Curs 3

Serii de puteri

3.1 Definiţie. Proprietăţi

Definiţie 3.1. Fie (a_n) un şir de numere complexe şi a un număr complex. Se numeşte ***serie de puteri*** centrată în a seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n.$$

Observaţie 3.2. Notând $w = z - a$ seria devine centrată în origine. Pentru $z = a$ seria este convergentă.

Teoremă 3.3 (Teorema lui Abel)**.** Dacă seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ este convergentă într-un punct $z_0 \neq a$ atunci ea este absolut convergentă în discul $|z-a| < |z_0 - a|$ şi uniform convergentă în orice disc $|z-a| \leq r < |z_0 - a|$.

Demonstraţie. Fiindcă z_0 este un punct de convergenţă al seriei rezultă că limita şirului $(a_n(z_0-a)^n)$ este nulă, adică $\lim_{n\to\infty} a_n(z_0-a)^n = 0$. De aici deducem că $(a_n(z_0-a)^n)$ este un şir mărginit: există $M > 0$ astfel încât $|a_n|\,|z_0-a|^n < M$. Fie z un punct oarecare din discul $|z-a| < |z_0-a|$. Atunci

$$|a_n|\,|z-a|^n \leq |a_n|\,|z_0-a|^n \cdot \left(\frac{|z-a|}{|z_0-a|}\right)^n < M \cdot \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = Mq^n$$

unde $q = |z-a|/|z_0-a| < 1$. Seria cu termenul general Mq^n fiind convergentă, rezultă că seria cu termenul general $a_n(z-a)^n$ este absolut convergentă.

Dacă z aparţine discului $|z-a| \leq r < |z_0-a|$ atunci $q \leq r/|z_0-a|$. Fiindcă acest raport nu depinde de z şi fiindcă $r/|z_0-a| < 1$ atunci conform criteriul lui Weierstrass pentru serii de funcţii, seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ va fi uniform convergentă. □

Definiţie 3.4. Fiind dată seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ se numeşte ***rază de convergenţă*** numărul R definit prin

$$R = \sup\left\{ |z-a| \;:\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z-a|^n \text{ este convergentă} \right\}.$$

Observaţie 3.5. Raza de convergenţă ne arată că în interiorul cercului $|z-a| = R$ seria este absolut convergentă şi în exterior divergentă. În punctele de pe cerc seria poate fi convergentă sau divergentă. Dacă seria este convergentă doar în punctul $z = a$ atunci $R = 0$, dacă seria este convergentă în tot planul complex atunci $R = \infty$.

Teoremă 3.6. Fie $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie de puteri cu raza de convergenţă R. Atunci
1. dacă există $\lim_{n\to\infty} 1/\sqrt[n]{|a_n|}$ atunci

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

2. dacă există $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ atunci

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Exemplu 3.7. Fie seria geometrică

$$\sum_{n\geq N} x^n = x^N + x^{N+1} + x^{N+2} + \dots.$$

Termenul general al acestei serii de puteri este $a_n = 1$, şi deci raza de convergenţă este $R = 1$. Seria este convergentă pentru $x \in (-1,1)$. Fie $S_n = x^N + x^{N+1} + \cdots + x^{N+n}$. Atunci $xS_n = x^{N+1} + \cdots + x^{N+n+1}$. Scăzând cele două relaţii $S_n - xS_n = x^N - x^{N+n+1}$, de unde

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^N - x^{N+n+1}}{1-x} = \frac{x^N}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

Am obţinut

$$\sum_{n=N}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}, \quad x \in (-1,1).$$

Teoremă 3.8. Fie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-R,R)$. Atunci
1. S este o funcţie continuă pe $(-R,R)$
2. Seria $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ are raza de convergenţă R şi suma $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = S'(x)$.
3. Seria $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ are raza de convergenţă R şi suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t$.

Observaţie 3.9. Dacă $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă pentru $x \in (-R,R)$, atunci S este o funcţie derivabilă pe $(-R,R)$ şi $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Fiindcă şi $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ este convergentă pe $(-R,R)$, rezultă că S' este derivabilă pe $(-R,R)$ şi are loc relaţia $S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$. Continuând raţionamentul deducem că S este o funcţie indefinit derivabilă pe $(-R,R)$. Derivând de n ori seria iniţială şi luând $x = 0$ deducem că

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \geq 0.$$

Exemplu 3.10. Considerăm seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Seria este convergentă pentru $x \in [-1,1)$. Pe baza Teoremei 3.8 punctul 3. avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = -\ln(1-x),\ x \in (-1,1)$$

Teoremă 3.11 (Abel)**.** Fie $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ o serie convergentă în $(-R,R)$, $R > 0$. Dacă seria $\sum_{n\geq 0} a_n R^n$ este convergentă la S, atunci

$$\lim_{x\nearrow R} S(x) = S.$$

Observaţie 3.12. Dacă seria $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ este convergentă pentru $x \in (-R, R)$, $R > 0$ şi $x = -R$, atunci
$$\lim_{x\searrow -R} S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n (-R)^n.$$

Exemplu 3.13. Considerăm seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$. Seria este convergentă pe baza criteriului lui Leibniz. Pe baza Teoremei 3.11 şi a exemplului anterior
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = -\lim_{x\searrow -1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\lim_{x\searrow -1} -\ln(1-x) = \ln 2.$$

