Curs 6

Derivate

6.1 Derivate parţiale

Definiţie 6.1. Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi fie $a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ un punct de acumulare al mulţimii A. Dacă limita

$$\lim_{t \to a_k} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, t, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{t - a_k}$$

există şi este finită, spunem că f este derivabilă în punctul a în raport cu variabila x_k. Această limită se numeşte ***derivată parţială*** în raport cu x_k.

Notaţie 6.2. Derivata parţială în raport cu x_k se notează $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ sau $f'_{x_k}(a)$.

Observaţie 6.3. Dacă notăm $g(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n)$ atunci f este derivabilă parţial în raport cu variabila x_k dacă funcţia g este derivabilă şi $f'_{x_k}(a) = g'(a_k)$. Pentru a deriva parţial în raport cu x_k o funcţie de mai multe variabile, se derivează ca şi cum doar x_k variază, iar toate celelalte variabile sunt constante.

Exemplu 6.4. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^3 x$. Derivatele parţiale ale lui f sunt

$$f'_x(x, y) = 2x - y^3 \quad \text{şi} \quad f'_y(x, y) = -3y^2 x.$$

Exemplu 6.5. Să calculăm derivatele parţiale ale funcţiei f în origine

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Avem, pe baza definiţiei

$$f'_x(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t - 0} = 0$$
$$f'_y(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t - 0} = 0.$$

Funcţia f are derivate parţiale în origine, deşi ea nu are limită în origine.

Definiţie 6.6. Fie $f = (f_1, \ldots, f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ şi fie $a \in A$ un punct de acumulare al mulţimii A. Dacă fiecare funcţie f_k este derivabilă parţial, spunem că f este derivabilă parţial în a. Atunci putem forma matricea

$$J(f)(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

Această matrice se numeşte ***matricea lui Jacobi***. Dacă $m = n$, determinantul acestei matrice se numeşte ***Jacobianul*** lui f, sau ***determinantul funcţional*** al funcţiilor $f_1, \ldots, f_n$ şi se notează

$$J = \det J(f)(a) = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Dacă $m = 1$, atunci matricea lui Jacobi se numeşte ***gradientul*** lui f şi se notează

$$\operatorname{grad} f = \nabla f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

6.2 Derivate parţiale de ordin superior

Dacă $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie derivabilă parţial în raport cu variabila x_k, atunci se pune problema derivării parţiale a funcţiei $x \longmapsto f'_{x_k}(x)$ în raport cu variabila x_i. Dacă există derivata parţială în raport cu x_i a derivatei parţiale în raport cu x_k într-un punct a vom scrie

$$f''_{x_k x_i}(a) = \left(f'_{x_k}\right)'_{x_i}(a)$$

sau

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(a)$$

şi o vom numi derivată parţială de ordinul al doilea. În general, prin

$$f^{(k_1+k_2+\cdots+k_n)}_{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}} = \frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n} f}{\partial x_n^{k_n} \ldots \partial x_1^{k_1}}$$

se înţelege că f se derivează de k_1 ori în raport cu x_1, apoi de k_2 ori în raport cu x_2 şi aşa mai departe, până când derivăm de k_n ori în raport cu x_n, iar derivările se fac în această ordine.

Exemplu 6.7. Să se calculeze f'''_{zx^2} pentru $f(x, y, z) = x^3 z^3 - 2yz^2 + 6xy^2$.

Mai întâi derivăm pe f în raport cu z, iar apoi de două ori în raport cu x:

$$f'_z = 3x^3 z^2 - 4yz, \quad f''_{zx} = \left(3x^3 z^2 - 4yz\right)'_x = 9x^2 z^2 \quad f'''_{zx^2} = \left(9x^2 z^2\right)'_x = 18xz^2.$$

Definiţie 6.8. Spunem că $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este ce clasă C^p pe A şi scriem $f \in C^p(A)$, dacă f are toate derivatele parţiale de ordin $k \le p$ continue pe A.

Teoremă 6.9 (Schwarz)**.** Dacă $f \in C^p(A)$ atunci derivatele parţiale de ordin $k \le p$ nu depind de ordinea de derivare.

6.3 Derivarea funcţiilor compuse

Teoremă 6.10. Fie $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ şi $g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ şi $a \in A$ un punct de acumulare a lui A. Presupunem că g este derivabilă parţial în a, iar f este derivabilă parţial în $g(a)$, iar derivatele parţiale ale lui f sunt continue în $g(a)$. Atunci $f \circ g : A \to \mathbb{R}^m$ este derivabilă parţial în a şi

$$J(f \circ g)(a) = J(f)(g(a)) \cdot J(g)(a).$$

Observaţie 6.11. Dacă $m = 1 = n$ şi $p = 2$ atunci

$$(f(u(x), v(x)))' = f'_u(u(x), v(x)) \cdot u'(x) + f'_v(u(x), v(x)) \cdot v'(x).$$

