# Curs 1

# Numere complexe

## 1.1 Operaţii cu numere complexe

**Definiţie 1.1.** Mulţimea $\mathbb{R}^2$ a tuturor perechilor ordonate de numere reale, pe care o înzestrăm cu operaţiile de adunare şi înmulţire

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

formează un corp comutativ numit ***corpul numerelor complexe***, pe care îl vom nota cu $\mathbb{C}$. Elementele lui $\mathbb{C}$ se numesc ***numere complexe***.

**Notaţie 1.2.** Observăm că $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ şi $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$ ceea ce ne justifică faptul că mulţimea $\{ (a, 0) \,|\, a \in \mathbb{R} \}$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$ care este izomorf cu mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. În plus relaţia

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d)$$

ne arată că putem face identificarea dintre perechea $(a, 0)$ şi numărul real $a$.

Astfel, orice număr complex îl putem scrie

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + b(0, 1).$$

Vom nota, aşa cum se obişnuieşte, perechea $(0, 1)$ cu $i$. Fiindcă $(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$ avem $i^2 = -1$, iar acesta este motivul pentru care uneori se foloseşte notaţia $i = \sqrt{-1}$. Aşadar numărul complex $z = (a, b)$ se scrie

$$z = a + bi.$$

Această formă o vom numi ***forma algebrică*** a numărului complex. Numerele reale $a$ şi $b$ se numesc ***partea reală*** şi ***partea imaginară*** a numărului complex $z$ şi vom nota

$$\operatorname{Re} z = a \quad \text{şi} \quad \operatorname{Im} z = b.$$

**Observaţie 1.3.** Numerele complexe pot fi reprezentate de punctele unui plan. Fiecărui punct din plan îi corespunde un număr complex numit ***afixul*** punctului. Astfel punctul de coordonate $(a, b)$ are afixul $z = a+bi$. Punctele de pe axa orizontală au afixele numere reale şi de aceea axa orizontală se va numi ***axa reală***. Axa verticală se va numi ***axă imaginară***, pe ea fiind reprezentate numerele pur imaginare $ib$.

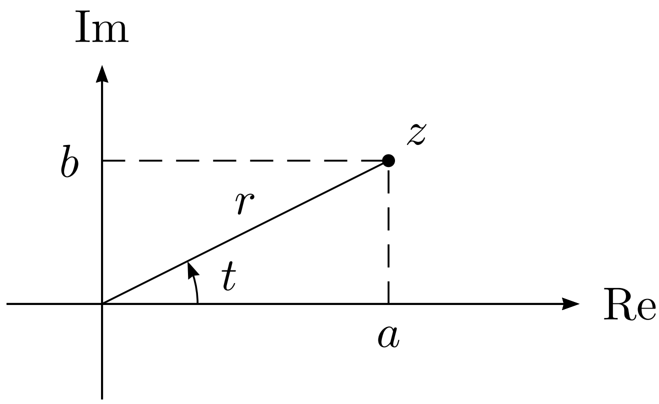


Figura 1.1: Reprezentarea numărului complex $z = a + bi = r(\cos t + i \sin t)$

**Observaţie 1.4.** Fie $M$ punctul care are afixul $z = a + ib$. Distanţa de la origine la punctul $M$ o vom nota cu $r$, iar unghiul pe care vectorul $OM$ îl face cu partea pozitivă a axei reale, măsurat în radiani în sens invers acelor de ceasornic îl vom nota cu $t$. Fiecare punct din plan poate fi localizat ştiind mărimile $r$ şi $t$ numite ***coordonate polare***. Avem relaţiile de legătură între coordonatele carteziene şi coordonatele polare

$$a = r \cos t$$
$$b = r \sin t.$$

Obţinem ***forma trigonometrică*** a numărului complex $z = r(\cos t + i \sin t)$, căci

$$z = a + bi = r \cos t + ir \sin t = r(\cos t + i \sin t).$$

Numărul $r$ se numeşte ***modulul*** numărului complex $z$ şi notează $|z|$. Avem

