Curs 2

Serii

2.1 Serii numerice

2.1.1 Definiţie

Definiţie 2.1. Fie (z_n) un şir de numere complexe. Cu termenii acestui şir se formează şirul (S_n), unde

$$S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n = \sum_{k=0}^{n} z_k.$$

Perechea $((z_n), (S_n))$ se numeşte ***serie*** de termen general z_n şi se notează cu

$$\sum_{n\geq 0} z_n \quad \text{sau} \quad z_0 + z_1 + ... + z_n + ...$$

z_n este termenul de rang n al seriei, iar S_n este suma parţială de rang n a seriei.

Definiţie 2.2. Seria $\sum_{n\geq 0} z_n$ este ***convergentă*** (şi asociem notaţia CONV), dacă şirul sumelor parţiale (S_n) este convergent. Limita acestui şir convergent o vom numi ***suma seriei*** şi o vom nota

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Dacă şirul (S_n) este divergent, atunci seria se numeşte ***divergentă*** (DIV).

Exemplu 2.3. Fie $q \in \mathbb{C}$ un număr fixat. Seria

$$\sum_{n\geq 0} q^n = 1 + q + q^2 + ... + q^n + ...$$

se numeşte ***serie geometrică*** de raţie q. Fie $S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$ suma parţială a seriei geometrice. Avem $qS_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}$. De aici $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$. Şirul sumelor parţiale are termenul general

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{dacă } q \neq 1 \\ n+1, & \text{dacă } q = 1. \end{cases}$$

Deoarece $\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ dacă $|q| < 1$ rezultă că seria geometrică este convergentă pentru $|q| < 1$ şi are suma

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } |q| < 1.$$

Dacă $|q| \geq 1$ şirul (S_n) este divergent deci seria geometrică este divergentă.

Exemplu 2.4. Să arătăm că seria

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

este convergentă.

Fie S_n suma parţială a seriei. Atunci

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2-k}{k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right].
\end{aligned}$$

Seria este convergentă pentru că (S_n) este convergent. Suma seriei este

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

2.1.2 Criteriul general de convergenţă a lui Cauchy

Teoremă 2.5. Seria $\sum_{n\geq 0} z_n$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ şi orice $p \in \mathbb{N}$ să avem

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon.$$

Observaţie 2.6. Considerăm $p = 1$ în criteriul general de convergenţă a lui Cauchy. Convergenţa seriei $\sum_{n\geq 0} x_n$ implică faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $|z_{n+1}| < \varepsilon$. Dar această condiţie este echivalentă cu $z_n \to 0$. Am obţinut faptul că

$$\text{dacă } \sum_{n\geq 0} z_n \text{ este CONV, atunci } z_n \to 0.$$

Reciproca este importantă în stabilirea convergenţei unei serii.

$$\text{O serie } \sum_{n\geq 0} z_n \text{ cu } \lim_{n\to\infty} z_n \neq 0 \text{ este DIV.}$$

Exemplu 2.7. 1) Seria $\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ este DIV pentru că $z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e \neq 0$.
2) Seria $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$ este DIV pentru că $z_n = (-1)^n$ este divergent.
3) Seria ***armonică*** $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ este divergentă, pentru că nu este îndeplinit criteriul lui Cauchy.
Într-adevăr, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2}$ şi pentru $p = n = N$ avem

$$\left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{N+N} > \frac{N}{2N} = \varepsilon.$$

2.1.3 Proprietăţi de operare cu serii

Serii absolut convergente

Definiţie 2.8. O serie $\sum_{n\geq 0} z_n$ este ***absolut convergentă***, dacă seria $\sum_{n\geq 0} |z_n|$ este convergentă. O serie convergentă care nu este absolut convergentă se numeşte serie ***semiconvergentă***.

Teoremă 2.9. O serie absolut convergentă este CONV.

Demonstraţie. Folosim inegalitatea

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + ... + z_{n+p}| \leq |z_{n+1}| + |z_{n+2}| + ... + |z_{n+p}|$$

şi criteriul general de convergenţă al lui Cauchy pentru seria $\sum_{n\geq 0} |z_n|$. □

Operaţii cu serii convergente

Teoremă 2.10. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:
1. Dacă $\sum_{n\geq 0} x_n$ este CONV, atunci $\sum_{n\geq 0}(a \cdot x_n)$ este CONV pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a \cdot x_n) = a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

2. Dacă $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ sunt CONV, atunci $\sum_{n\geq 0}(x_n + y_n)$ este CONV şi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x_n + y_n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n.$$

3. Dacă $\sum_{n\geq 0} x_n$ este CONV, iar $\sum_{n\geq 0} y_n$ este DIV, atunci $\sum_{n\geq 0}(x_n + y_n)$ este DIV.

Observaţie 2.11. Dacă ambele serii $\sum_{n\geq 0} x_n$ şi $\sum_{n\geq 0} y_n$ sunt DIV, atunci nu putem spune nimic despre seria sumă $\sum_{n\geq 0}(x_n+y_n)$. De exemplu, dacă $x_n = n$ şi $y_n = n$ atunci seria sumă este divergentă. Dacă $x_n = n$ şi $y_n = -n$ atunci seria sumă este convergentă cu suma nulă.