Dacă $m = 1$, $n = 2$ şi $p = 1$, atunci

$$\begin{aligned}(f(u(x, y)))'_x &= f'(u(x, y)) \cdot u'_x(x, y).\\ (f(u(x, y)))'_y &= f'(u(x, y)) \cdot u'_y(x, y).\end{aligned}$$

Dacă $m = 1$, $n = 2$, $p = 2$ atunci

$$\begin{aligned}(f(u(x, y), v(x, y)))'_x &= f'_u(u(x, y), v(x, y)) \cdot u'_x(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \cdot v'_x(x, y).\\ (f(u(x, y), v(x, y)))'_y &= f'_u(u(x, y), v(x, y)) \cdot u'_y(x, y) + f'_v(u(x, y), v(x, y)) \cdot v'_y(x, y).\end{aligned}$$

Aceste formule se scriu mai scurt (pentru memorare)

$$\begin{aligned}(f(u, v))'_x &= f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x.\\ (f(u, v))'_y &= f'_u \cdot u'_y + f'_v \cdot v'_y.\end{aligned}$$

Exemplu 6.12. Fie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x, y) = f(x^2 - y^3, xy^2)$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei g, ştiind că $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Notăm $u = x^2 - y^3$ şi $v = xy^2$ şi aplicăm formula pentru derivarea funcţiilor compuse.

$$\begin{aligned}g'_x &= (f(u, v))'_x = f'_u \cdot 2x + f'_v \cdot y^2\\ g'_y &= (f(u, v))'_y = f'_u \cdot (-3y^2) + f'_v \cdot 2xy.\end{aligned}$$

Pentru a obţine derivatele de ordinul doi, derivăm încă o dată. Avem

$$g''_{x^2} = (g'_x)'_x = (f'_u)'_x \cdot 2x + f'_u \cdot (2x)'_x + (f'_v)'_x \cdot y^2$$

unde

$$\begin{aligned}(f'_u)'_x &= (f'_u(u, v))'_x = (f'_u)'_u \cdot 2x + (f'_u)'_v \cdot y^2 = f''_{u^2} \cdot 2x + f''_{uv} \cdot y^2\\ (f'_v)'_x &= (f'_v)'_u \cdot 2x + (f'_v)'_v \cdot y^2 = f''_{vu} \cdot 2x + f''_{v^2} \cdot y^2.\end{aligned}$$

Ţinând cont că $f''_{uv} = f''_{vu}$ obţinem

$$\begin{aligned}g''_{x^2} &= \left(f''_{u^2} \cdot 2x + f''_{uv} \cdot y^2\right) \cdot 2x + f'_u \cdot 2 + \left(f''_{vu} \cdot 2x + f''_{v^2} \cdot y^2\right) \cdot y^2\\ &= f''_{u^2} \cdot 4x^2 + f''_{uv} \cdot 4xy^2 + f''_{v^2} \cdot y^4 + f'_u \cdot 2.\end{aligned}$$

La fel

$$\begin{aligned} g''_{xy} &= (g'_x)'_y = (f'_u)'_y \cdot 2x + (f'_v)'_y \cdot y^2 + f'_v \cdot 2y \\ &= \left[f''_{u^2} \cdot (-3y^2) + f''_{uv} \cdot 2xy\right] \cdot 2x + \left[f''_{vu} \cdot (-3y^2) + f''_{v^2} \cdot 2xy\right] \cdot y^2 + f'_v \cdot 2y \\ &= f''_{u^2} \cdot (-6xy^2) + f''_{uv} \cdot (4x^2y - 3y^4) + f''_{v^2} \cdot 2xy^3 + f'_v \cdot 2y. \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} g''_{y^2} &= \left(g'_y\right)'_y = (f'_u)'_y \cdot (-3y^2) + f'_u \cdot (-6y) + (f'_v)'_y \cdot 2xy + f'_v \cdot 2x \\ &= \left[f''_{u^2} \cdot (-3y^2) + f''_{uv} \cdot 2xy\right] \cdot (-3y^2) + f'_u \cdot (-6y) + \left[f''_{vu} \cdot (-3y^2) + f''_{v^2} \cdot 2xy\right] \cdot 2xy + f'_v \cdot 2x \\ &= f''_{u^2} \cdot 9y^4 + f''_{uv} \cdot (-12xy^3) + f''_{v^2} \cdot 4x^2y^2 + f'_u \cdot (-6y) + f'_v \cdot 2y. \end{aligned}$$

6.4 Vectori şi operaţii cu vectori

6.4.1 Scalari şi vectori

Definiţie 6.13. Un număr real $\lambda \in \mathbb{R}$ se va numi ***scalar***. O pereche de numere reale $(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ se va numi ***vector plan*** şi un triplet de numere reale $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ se va numi ***vector din spaţiu*** sau simplu ***vector***.