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Numărul $t$ se numeşte ***argumentul*** numărului complex $z$ şi se notează $\operatorname{Arg} z$. Să observăm că datorită periodicităţii funcţiei $\cos t$ şi $\sin t$ argumentul poate fi determinat abstracţie făcând de un multiplu întreg de $2\pi$. Avem

$$t = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & a > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & a < 0. \end{cases}$$

Pentru cazul în care $a = 0$ avem $t = \pi/2$ dacă $b > 0$ şi $t = -\pi/2$ dacă $b < 0$. Pentru numărul complex $z = 0$ ($a = 0$ şi $b = 0$) argumentul $t$ este nedeterminat. Valoarea argumentului din intervalul $[0, 2\pi)$ se notează $\arg z$ şi se numeşte valoare principală a argumentului. Valoarea principală a argumentului se calculează cu formula

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & \text{în primul cadran} \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & \text{în cadranele 2 şi 3} \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \dfrac{b}{a}, & \text{în cadranul 4.} \end{cases}$$

În general avem $\operatorname{Arg} z = \{ \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \}$.

**Exemplu 1.5.** Mai jos sunt câteva exemple de numere complexe scrise în formă algebrică şi trigonometrică

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 + i\sin 0\\
-2 &= 2(\cos\pi + i\sin\pi)\\
i &= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\\
-3i &= 3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1+2i &= \sqrt{5}\,[\cos(\operatorname{arctg} 2) + i\sin(\operatorname{arctg} 2)]\\
-2+2i &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\
-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\\
1-i &= \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

**Observaţie 1.6.** Deoarece $|z_1|, |z_2|$ şi $|z_1 + z_2|$ sunt laturile unui triunghi are loc inegalitatea

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|\,,$$

numită inegalitatea triunghiului. Ca o consecinţă are loc şi

$$||z_2| - |z_1|| \le |z_2 - z_1|\,.$$

**Observaţie 1.7.** Scrierea sub forma trigonometrică este avantajoasă când efectuăm operaţii de înmulţire cu numere complexe. Aceasta pentru că dacă

$$\begin{aligned}
z_1 &= r_1(\cos t_1 + i\sin t_1)\\
z_2 &= r_2(\cos t_2 + i\sin t_2)
\end{aligned}$$

atunci

$$\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= r_1 r_2\,[\cos t_1\cos t_2 - \sin t_1\sin t_2 + i(\cos t_1\sin t_2 + \sin t_1\cos t_2)]\\
&= r_1 r_2\,[\cos(t_1+t_2) + i\sin(t_1+t_2)]\,.
\end{aligned}$$

Astfel când se înmulţesc două numere complexe, modulul produsului este produsul modulelor, iar argumentul produsului este suma argumentelor:

$$\begin{aligned}
|z_1\cdot z_2| &= |z_1|\cdot|z_2|\\
\operatorname{Arg}(z_1\cdot z_2) &= \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.
\end{aligned}$$

Prin înmulţire repetată se obţine formula $z^n = r^n(\cos nt + i\sin nt)$. În particular pentru $r = 1$ rezultă formula lui Moivre

