Note Title 9/1/2023

Analiză matematică Inginerie electrică restanțe toamnă 2023

Subiecte rând I

1. a) Funcția exponențială e^z, $z \in \mathbb{C}$.

   b) Să se determine partea reală a numărului $z = e^{\frac{1}{2} + \frac{4\pi i}{3}}$.

2. a) Seria geometrică

   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = 2$.

3. a) Gradientul unui câmp scalar (definiție + 3 proprietăți)

   b) Să se calculeze $\text{grad}\, f = ?$ $\quad f(x,y,z) = 2x^3 z \cdot e^{x-2y}$.

4. a) Funcția Beta (definiție + 3 proprietăți)

   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

1. a) Funcția exponențială e^z, $z \in \mathbb{C}$.

b) Să se determine partea reală a numărului $z = e^{\frac{1}{2} + \frac{4\pi i}{3}}$.

a) $e^{a+bi} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$

b) $z = e^{\frac{1}{2} + \frac{4\pi i}{3}} = e^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$

$\cos \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \pi \cos \frac{\pi}{3} - \sin \pi \sin \frac{\pi}{3} = -1 \cdot \frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2}$

$\sin \frac{4\pi}{3} = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \pi \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \pi = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \quad z = \sqrt{e} \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{e}}{2} - i \frac{\sqrt{3e}}{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Re} z = -\frac{\sqrt{e}}{2}.$

2. a) Seria geometrică

b) Seria Taylor pentru $f(x) = \frac{1}{x+2}$, $x_0 = 2$.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$.

b) Vrem să aflăm a_n astfel încât $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n$.

Notăm $x - x_0 = u$ $\quad x - 2 = u \Rightarrow x = u + 2$.

$$\Rightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(u+2)+2} = \frac{1}{u+4} = \frac{1}{4\cdot\left(1+\frac{u}{4}\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{u}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{u}{4}\right)^n = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\cdot u^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}\cdot(x-2)^n.$$

Dezvoltarea este adevărată pentru $\left|-\frac{u}{4}\right| < 1 \Leftrightarrow |u| < 4 \Leftrightarrow |x-2| < 4$

3. a) Gradientul unui câmp scalar (definiție + 3 proprietăți)
b) Să se calculeze $\operatorname{grad} f = ?$ $f(x,y,z) = 2x^3 z \cdot e^{x-2y}$.

a) $$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\operatorname{grad}(c \cdot f) = c \cdot \operatorname{grad} f \quad , \quad c \text{ constantă}$$

$$\operatorname{grad}(f+g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$$

$$\operatorname{grad}(f \cdot g) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 z\, e^{x-2y} + 2x^3 z\, e^{x-2y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3 z \cdot e^{x-2y} \cdot (-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2x^3 e^{x-2y}$$

$$\Rightarrow \operatorname{grad} f = 2x^2 z e^{x-2y}(3+x)\vec{i} - 4x^3 z e^{x-2y}\vec{j} + 2x^3 e^{x-2y} \cdot \vec{k}$$

4. a) Funcția Beta (definiție + 3 proprietăți)

b) Să se calculeze $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cdot \cos^4 x \, dx$.

a) $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1} \cdot (1-x)^{b-1} dx \quad , \quad a,b>0$

$$B(a,b) = B(b,a)$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cdot \cos^b x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right) \quad , \quad a,b > -1.$$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cdot \cos^4 x \, dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(6)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi} \cdot \frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{5!}$

$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}-1\right) = \frac{5}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$

$= \frac{3\pi}{8^3}$