Observaţie 6.14. Noţiunile de scalar şi vector se pot defini mult mai general: un scalar este orice element al unui corp, care este un triplet $(K, +, *)$, unde K este o mulţime cu cel puţin două elemente, iar $+$ şi $*$ sunt două operaţii care verifică următoarele trei axiome: 1. $(K, +)$ este grup comutativ cu elementul neutru notat 0; 2. $(K \setminus \{0\}, *)$ este grup cu elementul neutru notat 1; 3. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare, adică pentru orice elemente $\lambda, \mu, \nu \in K$ au loc relaţiile: $\lambda * (\mu + \nu) = \lambda * \mu + \lambda * \nu$ şi $(\mu + \nu) * \lambda = \mu * \lambda + \nu * \lambda$.

Un vector este un element al unui spaţiu vectorial V peste un corp K. Un spaţiu vectorial este structura algebrică formată dintr-o mulţime nevidă V împreună cu două operaţii, adunare vectorială şi înmulţire cu scalar, care verifică axiomele: 1. V cu adunarea vectorială formează un grup comutativ; 2. înmulţirea cu scalar verifică următoarele patru proprietăţi, pentru orice $a, b \in V$ şi orice $\lambda, \mu \in K$:

$$1.\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad 2.\ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \quad 3.\ \lambda(\mu a) = (\lambda * \mu)a \quad 4.\ 1a = a.$$

Notaţie 6.15. În spaţiul vectorial $\mathbb{R}^3$, notăm $\vec{\imath} = (1, 0, 0)$, $\vec{\jmath} = (0, 1, 0)$ şi $\vec{\kappa} = (0, 0, 1)$. Orice vector $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ se poate scrie $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$. Numerele a_1, a_2 şi a_3 se numesc componentele sau coordonatele vectorului $\vec{a}$. Doi vectori sunt egali dacă şi numai dacă au aceleaşi coordonate.

Observaţie 6.16. Orice vector $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ poate fi privit şi ca o săgeată (segment orientat) care are originea în punctul $O(0, 0, 0)$ şi extremitatea (vârful săgeţii) în punctul $A(a_1, a_2, a_3)$. De fapt, orice segment orientat $\overrightarrow{BC}$ care are ca suport dreapta BC paralelă cu OA, care are acelaşi sens şi aceeaşi lungime ca şi segmentul $\overrightarrow{OA}$, reprezintă acelaşi vector, adică $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA}$. În acest fel, un vector reprezintă o clasă de echivalenţă. În acest curs, alegem ca reprezentant al clasei vectorul de poziţie, adică vectorul care are ca origine punctul $O(0, 0, 0)$.

6.4.2 Lungimea unui vector

Definiţie 6.17. Lungimea unui vector $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ este numărul real nenegativ

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Observaţie 6.18. Lungimea unui vector reprezintă lungimea săgeţii asociată vectorului.

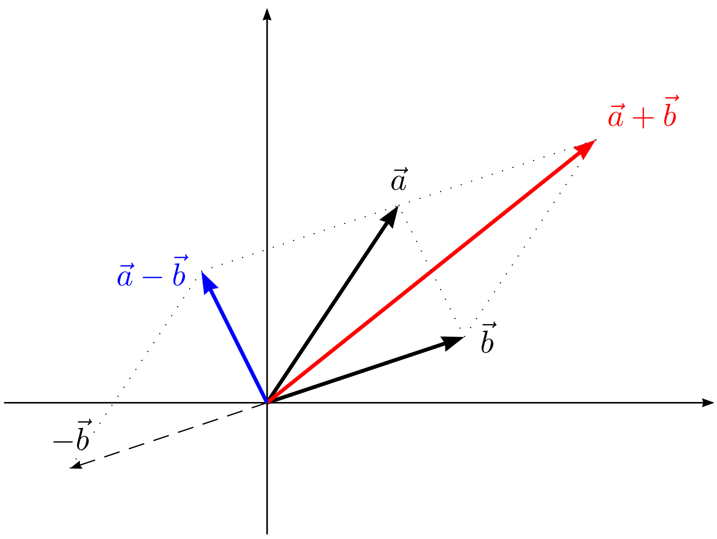
6.4.3 Adunarea vectorilor

Definiţie 6.19. Suma a doi vectori $\vec{a} = a_1\vec{\imath}+a_2\vec{\jmath}+a_3\vec{\kappa}$ şi $\vec{b} = b_1\vec{\imath}+b_2\vec{\jmath}+b_3\vec{\kappa}$ este vectorul

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{\imath} + (a_2 + b_2)\vec{\jmath} + (a_3 + b_3)\vec{\kappa}.$$

Observaţie 6.20. Adunarea vectorilor se face pe componente şi are proprietăţile de asociativitate, comutativitate, element neutru (notat $\vec{0} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{\kappa}$ sau simplu 0)şi element simetrizabil (numit opus şi notat $-\vec{a}$).