$$(\cos t + i\sin t)^n = \cos nt + i\sin nt.$$

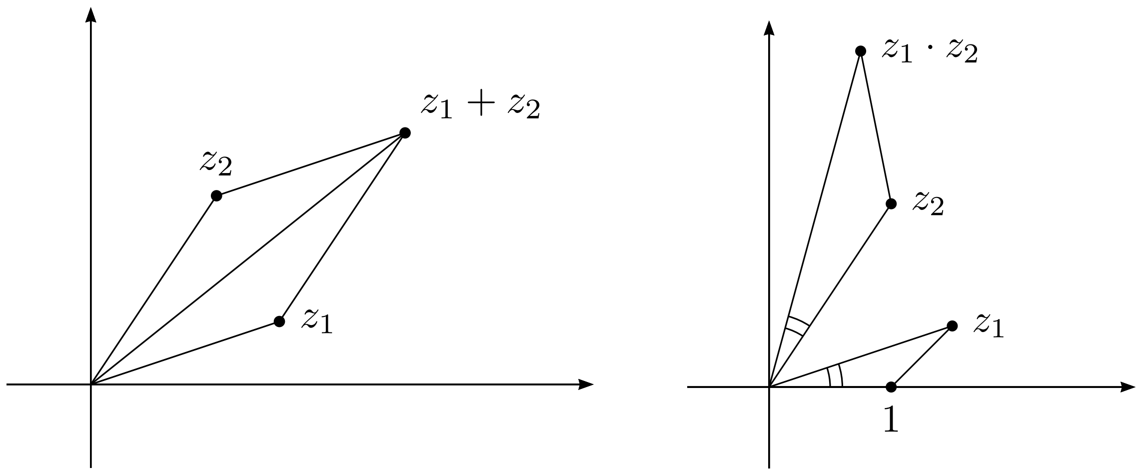


Figura 1.2: Adunarea şi înmulţirea numerelor complexe

**Exemplu 1.8.** Să se calculeze $(1 + i\sqrt{3})^{100}$.

Scriem pe $z = 1 + i\sqrt{3}$ în forma trigonometrică. Avem $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$ şi $\operatorname{Arg} z = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Atunci

$$\begin{aligned} z^{100} &= |z|^{100} \left( \cos \frac{100\pi}{3} + i \sin \frac{100\pi}{3} \right) = 2^{100} \left[ \cos \left( 32\pi + \frac{4\pi}{3} \right) + i \sin \left( 32\pi + \frac{4\pi}{3} \right) \right] \\ &= 2^{100} \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2^{100} \left( \frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -2^{99}(1 + i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Exemplu 1.9.** Trecând la argumente în egalitatea $(1 + ix)(1 + iy) = 1 - xy + i(x + y)$ deducem formula $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ şi în particular $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

**Definiţie 1.10.** ***Conjugatul*** numărului complex $z = a + bi$ este numărul complex

$$\overline{z} = a - bi.$$

**Propoziţie 1.11.** Principalele proprietăţi legate de conjugatul unui număr sunt

$$\begin{array}{lll} a) & \overline{\overline{z}} = z & \\ b) & \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, & \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} \\ c) & \operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}, & \operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2} \\ d) & z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z} & \\ e) & z \cdot \overline{z} = |z|^2. & \end{array}$$

**Exemplu 1.12.** Să se demonstreze că $|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$.

Vom folosi proprietăţile conjugatului şi avem

$$\begin{aligned} |1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= (1 - z_1\overline{z_2})\,\overline{1 - z_1\overline{z_2}} - (z_1 - z_2)\,\overline{z_1 - z_2} \\ &= (1 - z_1\overline{z_2})\,(1 - \overline{z_1}z_2) - (z_1 - z_2)\,(\overline{z_1} - \overline{z_2}) \\ &= 1 - \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_2} \cdot \overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} - z_2\overline{z_2} \\ &= 1 + |z_1|^2 \cdot |z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 \\ &= (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2). \end{aligned}$$

**Observaţie 1.13.** Pentru a împărţi numărul $z_1$ la $z_2 \neq 0$ determinăm numărul complex $z$ astfel încât $z_1 = z_2 \cdot z$. Înmulţind cu conjugatul lui $z_2$ avem

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{cb-ad}{c^2+d^2}$$

iar în formă trigonometrică acesta se scrie

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(t_1-t_2) + i\sin(t_1-t_2)\right].$$

## 1.2 Şiruri de numere complexe

**Definiţie 1.14.** Un şir de numere complexe $(z_n)$ este ***convergent*** dacă există un număr complex $z$ cu proprietatea că şirul de numere reale $d_n = |z_n - z|$ este convergent la 0. Numărul $z$ se va numi limita şirului $(z_n)$ şi vom scrie $z_n \to z$ sau $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Un şir se va numi ***divergent*** dacă nu este convergent.

**Observaţie 1.15.** Să observăm că un şir $(z_n)$ de numere complexe converge la 0 dacă şi numai dacă $|z_n| \to 0$.

**Propoziţie 1.16.** Un şir de numere complexe $z_n = a_n + ib_n$ converge la numărul complex $z = a + ib$ dacă şi numai dacă $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.

