Curs 5

Limite de funcţii

5.1 Limite de funcţii complexe

Definiţie 5.1. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Un punct $a \in \mathbb{C}$ se numeşte ***punct de acumulare*** pentru A, dacă există un şir de puncte (x_n) din A, diferite de a, cu proprietatea că $x_n \to a$.

Definiţie 5.2. Fie $A \subseteq \mathbb{C}$. Un punct $a \in A$ se numeşte ***punct izolat*** al lui A, dacă nu este punct de acumulare pentru A.

Exemplu 5.3. Fie $A = (0,1] \cup \{ 2 \}$ din $\mathbb{R}$. Punctul $x = 2$ nu este punct de acumulare, ci este un punct izolat. Orice alt punct din A este punct de acumulare pentru A. De asemenea, punctul $x = 0$ este punct de acumulare pentru A.

Definiţie 5.4. Fie $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ şi a un punct de acumulare pentru mulţimea A. Funcţia f ***are limita*** $\ell \in \mathbb{C}$ în punctul a dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in A$ cu $0 < |x - a| < \delta$ să avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Observaţie 5.5. O funcţie poate să aibă limită într-un punct, fără ca funcţia să fie definită în acel punct.

Notaţie 5.6. Vom nota faptul că funcţia f are limita ℓ în punctul a prin $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Teoremă 5.7 (Criteriul secvenţial)**.** Fie $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ şi a un punct de acumulare pentru mulţimea A. Funcţia f are limita $\ell \in X$ în punctul a, dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n) de puncte din A care converge la a, astfel încât $x_n \neq a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, şirul $(f(x_n))$ converge la ℓ.

Exemplu 5.8. Funcţia $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$ are limita 4 în punctul $x = 2$, pentru că, pentru orice $\varepsilon > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ cu $0 < |x - 2| < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{5}\right)$

$$|f_1(x) - 4| = \left|x^2 - 4\right| = |x - 2|\,|x + 2| \leq |x - 2| \cdot (|x - 2| + 4) < \frac{\varepsilon}{5} \cdot 5 = \varepsilon.$$

Exemplu 5.9. Funcţia $f_2 : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sin \frac{1}{x}$ nu are limită în punctul $x = 0$. Într-adevăr, pentru şirurile $x_n = \frac{1}{n\pi}$ şi $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$ convergente la 0 avem

$$\lim_{n \to \infty} f_2(x_n) = \lim_{n \to \infty} \sin n\pi = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} f_2(y_n) = \lim_{n \to \infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Observaţie 5.10. Pentru cazul $X = Y = \mathbb{R}$, putem introduce noţiunea de limită infinită şi noţiunea de limită laterală.

Vom spune că $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ are limita $+\infty$ în punctul $x = a$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru x cu proprietatea $0 < |x - a| < \delta$ avem $f(x) > \varepsilon$. Spunem că f are limita $-\infty$ în punctul $x = a$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru x cu proprietatea $0 < |x - a| < \delta$ avem $f(x) < -\varepsilon$.

Spunem că $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ are limita laterală ℓ la dreapta în punctul $x = a$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (a, a + \delta)$ avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Vom nota aceasta prin $\lim_{x \searrow a} f(x) = \ell$. Limita ℓ se notează $f(a+)$.

Spunem că f are limita laterală ℓ la stânga în punctul $x = a$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (a - \delta, a)$ avem $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Vom nota aceasta prin $\lim_{x \nearrow a} f(x) = \ell$. Limita ℓ se notează $f(a-)$.

Limita unei funcţii într-un punct există, dacă există limitele laterale şi ele sunt egale. Limita unei funcţii într-un punct nu există, dacă cel puţin una din limitele laterale nu există sau ambele există, dar ele nu sunt egale.

Exemplu 5.11. Funcţia $f_3 : \mathbb{R} \setminus \{ 2 \} \to \mathbb{R}$ definită prin $f_3(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ are limita $+\infty$ în $x = 2$, pentru că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ cu proprietatea că pentru orice x care verifică relaţia $0 < |x - 2| < \delta$ avem

$$f_3(x) = \frac{1}{|x - 2|^2} > \frac{1}{\delta^2} = \varepsilon.$$

Exemplu 5.12. Funcţia $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f_4(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

nu are limită în $x = 0$, pentru că limitele laterale $f_4(0-) = -1$ şi $f_4(0+) = 1$ nu sunt egale.

5.2 Funcţii continue

Definiţie 5.13. Fie $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Funcţia f este ***continuă în punctul*** $a \in A$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$, astfel încât dacă $x \in A$ şi $|x - a| < \delta$, atunci $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Vom spune că f este continuă pe A dacă f este continuă în fiecare punct al mulţimii A.