Observaţie 6.21. Se spune că doi vectori se adună cu regula paralelogramului. Întradevăr, dacă vom considera cele două săgeţi asociate vectorilor şi construim un paralelogram cu ajutorul lor, atunci suma celor doi vectori va fi diagonala paralelogramului ce pleacă din originea comună a vectorilor.



Suma a trei vectori se adună cu regula paralelipipedului. Diagonala paralelipipedului construit cu cei trei vectori care pleacă din originea comună reprezintă suma celor trei vectori.

Observaţie 6.22. Să observăm că lungimea sumei a doi vectori este mai mică sau egală decât suma lungimilor celor doi vectori. Această inegalitate

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|,$$

poartă denumirea de inegalitatea triunghiului. Motivul este justificat de faptul că suma a două laturi într-un triunghi este mai mare decât cea de-a treia latură.

Observaţie 6.23. Scăderea a doi vectori revine la adunarea unui vector cu opusul celuilalt:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Lungimea vectorului diferenţă $\vec{a} - \vec{b}$ coincide cu lungimea celeilalte diagonale din paralelogramul folosit la adunarea vectorilor.

6.4.4 Înmulţirea cu scalari

Definiţie 6.24. Vectorul $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ înmulţit cu scalarul $\lambda \in \mathbb{R}$ este vectorul

$$\lambda\vec{a} = (\lambda a_1)\vec{\imath} + (\lambda a_2)\vec{\jmath} + (\lambda a_3)\vec{\kappa}.$$

Observaţie 6.25. Dacă $\lambda > 0$ atunci vectorul $\lambda\vec{a}$ are săgeata pe aceeaşi direcţie şi cu acelaşi sens ca şi săgeata vectorului $\vec{a}$, dar lungimea $|\lambda\vec{a}| = \lambda\,|\vec{a}|$. Dacă $\lambda < 0$ atunci vectorul $\lambda\vec{a}$ are aceeaşi direcţie ca şi săgeata vectorului $\vec{a}$, dar sens opus, iar lungimea este $|\lambda\vec{a}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$.

Pentru un vector nenul $\vec{a}$, vectorul $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ se numeşte ***versorul*** lui $\vec{a}$. Versorul unui vector este acel vector înmulţit cu scalarul ce reprezintă inversul lungimii vectorului. Lungimea unui versor este 1. Într-adevăr,

$$\left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right| = \frac{1}{|\vec{a}|}\,|\vec{a}| = 1.$$

Observaţie 6.26. Se poate uşor verifica faptul că înmulţirea cu scalari are următoarele proprietăţi:

$$1.\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} \quad 2.\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} \quad 3.\ \lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} \quad 4.\ 1\vec{a} = \vec{a}.$$

Definiţie 6.27. Doi vectori $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ se numesc ***liniar dependenţi*** sau ***coliniari*** dacă există un scalar $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\vec{a} = \lambda\vec{b}.$$

6.4.5 Produsul scalar

Definiţie 6.28. Produsul scalar a doi vectori $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ şi $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{\kappa}$ este scalarul

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Observaţie 6.29. Produsul scalar are următoarele proprietăţi:

$$\begin{array}{lll} 1.\ \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b} & 2.\ \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} & 3.\ \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) \\ 4.\ \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \quad \text{şi} \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \text{ dacă şi numai dacă } \vec{a} = \vec{0}. & & \end{array}$$

Observaţie 6.30. Produsul scalar se poate defini independent de sistemul de coordonate cartezian. Oricare din relaţiile

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\left(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2\right) = \frac{1}{2}\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2\right)$$

permit definirea produsului scalar folosind doar lungimea vectorilor. În acelaşi timp, aceste relaţii permit calcularea lungimii vectorilor sumă şi diferenţă:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$
$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a} \cdot \vec{b})}.$$

Din acestea se obţine identitatea paralelogramului

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2\left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2\right).$$

Observaţie 6.31. Relaţia
$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$
permite definirea lungimii unui vector folosind produsul scalar. Plecând de la inegalităţile
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}+\vec{b}|^2 \le \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = |\vec{a}-\vec{b}|^2 \le \left(|\vec{a}| + |\vec{b}|\right)^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\,|\vec{a}|\,|\vec{b}|$$
rezultă inegalitatea
$$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right| \le |\vec{a}|\,|\vec{b}|,$$
care se numeşte inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz. Egalitatea are loc dacă şi numai dacă cei doi vectori sunt coliniari. Pentru vectori nenuli aceasta ne arată că numărul $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$ aparţine intervalului $[-1,1]$, adică există un $\alpha \in [0,\pi]$ astfel încât
$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \cos\alpha.$$
Numărul α reprezintă unghiul dintre cei doi vectori, unghiul dintre cele două săgeţi. Are loc formula
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$
Doi vectori se numesc ***ortogonali*** dacă produsul lor scalar este zero. Pentru doi vectori ortogonali are loc teorema lui Pitagora
$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2.$$