*Demonstraţie.* Folosind inegalităţile

$$|a_n - a| \leq \sqrt{(a_n-a)^2 + (b_n-b)^2} = |z_n - z|$$
$$|b_n - b| \leq \sqrt{(a_n-a)^2 + (b_n-b)^2} = |z_n - z|$$

deducem cu ajutorul teoremei cleştelui că dacă $z_n \to z$ atunci $a_n \to a$ şi $b_n \to b$.

Invers, dacă $a_n \to a$ şi $b_n \to b$ atunci şirul

$$|z_n - z| = \sqrt{(a_n-a)^2 + (b_n-b)^2}$$

converge la zero. □

**Propoziţie 1.17.** Un şir de numere complexe $z_n = r_n(\cos t_n + i\sin t_n)$ converge la $z = r(\cos t + i\sin t)$ dacă $r_n \to r$ şi $t_n \to t$.

*Demonstraţie.* Notăm $a_n = r_n \cos t_n$ şi $b_n = r_n \sin t_n$ şi aplicăm rezultatul anterior. □

**Exemplu 1.18.** Să considerăm şirul $z_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, unde $z$ este un număr complex. Să calculăm limita acestui şir.

Fie $z = a + bi$. Avem $1 + \frac{z}{n} = 1 + \frac{a}{n} + i\frac{b}{n}$. Deoarece $1 + \frac{a}{n} \to 1$ putem presupune că $1 + \frac{a}{n} > 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Forma trigonometrică a numărului complex $1 + z/n$ este

$$1 + \frac{z}{n} = \sqrt{\left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}\,(\cos t_n + i\sin t_n)$$

unde $t_n = \operatorname{arctg}\frac{b}{a+n}$. Deoarece

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1+\frac{z}{n}\right)\right|^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + 2\frac{a}{n} + \frac{a^2+b^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{2a}{n}+\frac{a^2+b^2}{n^2}\right)} = e^a$$

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{nb}{a+n}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{b}{a+n}}{\frac{b}{a+n}}\right) = b$$

va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}|z_n|\left(\cos nt_n + i\sin nt_n\right) = e^a(\cos b + i\sin b).$$

## 1.3 Funcţii elementare

**Definiţie 1.19.** ***Funcţia exponenţială*** $\exp(z)$ sau $e^z$ se defineşte prin

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

pentru orice număr complex $z = a + bi$.

**Observaţie 1.20.** Pentru $a = 0$ obţinem ***formula lui Euler*** $e^{ib} = \cos b + i \sin b$. Pentru $-b$ aceasta se scrie $e^{-ib} = \cos b - i \sin b$. De aici se obţin formulele lui Euler

$$\begin{aligned} \cos b &= \frac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} \\ \sin b &= \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2i}. \end{aligned}$$

Formula lui Euler ne permite să scriem orice număr complex în ***forma exponenţială***

$$z = |z| e^{i \arg z}.$$

De exemplu, este adevărată formula $1 = e^{2\pi i}$.

**Observaţie 1.21.** Să mai observăm că funcţia exponenţială astfel definită verifică proprietatea obişnuită a funcţiei exponenţiale $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. De aici rezultă relaţia $e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z$ ceea ce ne arată că funcţia exponenţială este periodică de perioadă $2\pi i$.

**Exemplu 1.22.** O expresie care apare mult în inginerie este următoarea

$$a \cos \lambda t + b \sin \lambda t = A \cos(\lambda t - \phi), \qquad \text{unde } a + bi = Ae^{i\phi}.$$

Pentru a demonstra aceasta să observăm că

$$\begin{aligned} a \cos \lambda t + b \sin \lambda t &= \operatorname{Re}\left[(a - bi) \cdot (\cos \lambda t + i \sin \lambda t)\right] \\ &= \operatorname{Re}\left(Ae^{-i\phi} \cdot e^{i\lambda t}\right) = \operatorname{Re}\left(Ae^{i(\lambda t - \phi)}\right) \\ &= A \cos(\lambda t - \phi). \end{aligned}$$

**Definiţie 1.23.** Definim funcţiile ***sinus*** şi ***cosinus*** pe $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \end{aligned}$$