Proprietatea de asociativitate a seriilor

Pornind de la o serie, putem construi alte serii, introducând paranteze care grupează un număr finit de termeni, dar lăsând neschimbată ordinea termenilor. De exemplu, pornind de la seria

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots$$

ajungem la seria

$$(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \cdots = -1 - 1 - 1 - \dots$$

sau la seria

$$1 + (-2 + 3) + (-4 + 5) + \cdots = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Avem următorul rezultat:

Teoremă 2.12. Dacă $\sum_{n\geq 0} x_n$ este CONV, atunci orice serie obţinută prin gruparea termenilor este de asemenea convergentă având aceeaşi sumă.

Observaţie 2.13. Reciproca acestei Teoreme nu este adevărată. Considerăm seria divergentă $\sum_{n\geq 0}(-1)^n$. Grupând termenii seriei

$$1-1+1-1+1-\dots$$

doi câte doi se obţine seria convergentă

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\dots.$$

2.1.4 Serii cu termeni reali oarecare

Teoremă 2.14 (Criteriul Abel-Dirichlet)**.** Dacă seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ are şirul sumelor parţiale (S_n) mărginit şi dacă (a_n) este un şir cu termeni pozitivi, monoton descrescător, convergent la zero, atunci seria $\sum_{n\geq 0} a_n x_n$ este CONV.

Exemplu 2.15. Să se studieze convergenţa seriei

$$\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(a\cdot n)}{n},\ a\neq 2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

Aplicăm criteriul Abel-Dirichlet. Avem $a_n=\frac{1}{n}\to 0$ monoton descrescător. Demonstrăm acum mărginirea şirului $S_n=\cos a+\cos 2a+\cdots+\cos na$. Cu ajutorul formulei trigonometrice $2\cdot\cos x\cdot\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y)$, avem

$$\begin{aligned}2\cdot\sin\frac{a}{2}S_n&=\sum_{k=1}^{n}2\cdot\cos ak\cdot\sin\frac{a}{2}=\sum_{k=1}^{n}\left[\sin\left(ak+\frac{a}{2}\right)-\sin\left(ak-\frac{a}{2}\right)\right]\\&=\sin\left(an+\frac{a}{2}\right)-\sin\frac{a}{2}=2\cdot\cos\frac{(n+1)a}{2}\cdot\sin\frac{na}{2}.\end{aligned}$$

Pentru că $a\neq 2k\pi$ rezultă că $\sin\frac{a}{2}\neq 0$ şi atunci

$$|S_n|=\left|\frac{2\cdot\cos\frac{(n+1)a}{2}\cdot\sin\frac{na}{2}}{2\cdot\sin\frac{a}{2}}\right|\leq\frac{1}{\left|\sin\frac{a}{2}\right|},$$

ceea ce arată mărginirea şirului (S_n). Rezultă că seria $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(a\cdot n)}{n}$ este CONV.

Definiţie 2.16. O serie de forma $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$, unde $a_n>0$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$ se numeşte ***serie alternantă***.

Teoremă 2.17 (Criteriul lui Leibniz)**.** Dacă şirul (a_n) cu termeni pozitivi este descrescător, convergent la zero, atunci seria $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ este CONV.

Exemplu 2.18. Să se studieze convergenţa simplă şi absolută a seriei armonice alternante

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}.$$

Pe baza Criteriului lui Leibniz ea este convergentă. Seria modulelor $\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}\right|=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ nu este convergentă, deci seria armonică alternantă nu este absolut convergentă.

2.1.5 Serii cu termeni reali pozitivi

Definiţie 2.19. Seria $\sum_{n\geq 0} u_n$, unde $u_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ se numeşte ***serie cu termeni pozitivi***.

Observaţie 2.20. Această serie are şirul sumelor parţiale strict crescător, deci acesta este convergent dacă şi numai dacă este şi mărginit.

Dăm în continuare criterii de convergenţă pentru serii cu termeni pozitivi.

Teoremă 2.21 (Criteriul rădăcinii)**.** Fie $\sum_{n\geq 0} u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L,$$

atunci:
1. Dacă $L < 1$ atunci seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. Dacă $L > 1$ atunci seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este DIV.
3. Dacă $L = 1$ atunci criteriul este ineficient.