Observaţie 5.14. În definiţia continuităţii nu intervine faptul că $a \in A$ este punct de acumulare. Dacă a este punct izolat al mulţimii A, atunci există un $\delta > 0$ astfel încât $A \cap (a - \delta, a + \delta) = \{ a \}$. Pentru $x = a$ condiţia $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ este verificată pentru orice $\varepsilon > 0$. Deci, f este continuă în a.

Dacă a este punct de acumulare al mulţimii A atunci funcţia f este continuă în a dacă şi numai dacă ea are limită în acest punct şi limita este egală cu $f(a)$.

Observaţie 5.15. Proprietatea de continuitate a funcţiei f în punctul a se rescrie

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \quad \text{sau} \quad \lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a).$$

Teoremă 5.16 (Criteriul secvenţial)**.** Fie funcţia $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Funcţia f este ***continuă în punctul*** $a \in A$ dacă şi numai dacă pentru orice şir (x_n) convergent la a, şirul $(f(x_n))$ converge la $f(a)$.

Observaţie 5.17. Proprietatea de continuitate se poate scrie în felul următor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Observaţie 5.18. În cazul $X = Y = \mathbb{R}$, o funcţie poate fi discontinuă din trei motive: 1) limitele laterale există dar nu sunt egale cu valoarea funcţiei 2) cel puţin una din limitele laterale este infinită 3) cel puţin una din limitele laterale nu există.

5.3 Funcţii vectoriale

Fie spaţiile euclidiene $\mathbb{R}^n$ şi $\mathbb{R}^m$.

Definiţie 5.19. Funcţia $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se numeşte ***funcţie vectorială***.

Observaţie 5.20. Funcţia vectorială f are m componente, deci este de forma

$$f = (f_1, f_2, ..., f_m) \text{ unde } \ f_1, f_2, \dots, f_m : A \to \mathbb{R}.$$

Dacă $m = n = 1$, atunci $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este funcţie reală de o variabilă reală.
Dacă $m = 1$, atunci $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este funcţie (scalară) de n variabile reale.
Dacă $n = 1$ şi $m = 2$ (sau $m = 3$) iar funcţiile componente sunt continue atunci f este o curbă în plan (sau spaţiu) în forma parametrică.
Dacă $n = 2$ şi $m = 3$ atunci f este o suprafaţă în formă parametrică.

Observaţie 5.21. Fie $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ un punct de acumulare al mulţimii $A \subset \mathbb{R}^n$ şi fie $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Pentru că în spaţiul euclidian $\mathbb{R}^m$ convergenţa are loc pe componente, funcţia $f = (f_1, \dots, f_m) : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ are limita y în punctul a dacă şi numai dacă fiecare din componentele f_k are limita y_k în punctul a.

Exemplu 5.22. Fie $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ unde

$$f_1(x,y) = 2 + x + y^3 e^{x-y}, \quad f_2(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \quad \text{şi} \quad f_3(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Să vedem dacă funcţia f are limită în punctul $(0,0)$.

Pe baza observaţiei anterioare, trebuie ca şi f_1, f_2 şi f_3 să aibă limită în $(0,0)$. Pentru prima funcţie avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2 + x + y^3 e^{x-y} = 2.$$

pentru cea de-a doua

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

Însă a treia funcţie nu are limită în origine pentru că pentru şirurile $(0, \frac{1}{n})$ şi $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ convergente la $(0,0)$ avem

$$\lim_{n\to\infty} f_2\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} f_2\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$$

limite diferite.

Observaţie 5.23. Funcţia $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă în punctul $a \in A$ dacă şi numai dacă funcţiile f_k sunt continue în a.

Exemplu 5.24. Să se studieze continuitatea funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{cases} \left((x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0), & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Problema revine la studiul continuităţii funcţiilor

$$f_1(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$f_2(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Pentru că
$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq |x+y| \quad \text{şi} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| = 0$$
rezultă că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0 = f_1(0,0)$, ceea ce înseamnă că f_1 este continuă în origine. Cum f_1 este continuă şi în celelalte puncte, rezultă că f_1 este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

Din
$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3|+|y^3|}{x^2+y^2} = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2} + \frac{|y^3|}{y^2} = |x| + |y|$$
rezultă că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0 = f_2(0,0)$, ceea ce ne arată că f_2 este continuă în origine. Cum f_2 este continuă şi în celelalte puncte, rezultă că f_2 este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Pentru că cele două componente ale funcţiei f sunt continue, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}^2$.