şi funcţiile ***sinus hiperbolic*** şi ***cosinus hiperbolic*** pe $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}. \end{aligned}$$

**Observaţie 1.24.** Din definiţia funcţiilor trigonometrice şi a celor hiperbolice rezultă

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} iz &= \cos z & \qquad \cos iz &= \operatorname{ch} z \\ \operatorname{sh} iz &= i \sin z & \qquad \sin iz &= -i \operatorname{sh} z. \end{aligned}$$

Formulele cu sin şi cos din cazul real rămân adevărate. De exemplu

$$\begin{aligned}\sin a \cos b &= \frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\cdot\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\\ &= \frac{e^{i(a+b)}-e^{-i(a+b)}}{4i}+\frac{e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}}{4i}\\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right].\end{aligned}$$

Dar există unele proprietăţi ale funcţiilor sin şi cos care sunt adevărate pe $\mathbb{R}$ fără să fie adevărate şi pe $\mathbb{C}$: funcţiile sin şi cos sunt mărginite pe $\mathbb{R}$, dar pe $\mathbb{C}$ sunt nemărginite. Într-adevăr, pentru că $\lim_{b\to\infty} \operatorname{ch} b = \infty$ şi $\cos ib = \operatorname{ch} b$ rezultă cos este nemărginită. Din $\lim_{b\to\infty} \operatorname{sh} b = \infty$ şi $\sin ib = -i \operatorname{sh} b$ rezultă sin este nemărginită.

**Definiţie 1.25.** Fie $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ un număr complex. Numim ***logaritm*** al lui $z$ orice soluţie a ecuaţiei

$$e^w = z.$$

**Propoziţie 1.26.** Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $e^w = z$, unde $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ este

$$\operatorname{Log} z = \{ \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z} \}.$$

*Demonstraţie.* Scriind numărul $z$ în forma exponenţială $z = re^{it}$ şi $w = u + iv$ în forma algebrică avem

$$e^u e^{iv} = e^{u+iv} = e^w = z = re^{it},$$

de unde rezultă $e^u = r$ şi $v = t + 2k\pi$, adică $u = \ln r = \ln|z|$ şi $v = \arg z + 2k\pi$. □

**Observaţie 1.27.** Spre deosebire de cazul real, unde un număr pozitiv are un singur logaritm, în cazul complex un număr nenul are o infinitate de logaritmi. Astfel în complex funcţia Log este o funcţie multivocă (adică asociază unui singur număr complex o mulţime de numere complexe). Funcţia obţinută pentru o valoare fixată a lui $k$ se numeşte ***ramură*** sau ***determinare*** a funcţiei $\operatorname{Log} z$. Ramura corespunzătoare lui $k = 0$ se numeşte ramură principală şi se notează

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z$$

unde $\arg z$ ia valori în intervalul $[0, 2\pi)$.

Funcţiile multivoce nu mai pot fi privite în acelaşi fel în care sunt privite funcţiile univoce. De exemplu să presupunem că obligăm variabila $z$ să descrie un cerc cu centrul în origine în sens trigonometric. Să observăm că atunci când variabila ajunge de unde a plecat argumentul ei a crescut cu $2\pi$. Deşi am ajuns în acelaşi punct din plan valoarea funcţiei este diferită.

Pentru a corecta această problemă să presupunem că facem o "tăietură" în planul complex în partea pozitivă a axei reale de la punctul $z = 0$ până la $z = \infty$ şi convenim ca variabila $z$ să nu poată trece peste această tăietură. În acest fel se sacrifică continuitatea funcţiei, pentru că în puncte apropiate situate de o parte şi alta a tăieturii valorile funcţiei diferă prin $2\pi i$. Pentru a înlătura şi acest neajuns să considerăm în locul planului variabilei complexe $z$ o suprafaţă formată din mai multe plane complexe suprapuse câte unul pentru fiecare ramură a funcţiei. Lipim tăieturile acestor plane astfel încât marginea inferioară a fiecărui plan este lipită de marginea superioară a planului precedent şi marginea superioară este lipită la marginea inferioară a planului următor. În cazul unei funcţii cu un număr finit de ramuri, marginea superioară a ultimului plan este lipită de marginea inferioară a primului plan. În acest fel am obţinut o suprafaţă continuă.