Teoremă 2.22 (Criteriul raportului)**.** Fie $\sum_{n\geq 0} u_n$ o serie cu termeni pozitivi. Dacă există limita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

atunci:
1. Dacă $L < 1$ atunci seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este CONV.
2. Dacă $L > 1$ atunci seria $\sum_{n\geq 0} u_n$ este DIV.
3. Dacă $L = 1$ atunci criteriul este ineficient.

Exemplu 2.23. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$.
Aplicăm Criteriul raportului pentru şirul $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

deci seria dată este CONV.

2.2 Serii de funcţii

2.2.1 Şiruri de funcţii

Convergenţă punctuală şi uniformă

Definiţie 2.24. Fie $A \subset \mathbb{C}$ nevidă şi $f_n : A \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ un şir de funcţii. Punctul $x \in A$ se numeşte ***punct de convergenţă*** pentru şirul de funcţii (f_n) dacă şirul de numere complexe $(f_n(x))$ este convergent. Mulţimea tuturor punctelor de convergenţă ale şirului de funcţii (f_n) se numeşte ***mulţime de convergenţă***.

Definiţie 2.25. Dacă notăm cu E mulţimea de convergentă a şirului (f_n) atunci putem defini o nouă funcţie, pe care o notăm f, numită ***funcţia limită***, prin

$$f : E \to \mathbb{C}, \quad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in E.$$

Spunem că (f_n) ***converge punctual*** la f pe E şi notăm $f_n \to f$ sau $\lim_{n\to\infty} f_n = f$.

Observaţie 2.26. Altfel spus, (f_n) converge punctual la f pe I dacă pentru orice $x \in I$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq N.$$

Exemplu 2.27. Fie $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Mulţimea de convergenţă este $E = (-1, 1]$, iar funcţia limită este

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1) \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Definiţie 2.28. Spunem că (f_n) ***converge uniform*** la f pe I, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{pentru orice } n \geq N \text{ şi orice } x \in I.$$

Observaţie 2.29. Dacă vom compara definiţiile celor două tipuri de convergenţă vom constata că ele sunt aproape identice: singura diferenţă este poziţia expresiei *pentru orice* x. În cazul convergenţei punctuale, expresia este la început, ceea ce înseamnă că numărul $N \in \mathbb{N}$ depinde în general de x şi ε, adică $N = N(\varepsilon, x)$. În cazul convergenţei uniforme, N depinde doar de ε, adică $N = N(\varepsilon)$, de aceea această convergenţă este mai *tare*, în sensul că dacă (f_n) converge uniform la f pe I, atunci (f_n) converge şi punctual la f pe I. Vom nota convergenţa uniformă prin $f_n \rightrightarrows f$.

Teoremă 2.30. Şirul de funcţii mărginite (f_n) converge uniform pe mulţimea I către funcţia f dacă şi numai dacă

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Exemplu 2.31. Şirul $f_n(x) = x^n$ converge punctual la funcţia nulă $f = 0$ pe $I = [0, 1)$, dar nu converge uniform către această funcţie, deoarece

$$\sup_{x\in[0,1)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1)} x^n = 1^n = 1.$$

Proprietăţi ale şirurilor uniform convergente

Teoremă 2.32 (Proprietatea de păstrare a continuităţii)**.** Fie $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă f_n sunt continue pe $[a, b]$ şi $f_n \rightrightarrows f$ atunci f este continuă pe $[a, b]$.

Observaţie 2.33. Proprietatea se rescrie

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x)}$$

Observaţie 2.34. Dacă (f_n) este un şir de funcţii continue pe $[a, b]$ şi (f_n) converge punctual la f, dar nu uniform, atunci s-ar putea ca funcţia limită f să nu fie o funcţie continuă pe intervalul $[a, b]$, după cum arată următorul exemplu. Fie $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$. Funcţia limită

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

nu este continuă în $x = 1$, deci nici pe $[0, 1]$, deşi f_n sunt continue pe $[0, 1]$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Aceasta se explică pe baza faptului că (f_n) nu converge uniform la f.