Observaţie 6.32. Proiecţia unui vector $\vec{a}$ pe o axă d având direcţia vectorului $\vec{d}$ se calculează prin
$$\mathrm{proj}_d(\vec{a}) = |\vec{a}|\cos(\vec{a},\vec{d}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|} = \vec{a}\cdot\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|},$$
adică produsul scalar dintre $\vec{a}$ şi versorul lui $\vec{d}$. Proprietăţile proiecţiei se deduc din proprietăţile produsului scalar. În particular, proiecţiile vectorului $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ pe axele OX, OY şi OZ reprezintă coordonatele lui $\vec{a}$ şi se calculează prin
$$\mathrm{proj}_{OX}(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\imath} = a_1, \qquad \mathrm{proj}_{OY}(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\jmath} = a_2, \qquad \mathrm{proj}_{OZ}(\vec{a}) = \vec{a}\cdot\vec{\kappa} = a_3.$$
Atunci are loc descompunerea
$$\vec{a} = \mathrm{proj}_{OX}(\vec{a})\vec{\imath} + \mathrm{proj}_{OY}(\vec{a})\vec{\jmath} + \mathrm{proj}_{OZ}(\vec{a})\vec{\kappa} = (\vec{a}\cdot\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{a}\cdot\vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{a}\cdot\vec{\kappa})\vec{\kappa}.$$

6.4.6 Produsul vectorial

Definiţie 6.33. Produsul vectorial a doi vectori $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ şi $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{\kappa}$ este vectorul
$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{\kappa}.$$

Observaţie 6.34. O modalitate de a ţine minte expresia analitică a produsului vectorial este dezvoltarea următorului determinant formal după prima linie
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Observaţie 6.35. Produsul vectorial are următoarele proprietăţi:

1. $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ 2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ 3. $\vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

4. $\vec{a} \times \vec{a} = 0$ şi $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ dacă şi numai dacă vectorii sunt coliniari

Observaţie 6.36. Făcând produl scalar $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$, observăm că este zero. De asemenea, $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$. Acest lucru ne arată că vectorul $\vec{a} \times \vec{b}$ este ortogonal pe $\vec{a}$ şi pe $\vec{b}$, deci pe planul format de cei doi vectori. Dacă direcţia vectorului produs vectorial a fost stabilită, ne rămâne de precizat sensul pe această dreaptă. Din cazul particular $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{\kappa}$, deducem că sensul este dat de regula burghiului sau regula mâinii drepte: dacă rotim burghiul sau mâna dreaptă în aşa fel încât primul vector se suprapune peste al doilea printr-un unghi minim, atunci sensul de înaintare al burghiului sau sensul indicat de degetul mare este sensul produsului vectorial.

Observaţie 6.37. Plecând de la identitatea lui Lagrange

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

obţinem lungimea vectorului produs vectorial

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2\cos^2(\vec{a}, \vec{b})} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\vec{a}, \vec{b}).$$

Lungimea produsului vectorial reprezintă aria paralelogramului construit cu cei doi vectori. De aici deducem că aria triunghiului format de doi vectori $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ este

$$Aria(\Delta ABC) = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

6.4.7 Produsul mixt

Definiţie 6.38. Se numeşte produs mixt al trei vectori $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$, $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{\kappa}$ şi $\vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{\kappa}$, scalarul

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Observaţie 6.39. Din proprietăţile determinanţilor deducem că dacă se permută circular vectorii, valoarea produsului mixt nu se schimbă:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

Observaţie 6.40. Să observăm că produsul mixt este zero

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = 0$$

dacă şi numai dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$ şi $\vec{c}$ sunt coplanari. Dacă în schimb, vectorii sunt necoplanari, atunci numărul

$$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

reprezintă volumul paralelipipedului construit cu cei trei vectori. Folosind această interpretare, putem calcula distanţa de la un punct D la planul determinat de vectorii necoliniari $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$ cu formula

$$dist(D, ABC) = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}.$$

6.4.8 Dublul produs vectorial

Definiţie 6.41. Se numeşte dublu produs vectorial al vectorilor $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$, $\vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{\kappa}$ şi $\vec{c} = c_1\vec{\imath} + c_2\vec{\jmath} + c_3\vec{\kappa}$, vectorul $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Observaţie 6.42. Are loc formula

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{a} \cdot \vec{c} \end{vmatrix}.$$

6.5 Câmp scalar şi câmp vectorial

Definiţie 6.43. Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Se numeşte ***câmp scalar*** o funcţie $f : U \to \mathbb{R}$ ce asociază unui punct un scalar.

Definiţie 6.44. Se numeşte suprafaţă de nivel asociată câmpului scalar f, mulţimea punctelor pentru care f ia aceeaşi valoare. Pentru un punct dat $M_0 \in U$ suprafaţa de nivel asociată punctului M_0 este

$$\{\, M \in U \mid f(M) = f(M_0) \,\}.$$

Observaţie 6.45. Prin fiecare punct al mulţimii U trece o singură suprafaţă de nivel. Două suprafeţe de nivel nu au nici un punct comun.