**Exemplu 1.28.** Să vedem în cazul complex cât este $\ln(-1) =?$

Modulul numărului $z = -1$ este $|z| = 1$ iar argumentul $\arg z = \pi$. Atunci

$$\text{Log}(-1) = \{\, \ln 1 + i(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}\,\} = \{\, i\pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\,\}.$$

**Definiţie 1.29.** Funcţia ***putere*** se defineşte cu ajutorul logaritmului în felul următor: pentru $z, \alpha \in \mathbb{C}$

$$z^\alpha = e^{\alpha \cdot \text{Log}\, z}.$$

**Observaţie 1.30.** Dacă $\alpha$ este număr raţional de forma $\alpha = p/q$ cu $p, q \in \mathbb{Z}$ şi $q > 1$ atunci funcţia $z^\alpha$ este multivocă: unei valori fixate a lui $z$ îi corespund $q$ valori diferite. Dacă $\alpha$ nu este raţional atunci funcţia putere are o infinitate de ramuri. De exemplu

$$\sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\cdot \text{Log}(-1)} = e^{\frac{1}{2} i(\pi + 2k\pi)} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \{\, -i, i\,\}.$$

Acest lucru explică pe de o parte de ce $\sqrt{-1}$ nu este cea mai bună notaţie pentru $i$, iar pe de altă parte explică paradoxul $1 = \sqrt{(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$. De fapt, datorită faptului că funcţia putere este multivocă proprietăţi ale puterilor care aveau loc în cazul real nu au loc în general în cazul complex: de exemplu $z^\alpha \cdot w^\alpha \neq (z \cdot w)^\alpha$ şi $(z^\alpha)^\beta \neq z^{\alpha\cdot\beta}$.

**Exemplu 1.31.** Cât este $i^i =?$

Conform definiţiei $i^i = e^{i\cdot \text{Log}\, i}$. Pentru a vedea cât este $\text{Log}\, i$ să vedem cât este modulul şi argumentul lui $z = i$. Avem $|z| = 1$ şi $\arg z = \frac{\pi}{2}$. Rezultă că $\text{Log}\, i = \{\, \ln 1 + i(\pi/2 + 2k\pi)\,\} = \left\{\, i\frac{\pi}{2}(4k+1)\,\right\}$ şi

$$i^i = e^{i\cdot\text{Log}\, i} = e^{i\cdot(i\frac{\pi(4k+1)}{2})} = \left\{ e^{-\frac{\pi(4k+1)}{2}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Am obţinut că $i^i$ este o mulţime de numere reale.

**Exemplu 1.32.** Să se rezolve ecuaţia $\cos z = -2$ în $\mathbb{C}$.

În mulţimea numerelor reale această ecuaţie nu are nici o soluţie, dar în mulţimea numerelor complexe are o infinitate. Să arătăm lucrul acesta. Pornind de la egalitatea $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ şi notând $w = e^{iz}$ obţinem ecuaţia $w^2 + 4w + 1 = 0$. Cele două soluţii ale ecuaţiei sunt $w_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$. Luând pe rând avem $e^{iz} = -2 + \sqrt{3}$. Rezultă $iz \in \text{Log}(-2+\sqrt{3}) = \left\{\, \ln|-2+\sqrt{3}| + i(\arg(-2+\sqrt{3}) + 2k\pi)\,\right\}$. Înmulţind cu $-i$ se obţine prima infinitate de soluţii

$$z \in \left\{ -i\ln(2-\sqrt{3}) + \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Analog pentru cazul $e^{iz} = -2 - \sqrt{3}$ se obţine

$$z \in \left\{ -i\ln(2+\sqrt{3}) + \pi(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Reuniunea celor două mulţimi obţinute constituie soluţia ecuaţiei date.

## 1.4 Bibliografie

1. I. Gavrea, *Matematici speciale*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.
2. P. J. Nahin, *An imaginary tale: the story of* $\sqrt{-1}$, Princeton University Press, Princeton, 1998.
3. K. Miller, *An introduction to advanced complex calculus*, Dover Publications, New York, 1970.