3.2 Formula lui Taylor

Notăm
$$C^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ este derivabilă pe } [a,b] \text{ şi } f^{(n)} \text{ este continuă pe } [a,b] \right\}$$

Teoremă 3.14 (Formula lui Taylor cu rest sub formă integrală)**.** Fie $f \in C^{n+1}[a,b]$ şi $x_0 \in (a,b)$. Pentru orice $x \in [a,b]$ avem
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(f,x,x_0),$$
unde
$$R_n(f,x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demonstraţie. Demonstrăm prin inducţie după n. Pentru $n = 0$ avem
$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = f(x_0) + \frac{1}{0!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^0 f^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pentru a demonstra formula pentru $n+1$ folosim formula de integrare prin părţi.
$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t. \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)} f^{(n+1)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(f,x,x_0).
\end{aligned}$$

□

Lema 3.15 (Teorema de medie pentru integrale)**.** Fie $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii continue, g având semn constant pe $[a,b]$. Atunci există $c \in [a,b]$ astfel încât
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teoremă 3.16 (Teorema lui Taylor cu restul sub forma lui Lagrange)**.** Fie $f \in C^{n+1}[a,b]$ şi $x_0 \in (a,b)$. Pentru orice $x \in [a,b]$ există c între x şi x_0 astfel încât
$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema de medie pentru integrale restului $R_n(f, x, x_0)$. $\square$

Observaţie 3.17. 1) Pentru $n = 0$ obţinem Teorema de medie a lui Lagrange: pentru $f \in C^1[a, b]$ există c între x şi x_0 astfel încât

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

2) Rezultatul este adevărat şi în condiţii puţin mai generale.

3.3 Dezvoltări în serie Taylor

Notăm

$$C^\infty[a, b] = \{\, f : [a, b] \longrightarrow R \,|\, f \text{ este indefinit derivabilă pe } [a, b] \,\}\,.$$

Definiţie 3.18. Fie $f \in C^\infty[a, b]$ şi $x_0 \in (a, b)$. Seria

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numeşte ***seria Taylor*** a lui f în jurul punctului x_0.

Definiţie 3.19. O funcţie $f \in C^\infty[a, b]$ se numeşte ***dezvoltabilă în serie Taylor*** în $x_0 \in (a, b)$ dacă există numerele c, d încât $a < c < x_0 < d < b$ şi seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 converge la $f(x)$ pentru orice $x \in (c, d)$.

Exemplu 3.20. Fie $S(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ convergentă pentru $x \in (-R, R)$, $R > 0$. Atunci pe baza Observaţiei 3.9 funcţia S este dezvoltabilă în serie Taylor în $x = 0$, pentru că avem $S \in C^\infty(-R, R)$ şi

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Dar nu orice funcţie indefinit derivabilă este dezvoltabilă în serie Taylor. Considerăm funcţia

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x \in [-1, 0] \end{cases}$$

Funcţia g este indefinit derivabilă pe $[-1, 1]$ şi $g^{(n)}(0) = 0$, $n \geq 0$. Seria Taylor ataşată funcţiei g în jurul lui $x = 0$ este funcţia nulă. Dar $g \neq 0$ pe orice interval deschis care conţine originea. Aşadar, g nu este dezvoltabilă în serie Taylor în $x = 0$.

Teoremă 3.21. (Taylor) Fie $f \in C^\infty[a, b]$ şi $x_0 \in (a, b)$. Dacă există $M > 0$ astfel încât $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$, pentru orice $n \geq 0$ şi orice $x \in [a, b]$ atunci seria Taylor a lui f în jurul lui x_0 este uniform convergentă pe $[a, b]$ având suma $f(x)$.

Demonstraţie. Suma parţială de ordinul n a seriei Taylor este $T_n(f, x_0)$ polinomul lui Taylor de ordinul n ataşat funcţiei f în x_0:

$$T_n(f, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Pe baza formulei lui Taylor cu restul Lagrange avem $f(x) - T_n(f, x_0) = R_n(f, x, x_0)$. Seria Taylor este convergentă la $f(x)$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f, x, x_0) = 0.$$

Conform ipotezei are loc inegalitatea

$$|R_n(f, x, x_0)| = \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right| |x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \le M \cdot \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Să observăm că seria $\sum_{n\ge 0} \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ este convergentă. Într-adevăr, aplicăm criteriul raportului pentru $a_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ şi avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n+2} = 0 < 1.$$

Dacă seria $\sum_{n\ge 0} a_n$ este convergentă, atunci termenul general a_n converge la 0. Din inegalitatea

$$|f(x) - T_n(f, x_0)| \le M a_n, \quad x \in [a, b], n \ge 0,$$

rezultă că $\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - T_n(f, x_0)| = \|f - T_n\| \to 0$, deci T_n converge uniform la f pe $[a, b]$. Atunci egalitatea următoare este adevărată

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

□

Observaţie 3.22. Teorema anterioară ne asigură că orice funcţie infinit derivabilă care are derivate mărginite în vecinătatea unui punct, este dezvoltabilă în serie Taylor în acel punct.

Exemplu 3.23. Au loc dezvoltările

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \; x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \; x \in (-1, 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \; x \in (-1, 1)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n, \; x \in (-1, 1), C_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$