5.4 Derivabilitatea funcţiilor reale de variabilă reală

Definiţie 5.25. Fie $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $a \in A$ un punct de acumulare al lui A. Spunem că f ***are derivată*** în a dacă funcţia $x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, $x \in A \setminus \{a\}$ are limită în a. Dacă limita este finită spunem că f este ***derivabilă*** în a. Dacă funcţia f este derivabilă în fiecare punct al mulţimii A vom spune că f este derivabilă pe A.

Notaţie 5.26. Limita $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, în cazul în care există, se notează $f'(a)$ sau $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ şi se numeşte ***derivata*** lui f în punctul a.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Observaţie 5.27. Definim, dacă există, derivatele laterale (la dreapta şi la stânga)

$$\lim_{x\searrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a+)\quad \text{şi}\quad \lim_{x\nearrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a-).$$

Dacă derivatele laterale ale unei funcţii există şi sunt egale, atunci funcţia este derivabilă.

Exemplu 5.28. Funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$ nu este derivabilă în $x=0$, pentru că

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=1\quad \text{şi}\quad \lim_{x\nearrow 0}\frac{|x|-|0|}{x-0}=-1.$$

Redăm mai jos derivatele funcţiilor elementare şi principalele proprietăţi ale funcţiilor derivabile.

$$c'=0 \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x} \qquad (\sin x)'=\cos x \qquad (\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$x'=1 \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a} \qquad (\cos x)'=-\sin x \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(x^a)'=ax^{a-1} \qquad (e^x)'=e^x \qquad (\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (a^x)'=a^x\cdot\ln a$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$(cf)'=c\cdot f' \qquad (f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

$$(f\pm g)'=f'\pm g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g))'=f'(g)\cdot g' \qquad (f^g)'=f^g\cdot\left(g'\ln f+g\frac{f'}{f}\right).$$

Exemplu 5.29. Să se calculeze derivata funcţiei $f(x)=x^2\cdot\ln(4x^3+1)$.

Pentru derivare, se aplică întotdeauna formulele pentru derivare în ordine inversă a efectuării operaţiilor. Să revedem mai întâi ordinea operaţiilor. Întâi se ridică x la pătrat, apoi se calculează x^3, apoi $4x^3$, apoi $4x^3+1$, apoi logaritmul natural din $4x^3+1$, iar în final se efectuează produsul dintre x^2 şi $\ln(4x^3+1)$. Ultima operaţie efectuată este înmulţirea a două expresii. Aplicăm formula produsului $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$. Obţinem

$$f'(x)=\left(x^2\right)'\cdot\ln(4x^3+1)+x^2\cdot\left(\ln(4x^3+1)\right)'.$$

Acum, pentru fiecare din derivatele rămase se aplică aceeaşi regulă. Avem $\left(x^2\right)'=2x$ pe baza formulei de derivare a funcţiei putere ($(x^a)'=ax^{a-1}$). Pentru logaritm aplicăm formula pentru funcţii compuse $(f(g))'=f'(g)\cdot g'$. Va rezulta

$$\left(\ln(4x^3+1)\right)'=\frac{1}{4x^3+1}\cdot\left(4x^3+1\right)'.$$

Mai departe, $\left(4x^3+1\right)'=\left(4x^3\right)'+(1)'=4\left(x^3\right)'+0=4\cdot 3x^2=12x^2$. În final putem scrie derivata funcţiei f

$$f'(x)=2x\ln(4x^3+1)+\frac{12x^4}{4x^3+1}.$$

Teoremă 5.30. O funcţie derivabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Observaţie 5.31. Pentru o funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe A putem considera funcţia $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f'(x)$ numită ***derivata funcţiei*** f.

Definiţie 5.32. Se numeşte ***derivata a doua*** a funcţiei f derivata funcţiei derivate f'. Recursiv, se numeşte ***derivată de ordinul*** n a funcţiei f derivata funcţiei derivate de ordinul $n-1$, $n \geq 2$.

Notaţie 5.33. Derivata de ordinul n a unei funcţii f într-un punct a se notează $f^{(n)}(a)$ sau $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$.

Exemplu 5.34. Să se calculeze $f^{(n)}(0)$ pentru funcţia $f(x) = \dfrac{1}{(ax+b)^p}$.

Derivata întâi este

$$f'(x) = \frac{-pa}{(ax+b)^{p+1}}.$$

Derivata a doua este

$$f''(x) = \frac{p(p+1)a^2}{(ax+b)^{p+2}}.$$

Prin inducţie, rezultă

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n p(p+1)\cdots(p+n-1)a^n}{(ax+b)^{p+n}}.$$

Atunci $f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^n p(p+1)\cdots(p+n-1)a^n}{b^{p+n}}$.

Teoremă 5.35. Are loc formula lui Leibniz

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}.$$