graf" Vârfuri: $1, (sud), 2(est), 3(nord), 4(insula)$; Muchii $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 4)$, $(2,$
$(2, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 4)$.Gradele vârfurilor: $3, 3, 3, 5$.

Teorema 1.2 *Intr-un graf există un circuit eulerian dacă şi numai dacă toate gradele vârfurilor sunt pare.*

Teorema 1.3 *Intr-un graf există un lanţ eulerian dacă şi numai dacă toate gradele vârfurilor sunt pare cu excepţia a exact două.*

Exemplul 1.5 *Există un graf simplu cu 13 vârfuri, 31 muchii, 4 vârfuri de grad 1 şi 7 vârfuri de grad 4? Total grade vârfuri:*$2*31 = 62. Total$ *grade 2 vârfuri:* $62-4-28 = 30$. *Grad minim la un vârf e* $15 > 12$. *NU.*

Exemplul 1.6 *Să se construiască un graf cu* 5 *vârfuri, cu gradele vârfurilor:* $2, 3, 5, 2, 2$.



2.2 Algoritmi

2.2.1 Definiţii şi notaţii

Definitia 2.1 $G = (V, E)$ *graf, se numeşte subgraf al lui* G *graful* $G_1 = (V_1, E_1)$ *cu* $V_1 \subset V, E_1 \subset E.$

Definitia 2.2 *Graful* $G = (V, E)$ *se numeşte conex dacă între oricare două vârfuri există un lanţ.*

Definitia 2.3 *Un subgraf al unui graf se numeşte arbore dacă este simplu, conex şi fără cicluri.*

Definitia 2.4 *Se numeşte arbore de acoperire a unui graf conex un arbore care conţine toate vârfurile.*

Definitia 2.5 *Se numeşte frunză într-un arbore un vârf de grad* $1.$

Definitia 2.6 *Dacă* G_1 *este subgraf al grafului* G *se numeşte muchie frontieră o muchie din* G *care are un vârf în* G_1 *si unul în* $G \setminus G_1.$

2.2.2 Algoritmi de generare arbore de acoperire

2.2.1 Căutare în adâncime

Ideea: se etichetează vârfurile cu eticheta notată $df\_număr$ şi se pleacă de la ultimul vârf etichetat.

notaţii: cu T se notează arborele, cu F_T mulţimea muchiilor frontieră ale lui T.

Date de `intrare în algoritm:` un graf G conex şi un vârf r.

`Date de ieşire din algoritm:` un arbore de acoperire T şi o etichetare dată de $df\_număr$.

`Iniţializări:` $T = (\{r\}, \varnothing)$, $df\_număr(r) := [0]$, $i := 1$ (i este un contor de numărare).

`Pasul de bază al algoritmului:` cât timp T nu arbore de acoperire:

1. Se actualizează F_T;
2. Se alege muchia frontieră $l = \{x, y\}$ care are un vârf x cu $df\_număr(x)$ maxim;
3. Se adaugă la T vârful y şi muchia l ;
4. $df\_număr(y) := [i]; i := i + 1.$

2.2.2 Căutare în lăţime

Idee: se etichetează vârfurile cu eticheta notată et şi se pleacă de la vârful cu eticheta cea ami mică posibilă.

notaţii: cu T se notează arborele, cu F_T mulţimea muchiilor frontieră ale lui T.

Date de `intrare în algoritm:` un graf G conex şi un vârf r.

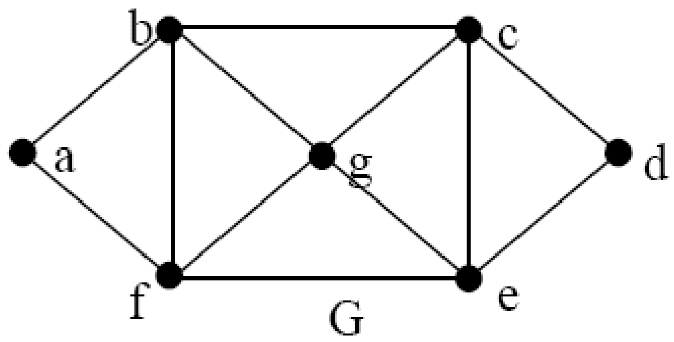
`Date de ieşire din algoritm:` un arbore de acoperire T şi o etichetare dată de et.

`Iniţializări:` $T = (\{r\}, \varnothing)$, $et(r) := [0]$, $i := 1$ (i este un contor de numărare).