Exemplu 6.46. Câmpul scalar al temperaturilor este funcţia care asociază fiecărui punct temperatura măsurată în acel punct. Suprafeţele de nivel ale câmpului temperaturilor se numesc izoterme.

Câmpul scalar $f : U \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, asociază fiecărui punct distanţa până la origine. Suprafeţele de nivel sunt sferele $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$.

Definiţie 6.47. Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Se numeşte ***câmp vectorial*** o funcţie $\vec{v} : U \to \mathbb{R}^3$ ce asociază unui punct un vector.

Când vrem să punem în evidenţă componentele vectorului $\vec{v}$, scriem

$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{\kappa}.$$

Definiţie 6.48. Se numeşte linie de câmp a câmpului vectorial $\vec{v}$ o curbă ce are proprietatea că în fiecare punct M al ei, vectorul $\vec{v}(M)$ este tangent la curbă.

Observaţie 6.49. Prin fiecare punct al mulţimii U trece o singură linie de câmp. Două linii de câmp nu au puncte comune.

Pentru a determina liniile de câmp, fie $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ vectorul de poziţie al unui punct de pe curbă şi $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{\imath} + \mathrm{d}y\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\vec{\kappa}$ diferenţiala lui. Din definiţia liniilor de câmp, vectorii $\vec{v}$ şi $\mathrm{d}\vec{r}$ sunt coliniari, adică

$$\frac{\mathrm{d}x}{P} = \frac{\mathrm{d}y}{Q} = \frac{\mathrm{d}z}{R}.$$

Integrând acest sistem simetric se obţin liniile de câmp.

6.6 Gradientul unui câmp scalar

Definiţie 6.50. Fie $U \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi $f : U \to \mathbb{R}$ un câmp scalar de clasă $C^1(U)$. Gradientul câmpului scalar f în punctul M este vectorul

$$\operatorname{grad} f(M) = f'_x(M)\vec{\imath} + f'_y(M)\vec{\jmath} + f'_z(M)\vec{\kappa}.$$

Câmpul $\operatorname{grad} f : U \to \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\vec{\imath} + f'_y(x, y, z)\vec{\jmath} + f'_z(x, y, z)\vec{\kappa}$$

se numeşte câmp de gradienţi ataşat câmpului scalar f.

Observaţie 6.51. Vectorul $\operatorname{grad} f(M_0)$ este ortogonal pe suprafaţa de nivel asociată câmpului scalar f şi punctului M_0. Versorul normalei la suprafaţa de nivel $f(M) = f(M_0)$ în punctul M_0 este

$$\vec{n} = \pm \frac{\operatorname{grad} f(M_0)}{|\operatorname{grad} f(M_0)|}.$$

Definiţie 6.52. Se numeşte ***derivata câmpului*** f ***după direcţia*** $\vec{s}$, produsul scalar dintre gradientul lui f şi versorul $\vec{s}$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{s}.$$

Observaţie 6.53. Dacă $\vec{s}$ nu este versor, atunci formula pentru derivata câmpului f după direcţia acestui vector este

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}.$$

Să observăm că derivata după direcţiile $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ şi $\vec{\kappa}$ sunt derivatele parţiale al funcţiei f:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{\imath}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{\imath} = f'_x, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{\jmath}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{\imath} = f'_y, \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{\kappa}} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{\imath} = f'_z.$$

Să mai observăm că pentru un versor $\vec{s}$, derivata după direcţie are valoare maximă dacă $\vec{s}$ are direcţia şi sensul gradientului şi valoare minimă dacă are direcţia gradientului dar sens invers.

Observaţie 6.54. Gradientul are următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(\lambda f) &= \lambda \operatorname{grad} f\\
\operatorname{grad}(f + g) &= \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g\\
\operatorname{grad}(fg) &= g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\\
\operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}, \qquad g \neq 0\\
\operatorname{grad}(f \circ u) &= f'(u) \operatorname{grad} u.
\end{aligned}$$

Exemplu 6.55. Fie $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ vectorul de poziţie şi $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ lungimea vectorului de poziţie. Să calculăm gradientul lui r. Avem

$$\operatorname{grad} r = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\imath} + \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\jmath} + \frac{2z}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\vec{\kappa} = \frac{x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Exemplu 6.56. Fie $\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa}$ un vector constant. Atunci

$$\operatorname{grad}(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \operatorname{grad}(a_1 x + a_2 y + a_3 z) = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{\kappa} = \vec{a}.$$

6.7 Divergenţa unui câmp vectorial

Definiţie 6.57. Divergenţa unui câmp vectorial $\vec{v}(x,y,z) = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{\kappa}$ este câmpul scalar

$$\operatorname{div} \vec{v} = P'_x + Q'_y + R'_z.$$

Observaţie 6.58. Câmpul scalar divergenţă are următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda\vec{v}) &= \lambda \operatorname{div} \vec{v} \\ \operatorname{div}(\vec{v} + \vec{u}) &= \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{div} \vec{u} \\ \operatorname{div} \vec{a} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{r} &= 3. \end{aligned}$$