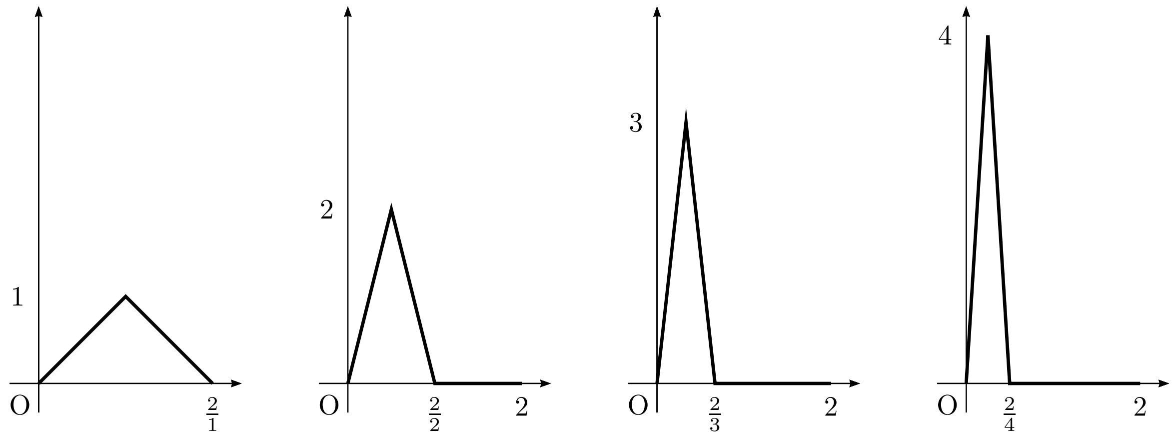

Figura 2.1: Funcţiile f_1, f_2, f_3 şi f_4

Teoremă 2.35 (Teorema de păstrare a integralei)**.** Şirul de funcţii continue $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ este uniform convergent la f. Atunci f este integrabilă şi

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie 2.36. Proprietatea se rescrie

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

Observaţie 2.37. Dacă (f_n) este un şir de funcţii continue pe $[a,b]$ şi (f_n) converge punctual la f, dar nu uniform, atunci s-ar putea ca proprietatea de integrare termen cu termen să nu aibă loc, după cum arată următorul exemplu. Fie $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, 1/n) \\ 2n - n^2 x, & x \in [1/n, 2/n) \\ 0, & x \in [2/n, 2]. \end{cases}$$

Să observăm că funcţiile f_n sunt continue pe $[0,2]$. Funcţia limită este $f(x) = 0$, pentru orice $x \in [0,2]$. Într-adevăr, $f_n(0) = 0$ şi pentru orice $x \in (0,2]$, $f_n(x) = 0$, pentru $n > 2/x$. Aceasta înseamnă că $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Pe de altă parte, pentru orice $n \geq 1$

$$\int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} (2n - n^2 x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1 \neq 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Acest lucru se explică pe baza faptului că f_n nu converge uniform la f. Într-adevăr,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,2]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,2]} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n = \infty,$$

ceea ce demonstrează că f_n nu converge uniform la f.

Teoremă 2.38 (Teorema de păstrare a derivatei)**.** Şirul de funcţii derivabile $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge punctual la f, iar şirul derivatelor (f_n') este uniform convergent la g. Atunci f este derivabilă şi $f'(x) = g(x)$, pentru orice $x \in [a, b]$.

Observaţie 2.39. Proprietatea se rescrie

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'(x)}$$

Exemplu 2.40. Fie şirul de funcţii $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definit prin $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ care converge uniform la $f(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Totuşi, $f_n'(x) = \cos nx$ nici măcar nu este punctual convergent, darămite să conveargă la f'. Într-adevăr, $f_n(\pi) = (-1)^n$ este divergent.

Acest exemplu ne arată că nu totdeauna $\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = (\lim_{n\to\infty} f_n)'(x)$.

2.2.2 Serii de funcţii

Definiţie 2.41. Fie (f_n) un şir de funcţii. Numim ***serie de funcţii*** perechea (f_n, S_n) unde $S_n = f_0 + f_1 + \cdots + f_n$ şi o notăm $\sum_{n\geq 0} f_n$. Seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este ***convergentă*** punctual/uniform dacă şirul sumelor parţiale S_n converge punctual/uniform. ***Suma seriei de funcţii*** este funcţia limită a şirului S_n. Vom nota

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Teoremă 2.42. Fie $\sum_{n\geq 0} f_n$ o serie uniform convergentă de funcţii continue pe $[a, b]$ şi S suma acestei serii. Atunci S este o funcţie continuă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie 2.43. Proprietatea se rescrie

$$\boxed{\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}$$

şi se numeşte proprietatea de integrare termen cu termen.

Teoremă 2.44. Fie $\sum_{n\geq 0} f_n$ o serie de funcţii derivabile pe $[a, b]$, punctual convergentă, cu suma S, cu proprietatea că seria derivatelor $\sum_{n\geq 0} f_n'$ este uniform convergentă. Atunci S este derivabilă pe $[a, b]$ şi $S' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'$.

Observaţie 2.45. Proprietatea se rescrie

$$\boxed{\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)\,\mathrm{d}x}$$

şi se numeşte proprietatea de derivare termen cu termen.

Teoremă 2.46 (Weierstrass)**.** Fie (f_n) un şir de funcţii definit pe I. Dacă $|f_n(x)| \leq x_n$, pentru orice $x \in I$ şi orice $n \in \mathbb{N}$ şi seria $\sum_{n\geq 0} x_n$ este convergentă, atunci seria $\sum_{n\geq 0} f_n$ este uniform convergentă şi absolut convergentă pe I.