`Pasul de bază al algoritmului:` cât timp T nu arbore de acoperire:

1. Se actualizează F_T;
2. Se alege muchia frontieră $l = \{x, y\}$ care are un vârf x cu $et(x)$ minim;
3. Se adaugă la T vârful y şi muchia l ;
4. $et(y) := [i]; i := i + 1$

Exemplu: Să se determine un arbore de acoperire untilizând cei doi algoritmi, pentru următorul graf:



Rezolvare: $T = \{\{a\}, \varnothing\}$; $df\_număr(a) := [0]$, $i := 1$

$F_T = \{[ab], [af]\}$;**aleg** $l = [ab]$, $T = \{\{a, b\}, \{[ab]\}\}$; $df\_număr(b) := 1; i = 2;$

$F_T = \{[af], [bf], [bg], [bc]\}$ **aleg** $l = [bc]$, $T = \{\{a, b, c\}, \{[ab], [bc]\}\}$; $df\_număr(c) := 2; i = 3;$

$F_T = \{[af], [bf], [bg], [cd], [ce], [cg]\}$; **aleg** $l = [cd]$

$T = \{\{a, b, c, d\}, \{[ab], [bc], [cd]\}\}$; $df\_număr(d) := 3; i = 4$

$F_T = \{[af], [bf], [bg], [ce], [cg], [de]\}$; **aleg** $l = [de]$

$T = \{\{a, b, c, d, e\}, \{[ab], [bc], [cd], [de]\}\}$; $df\_număr(e) := 4; i = 5$

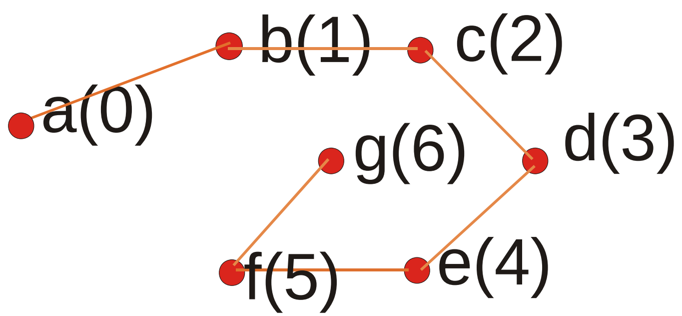
$F_T = \{[af], [bf], [bg], [cg], [eg], [ef]\}$; **aleg** $l = [ef]$

$T = \{\{a, b, c, d, e, f\}, \{[ab], [bc], [cd], [de], [ef]\}\}$; $df\_număr(f) := 5; i = 6$

$F_T = \{[bg], [cg], [eg], [fg]\}$; **aleg** $l = [fg]$

$T = \{\{a, b, c, d, e, f, g\}, \{[ab], [bc], [cd], [de], [ef], [fg]\}\}$; $df\_număr(g) := 6; i = 7$ gata.

Am obţinut:



Căutare în lăţime:

$T = \{\{a\}, \varnothing\}; et(a) := [0], i := 1$

$F_T = \{[ab], [af]\}$;aleg $l = [ab]$, $T = \{\{a, b\}, \{[ab]\}\}$;

$et(b) := 1; i = 2;$

$F_T = \{[af], [bf], [bg], [bc]\}$; aleg $l = [af]; T = \{\{a, b, f\}, \{[ab], [af]\}\}$;

$et(f) := 2; i = 3;$

$F_T = \{[bc], [bg], [fg], [fe]\}$; aleg: $l = [bc]; T = \{\{a, b, f, c\}, \{[ab], [af], [bc]\}\}$;

$et(c) := 3; i = 4;$

$F_T = \{[bg], [fg], [fe], [cd], [ce], [cg]\}$; aleg $l = [bg]$

$T = \{\{a, b, f, c, g\}, \{[ab], [af], [bc], [bg]\}\}$;

$et(g) := 4; i = 5;$

$F_T = \{[fe], [ce], [cd], [ge]\}$; aleg $l = [fe]$

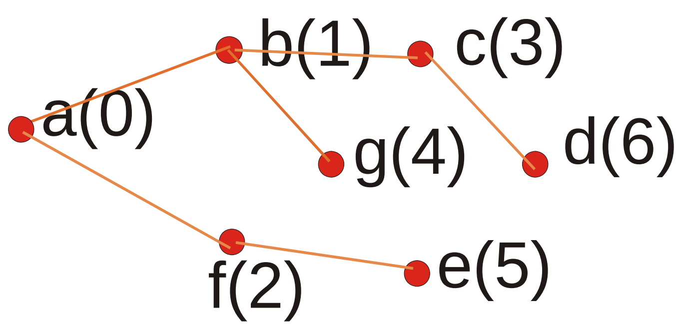
$T = \{\{a, b, f, c, g, e\}, \{[ab], [af], [bc], [bg], [fe]\}\}$;

$et(e) := 5; i = 6;$

$F_T = \{[ed], [cd]\}$; aleg: $l = [cd]$

$T = \{\{a, b, f, c, g, e, d\}, \{[ab], [af], [bc], [bg], [fe], [cd]\}\}$;

$et(d) := 6; i = 7;$ gata:



2.2.3 Algoritmi de generare arbore de lungime minimă în grafe ponderate

Definitia 2.7 *Se numeşte graf ponderat un graf* $G = (V, E)$ *, pentru care s-a definit o funcţie (pondere)* $\rho : E \to \mathbb{R}_+$*, care ataşează fiecarei muchii* $e \in E$ *ponderea* $\rho(e)$ *.*

2.3.1 Algoritmul lui Prim

`Date de intrare în algoritm:` un graf G conex cu ponderi şi un vârf r.