6.8 Rotorul unui câmp vectorial

Definiţie 6.59. Rotorul unui câmp vectorial $\vec{v}(x,y,z) = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{\kappa}$ este câmpul vectorial

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (R'_y - Q'_z)\vec{\imath} + (P'_z - R'_x)\vec{\jmath} + (Q'_x - P'_y)\vec{\kappa}.$$

Observaţie 6.60. Rotorul are următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\lambda\vec{v}) &= \lambda \operatorname{rot} \vec{v} \\ \operatorname{rot}(\vec{v} + \vec{u}) &= \operatorname{rot} \vec{v} + \operatorname{rot} \vec{u} \\ \operatorname{rot} \vec{a} &= \vec{0} \\ \operatorname{rot} \vec{r} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Exemplu 6.61. Să se calculeze $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r})$ şi $\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r})$.

Avem

$$\vec{a} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (a_2 z - a_3 y)\vec{\imath} + (a_3 x - a_1 z)\vec{\jmath} + (a_1 y - a_2 x)\vec{\kappa}.$$

Atunci

$$\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{r}) = 0$$

şi

$$\operatorname{rot}(\vec{a} \times \vec{r}) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_2 z - a_3 y & a_3 x - a_1 z & a_1 y - a_2 x \end{vmatrix} = 2a_1\vec{\imath} + 2a_2\vec{\jmath} + 2a_3\vec{\kappa} = 2\vec{a}.$$

6.9 Operatorul nabla

Gradientul, divergenţa şi rotorul sunt operatori diferenţiali de ordinul întâi. O tratare unitară se face cu ajutorul operatorului nabla

$$\nabla = \vec{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{\kappa}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f = \nabla f = &\text{ produsul vectorului } \nabla \text{ cu scalarul } f\\
\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = &\text{ produsul scalar dintre vectorul } \nabla \text{ şi vectorul } \vec{v}\\
\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = &\text{ produsul vectorial dintre vectorul } \nabla \text{ şi vectorul } \vec{v}.
\end{aligned}$$

Observaţie 6.62. ∇ este un operator liniar.

$$\begin{aligned}
\nabla(\lambda f + \mu g) &= \lambda \nabla f + \mu \nabla g\\
\nabla \cdot (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= \lambda \nabla \cdot \vec{u} + \mu \nabla \cdot \vec{v}\\
\nabla \times (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) &= \lambda \nabla \times \vec{u} + \mu \nabla \times \vec{v}.
\end{aligned}$$

Observaţie 6.63. Fie $\vec{s}$ un vector. Atunci cu ajutorul operatorului

$$\vec{s} \cdot \nabla = s_1 \frac{\partial}{\partial x} + s_2 \frac{\partial}{\partial y} + s_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

derivata după direcţia $\vec{s}$ a câmpului scalar f se calculează prin

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\vec{s}} = \vec{s} \cdot \operatorname{grad} f = s_1 \frac{\partial f}{\partial x} + s_2 \frac{\partial f}{\partial y} + s_3 \frac{\partial f}{\partial z} = (\vec{s} \cdot \nabla) f.$$

Derivata după direcţia $\vec{s}$ a câmpului vectorial $\vec{v}$ se calculează pe componente

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\vec{s}} &= \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}\vec{s}} \vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}\vec{s}} \vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}\vec{s}} \vec{\kappa}\\
&= \left(s_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + s_2 \frac{\partial v_1}{\partial y} + s_3 \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) \vec{\imath} + \left(s_1 \frac{\partial v_2}{\partial x} + s_2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + s_3 \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \vec{\jmath}\\
&\qquad + \left(s_1 \frac{\partial v_3}{\partial x} + s_2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + s_3 \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) \vec{\kappa}\\
&= s_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \vec{\imath} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \vec{\jmath} + \frac{\partial v_3}{\partial x} \vec{\kappa} \right) + s_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \vec{\imath} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \vec{\jmath} + \frac{\partial v_3}{\partial y} \vec{\kappa} \right)\\
&\qquad + s_3 \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} \vec{\imath} + \frac{\partial v_2}{\partial z} \vec{\jmath} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \vec{\kappa} \right)\\
&= s_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + s_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + s_3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (\vec{s} \cdot \nabla) \vec{v}.
\end{aligned}$$

Observaţie 6.64. În continuare vom aplica operatorul ∇ asupra unui produs. Pentru că este un operator de derivare, în urma aplicării lui asupra unui produs de doi factori, rezultă o sumă de doi termeni, în care ∇ acţionează doar asupra unuia din factori. Vom indica acest factor printr-o săgeată. Operatorul ∇ acţionează doar asupra elementelor aflate la dreapra sa, de aceea termenii asupra cărora nu acţionează vor fi trecuţi în faţa lui. Pentru că ∇ este şi un vector, se vor respecta toate proprietăţile vectorilor.