`Date de ieşire din algoritm:` un arbore de acoperire T de cea mai mică pondere şi o etichetare a vârfurilor dată de et.

`Iniţializări:` $T = (\{r\}, \varnothing)$, $et(r) := [0]$, $i := 1$ (i este un contor de numărare).

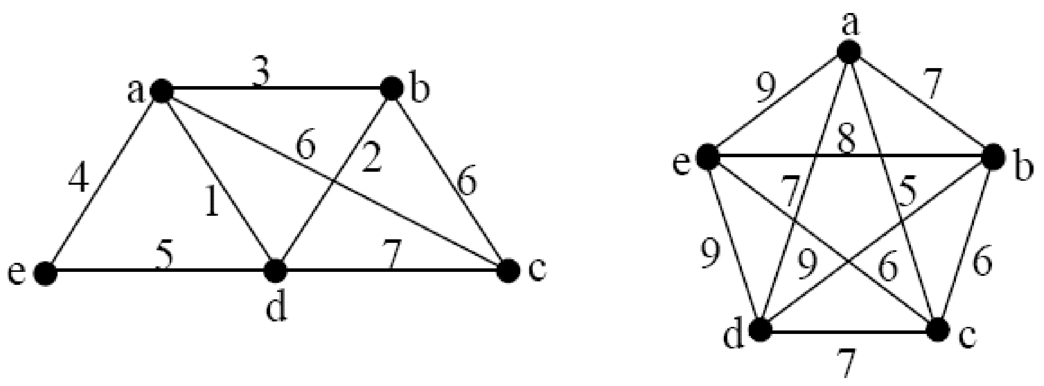
`Pasul de bază al algoritmului:` cât timp T nu arbore de acoperire:

1. Se actualizează F_T;
2. Se alege muchia frontieră $l = \{x, y\}$ cu ponderea cea mai mică ($x \in T$);

3. Se adaugă la T vârful y şi muchia l ;
4. $et(y) := [i]; i := i + 1.$

Teorema 2.1 *Arborele aflat cu algoritmul lui Prim este arbore de acoperire de pondere (lungime) minimă.*

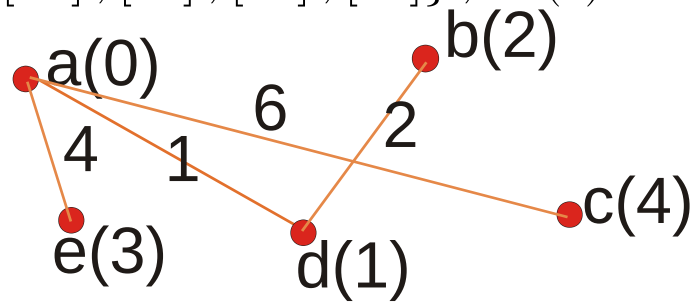
Exemple: Să se afle prin algoritmul de mai sus arbori de pondere minimă în grafele de mai jos:



G H

Rezolvare: $T = \{\{a\}, \varnothing\}$; $et\,(a) = 0; i = 1;$
$F_T = \{[ab]\,, [ae]\,, [ad]\,, [ac]\}$ aleg: $l = [ad]$
$T = \{\{a, d\}, [ad]\}\,, et\,(d) = 1\,(i)\,, i = 2;$
$F_T = \{[ab]\,, [ae]\,, [ac]\,, [dc]\,, [de]\,, [db]\}$; aleg: $l = [db]$;
$T = \{\{a, d, b\}, \{[ad]\,, [db]\}\,, et\,(b) = 2\,(i)\,, i = 3;$

$F_T = \{[ae], [ac], [dc], [de], [bc]\}$; aleg: $l = [ae]$;
$T = \{\{a, d, b, e\}, \{[ad], [db], [ae]\}\}, et(e) = 3(i), i = 4;$
$F_T = \{[ac], [dc], [bc]\}$; aleg $l = [ac]$
$T = \{\{a, d, b, e, c\}, \{[ad], [db], [ae], [ac]\}\}, et(c) = 4(i), i = 5$ gata:



2.3.2 Algoritmul lui Dijsktra

notaţii: $L(i, j)$ cel mai scurt lanţ între nodurile i şi j; distanţa între nodurile i şi j : $d(i, j) =$ suma ponderilor muchiilor din $L(i, j)$.