Avem

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(fg) &= \nabla(fg) = \nabla(\overset{\downarrow}{f}\, g) + \nabla(f\, \overset{\downarrow}{g}) = g \nabla f + f \nabla g = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\\
\operatorname{div}(f\vec{v}) &= \nabla \cdot (f\vec{v}) = \nabla \cdot (\overset{\downarrow}{f}\, \vec{v}) + \nabla \cdot (f\, \overset{\downarrow}{\vec{v}}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \nabla \cdot \vec{v} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v}\\
\operatorname{rot}(f\vec{v}) &= \nabla \times (f\vec{v}) = \nabla \times (\overset{\downarrow}{f}\, \vec{v}) + \nabla \times (f\, \overset{\downarrow}{\vec{v}}) = \nabla f \times \vec{v} + f \nabla \times \vec{v} = \operatorname{grad} f \times \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v}.
\end{aligned}$$

Folosind proprietăţile produsului mixt

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\vec{u}\times\vec{v}) &= \nabla\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \nabla\cdot(\overset{\downarrow}{\vec{u}}\times\vec{v}) + \nabla\cdot(\vec{u}\times\overset{\downarrow}{\vec{v}}) = \vec{v}\cdot(\nabla\times\vec{u}) - \nabla\cdot(\vec{v}\times\vec{u})\\ &= \vec{v}\cdot(\nabla\times\vec{u}) - \vec{u}\cdot(\nabla\times\vec{v}) = \vec{v}\cdot\operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u}\cdot\operatorname{rot}\vec{v}.\end{aligned}$$

Folosind proprietăţile dublului produs vectorial

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{u}\times\vec{v}) &= \nabla\times(\vec{u}\times\vec{v}) = \nabla\times(\overset{\downarrow}{\vec{u}}\times\vec{v}) + \nabla\times(\vec{u}\times\overset{\downarrow}{\vec{v}})\\ &= \begin{vmatrix}\vec{u} & \vec{v}\\ \nabla\cdot\vec{u} & \vec{v}\cdot\nabla\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}\vec{u} & \vec{v}\\ \vec{u}\cdot\nabla & \nabla\cdot\vec{v}\end{vmatrix}\\ &= (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} - \vec{v}(\nabla\cdot\vec{u}) + \vec{u}(\nabla\cdot\vec{v}) - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v}\\ &= \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\vec{v}} - \vec{v}\operatorname{div}\vec{u} + \vec{u}\operatorname{div}\vec{v} - \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\vec{u}}.\end{aligned}$$

Folosind

$$\begin{aligned}\vec{v}\times(\nabla\times\vec{u}) &= \begin{vmatrix}\nabla & \vec{u}\\ \vec{v}\cdot\nabla & \vec{u}\cdot\vec{v}\end{vmatrix} = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{u}}\cdot\vec{v}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u}\\ \vec{u}\times(\nabla\times\vec{v}) &= \begin{vmatrix}\nabla & \vec{v}\\ \vec{u}\cdot\nabla & \vec{v}\cdot\vec{u}\end{vmatrix} = \nabla(\overset{\downarrow}{\vec{v}}\cdot\vec{u}) - (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v}\end{aligned}$$

rezultă

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(\vec{u}\cdot\vec{v}) &= \vec{v}\times(\nabla\times\vec{u}) + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{u} + \vec{u}\times(\nabla\times\vec{v}) + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{v}\\ &= \vec{v}\times\operatorname{rot}\vec{u} + \vec{u}\times\operatorname{rot}\vec{v} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\vec{v}} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}\vec{u}}.\end{aligned}$$

Exemplu 6.65. Să se calculeze divergenţa şi rotorul câmpului $\vec{v} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Avem

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v} &= -\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\cdot\vec{r} - \frac{1}{r^3}\operatorname{div}\vec{r} = 3r^{-4}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r} - \frac{3}{r^3} = 0\\ \operatorname{rot}\vec{v} &= -\frac{1}{r^3}\operatorname{rot}\vec{r} - \operatorname{grad}\frac{1}{r^3}\times\vec{r} = 0 + 3r^{-4}\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{r} = 0.\end{aligned}$$

6.10 Aplicarea repetată a operatorului ∇

Fie f şi $\vec{v}$ câmpuri de clasă C^2. Atunci

1. $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla\cdot\nabla f = (\nabla\cdot\nabla)f = (\nabla^2)f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \Delta f.$

Operatorul $\Delta = \nabla^2$ aplicat unui scalar se numeşte operatorul lui Laplace. Acest operator se poate aplica şi unui câmp vectorial, pe componente. Formula se deduce din

2. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - (\nabla\cdot\nabla)\vec{v} = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\vec{v}) - \Delta\vec{v},$
3. $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla\times\nabla f = \vec{0},$
4. $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{v}) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{v}) = 0.$