`Date de intrare în algoritm:` un graf G conex cu ponderi p şi un vârf r.

`Date de ieşire din algoritm:` un arbore de acoperire T şi distanţele $d(r, x)$.

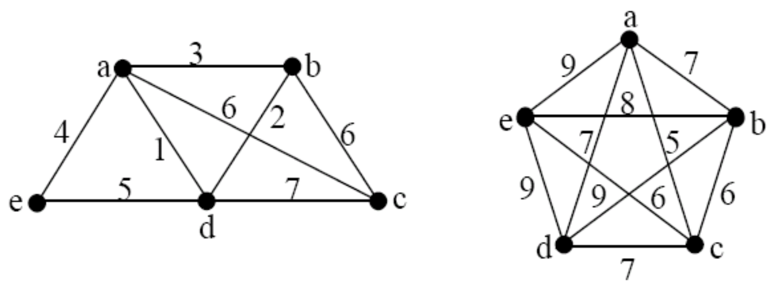
`Iniţializări:` $T = (\{r\}, \varnothing), et(r) = 0$ $d(r) := 0$, $i := 1$ (i este un contor de numărare).

`Pasul de bază al algoritmului:` cât timp T nu arbore de acoperire:

1. Se actualizează F_T;

2. Se alege muchia frontieră $l = \{x, y\}$ cu proprietatea ($x \in T$) că $d(r, x) + p(l)$ e minimă
3. Se adaugă la T vârful y şi muchia l ;
4. $et(y) := [i]; i := i + 1. d(r, i) = d(r, x) + p(l)$

Exemple: Să se afle cu algoritmul lui Dijsktra arborele T in grafele de mai jos, pornind de la nodurile a, respectiv b:



G H

Rezolvare $T = \{\{a\}, \varnothing\}$, $d(a, a) = 0, et(a) = 0, i = 1$

$F_T = \{[ab], [ae], [ad], [ac]\}$ aleg: $l = [ad]$

$T = \{\{a, d\}, [ad]\}$, $et(d) = 1(i), i = 2; d(a, 1) = 1 = 0 + lung(ad)$

$F_T = \{[ab], [ae], [ac], [dc], [de], [db]\}$;

$d(a, a) + lung(ab) = 3$

$d(a, a) + lung(ae) = 4$

$d(a, a) + lung(ac) = 6$

$d(a, 1) + lung(dc) = 8$

$d(a, 1) + lung(de) = 6$

$d(a,1) + lung\,(db) = 7$

aleg: $l = [ab]\,;$

$T = \{\{a,d,b\},\{[ad]\,,[ab]\}\,,et\,(b) = 2\,(i)\,,i = 3; d\,(a,2\,(b)) = 3$

$F_T = \{[ac]\,,[ae]\,,[bc]\,,[de]\,,[dc]\}$

$d(a,a) + lung\,(ac) = 6$

$d(a,a) + lung\,(ae) = 4$

$d(a,2\,(b)) + lung\,(bc) = 9$

$d(a,1\,(d)) + lung\,(de) = 6$

$d(a,1\,(d)) + lung\,(dc) = 8$

aleg $l = [ae]$

$T = \{\{a,d,b,e\}\,,\{[ad]\,,[ab]\,,[ae]\}\}\,,et\,(e) = 3, i = 4;$

$d\,(a,3\,(e)) = 4;$

$F_T = \{[ac]\,,[bc]\,,[dc]\}$

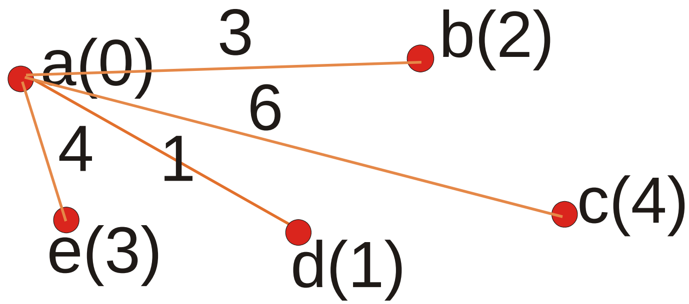
$d(a,a) + lung\,(ac) = 6$

$d(a,2\,(b)) + lung\,(bc) = 9$

$d(a,1\,(d)) + lung\,(dc) = 8$

aleg $l = [ac]$

$T = \{\{a,d,b,e,c\}\,,\{[ad]\,,[ab]\,,[ae]\,,[ac]\}\}\,,et\,(c) = 4; d\,(a,4\,(e)) = 6$ gata:


a(0)
3
b(2)
6
4
1
c(4)
e(3)
d(1)