Curs 7

Funcţii implicite

7.1 Funcţii implicite de o variabilă

Definiţie 7.1. Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ şi $F : A \times B \to \mathbb{R}$. Spunem că ecuaţia $F(x,y) = 0$ defineşte pe y ca funcţie implicită de x pe A, dacă pentru orice $x \in A$ ecuaţia $F(x,y) = 0$ are o singură soluţie în raport cu y, notată $f(x)$. Funcţia $f : A \to B$ verifică relaţia $F(x, f(x)) = 0$, pentru orice $x \in A$.

Exemplu 7.2. 1) Se dă funcţia $F : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x - e^y$. Ecuaţia $F(x,y) = 0$ defineşte implicit funcţia $f(x) = \ln x$.

2) Se dă funcţia $F : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Ecuaţia $F(x,y) = 0$ are o infinitate de soluţii în raport cu y:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & x \in [-1,a] \\ -\sqrt{1-x^2}, & x \in (a,1] \end{cases}, a \in (-1,1),$$

care nu sunt continue în punctul $x = a$.

3) Ecuaţia $x^2 + y^2 + 1 = 0$ nu poate defini implicit nici o funcţie pentru că nu are nici o soluţie.

Teorema următoare ne arată nişte condiţii pentru care o ecuaţie dată determină una dintre variabile ca funcţie de cealaltă.

Teoremă 7.3 (Teorema funcţiilor implicite)**.** Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D. Dacă există un punct $(x_0, y_0) \in D$ astfel încât $F(x_0, y_0) = 0$ şi $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, atunci există $a, b > 0$ astfel încât $U = (x_0 - a, x_0 + a)$ şi $V = (y_0 - b, y_0 + b)$ verifică $U \times V \subset D$ şi există în mod unic $f : U \to V$ astfel încât $f(x_0) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$ şi f este de clasă C^1, iar derivata se calculează prin

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Demonstraţie. Pentru că $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ există două cazuri: fie derivata are semn pozitiv, fie negativ. Presupunem că $F'_y(x_0, y_0) > 0$. Funcţia F fiind de clasă C^1 are derivata parţială în raport cu y o funcţie continuă. De aceea există $a_1, b_1 > 0$ astfel încât

$$F'_y(x,y) > 0, \text{ pentru orice } (x,y) \in [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \times [y_0 - b_1, y_0 + b_1].$$

Funcţia $g : [y_0 - b_1, y_0 + b_1] \to \mathbb{R}$ definită prin $g(t) = F(x_0, t)$ este crescătoare (deoarece derivata ei $g' = F'_y$ este pozitivă) şi se anulează în y_0 (deoarece $g(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$). Aşadar avem

$$F(x_0, y_0 - b_1) < 0 < F(x_0, y_0 + b_1).$$

Funcţia $h : [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \to \mathbb{R}$, $h(t) = F(t, y_0 - b_1)$ este continuă pe intervalul de definiţie şi pentru că $h(x_0) < 0$ rezultă că există $a_2 > 0$ astfel încât

$$F(x, y_0 - b_1) < 0, \text{ pentru orice } x \in [x_0 - a_2, x_0 + a_2].$$

Funcţia $i : [x_0 - a_1, x_0 + a_1] \to \mathbb{R}$, $i(t) = F(t, y_0 + b_1)$ este continuă pe intervalul de definiţie şi pentru că $h(x_0) > 0$ rezultă că există $a_3 > 0$ astfel încât

$$F(x, y_0 + b_1) > 0, \text{ pentru orice } x \in [x_0 - a_3, x_0 + a_3].$$

Luând

$$a = \min(a_1, a_2, a_3)$$

obţinem inegalităţile

$$F(x, y_0 - b_1) < 0 < F(x, y_0 + b_1), \text{ pentru orice } x \in [x_0 - a, x_0 + a].$$

Pentru orice punct $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ fixat, funcţia $F(x, \cdot)$ strict crescătoare, îşi schimbă semnul în intervalul $[y_0 - b_1, y_0 + b_1]$. Există, deci un unic punct $y \in [y_0 - b_1, y_0 + b_1]$ astfel încât $F(x, y) = 0$. Cu aceasta am definit funcţia $f : [x_0 - a, x_0 + a] \to [y_0 - b_1, y_0 + b_1]$, care verifică $F(x, f(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$. Pentru că $F(x_0, f(x_0)) = 0$ şi $F(x_0, y_0) = 0$ rezultă $f(x_0) = y_0$.

Arătăm că f este o funcţie continuă. Fie $x, t \in U$. Avem $F(x, f(x)) = 0$ şi $F(t, f(t)) = 0$. Funcţia F este continuă şi deci $\lim_{t \to x} F(t, f(t)) = F(x, \lim_{t \to x} f(t)) = 0$. Dar $F(x, f(x)) = 0$. Rezultă $\lim_{t \to x} f(t) = f(x)$.

Arătăm că f este derivabilă. Avem conform Teoremei lui Lagrange

$$\begin{aligned} 0 = F(t, f(t)) - F(x, f(x)) &= F(t, f(t)) - F(x, f(t)) + F(x, f(t)) - F(x, f(x)) \\ &= F'_x(c, f(t)) \cdot (t - x) + F'_y(x, d) \cdot [f(t) - f(x)], \end{aligned}$$

unde c este între x şi t, iar d între $f(x)$ şi $f(t)$. De aici se obţine

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\frac{F'_x(c, f(t))}{F'_y(x, d)}.$$

Pentru că derivatele parţiale F'_x şi F'_y sunt continue, prin trecere la limită, rezultă

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

□

Observaţie 7.4. Expresia derivatei se poate obţine prin derivarea relaţiei

$$F(x, f(x)) = 0$$

folosind regula de derivare a funcţiilor compuse. Se obţine $F'_x + F'_y \cdot f' = 0$. De aici

$$f' = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Observaţie 7.5. Dacă derivata din teoremă este nulă, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, atunci nu ne putem pronunţa asupra existenţei funcţiei $y = y(x)$. Să dăm două exemple.

Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x - y^2$. Avem $F(0, 0) = 0$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$, dar ecuaţia $F(x, y) = 0$ are două soluţii în orice vecinătate a lui $x = 0$ şi nu poate determina pe y în funcţie de x într-un mod unic.

În schimb, pentru $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = x - y^3$ avem $F(0, 0) = 0$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 0$, iar ecuaţia $F(x, y) = 0$ determină pe y în mod unic în funcţie de x prin relaţia $y = \sqrt[3]{x}$.

Exemplu 7.6. Să se arate că ecuaţia $x^6 - 3xy + y^4 + 1 = 0$ determină pe y ca funcţie implicită de x în jurul punctului $x = 1$. Să se calculeze derivata $y'(1)$.

Fie $F(x, y) = x^6 - 3xy + y^4 + 1$. Se observă că $F(1, 1) = 0$ şi

$$F'_y(1, 1) = -3x + 4y^3\Big|_{(1,1)} = 1 \neq 0.$$

Conform Teoremei funcţiilor implicite, y se poate scrie ca o funcţie de x în jurul punctului $x = 1$. Derivata este

$$y'(1) = -\frac{F'_x(1, 1)}{F'_y(1, 1)} = -\frac{6x^5 - 3y}{-3x + 4y^3}\Big|_{x=1,y=1} = -3.$$

O altă metodă de a calcula derivata este de a scrie ecuaţia sub forma

$$x^6 - 3xy(x) + y^4(x) + 1 = 0$$

şi de a deriva egalitatea. Se obţine

$$6x^5 - 3y(x) - 3xy'(x) + 4y^3(x)y'(x) = 0 \text{ echivalent cu } y'(x)[-3x + 4y^3(x)] = -6x^5 + 3y(x),$$

de unde

$$y'(x) = \frac{-6x^5 + 3y(x)}{-3x + 4y^3(x)} \text{ şi } y'(1) = \frac{-6 + 3y(1)}{-3 + 4y(1)} = \frac{-6 + 3}{-3 + 4} = -3.$$

7.2 Funcţii implicite de mai multe variabile

Rezultatul pe care l-am dat în secţiunea precedentă se poate extinde astfel

Teoremă 7.7. Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o mulţime deschisă şi o funcţie $F : D \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 pe D. Dacă există $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ şi $y_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $(x_0, y_0) \in D$ cu proprietăţile $F(x_0, y_0) = 0$ şi $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$, atunci există $U = (x_{0,1} - a_1, x_{0,1} + a_1) \times \cdots \times (x_{0,n} - a_n, x_{0,n} + a_n)$ şi $V = (y_0 - b, y_0 + b)$ pentru care $U \times V \subset D$ şi există în mod unic $f : U \to V$ astfel încât $f(x_0) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$ şi f este de clasă C^1, iar derivatele parţiale se calculează prin

$$f'_{x_i}(x) = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}.$$

Demonstraţie. Se face urmărind aceeaşi paşi ca şi în cazul $n = 1$. $\square$

Exemplu 7.8. Să se arate că ecuaţia $2x^2 + yz^3 = x^3y^2z^5$ determină pe z ca funcţie implicită de x şi y în jurul punctului $x = 1, y = 2$. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z.

Fie $F(x,y,z) = 2x^2 + yz^3 - x^3y^2z^5$. Observăm că $F(1,2,1) = 0$ şi

$$F'_z(1,2,1) = 3yz^2 - 5x^3y^2z^4\Big|_{(x=1,y=2,z=1)} = -14 \neq 0.$$

Conform Teoremei funcţiilor implicite, ecuaţia dată determină pe z ca funcţie implicită de x şi y. Derivatele de ordinul întâi sunt

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{4x - 3x^2y^2z^5}{3yz^2 - 5x^3y^2z^4} \text{ şi } z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{z^3 - 2x^3yz^5}{3yz^2 - 5x^3y^2z^4} = \frac{2x^3yz^3 - z}{3y - 5x^3y^2z^2}.$$

Teoremă 7.9 (Teorema lui Lagrange)**.** Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $f, \varphi \in C^n(I)$ $(n \geq 1)$ şi $y \in I$. Atunci ecuaţia $z = y + x\varphi(z)$ determină în jurul lui $x = 0$ pe z ca funcţie implicită de x şi y şi există $\delta > 0$ astfel încât

$$f(z(x,y)) = f(y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot \lim_{t \to y} \frac{d\left(\varphi^k f'\right)}{dt^{k-1}}(t) + \frac{x^n}{n!} \cdot h(x,y), \quad \text{oricare ar fi } x \in (-\delta, \delta),$$

unde $h : (-\delta, \delta) \times I \to \mathbb{R}$ este o funcţie cu proprietatea $\lim\limits_{x \to 0} h(x,y) = 0$.

Demonstraţie. Fie $F : \mathbb{R} \times I \times I \to \mathbb{R}$, $F(x,y,z) = z - y - x\varphi(z)$. Atunci $F(0,y,y) = 0$ şi $F'_z(0,y,y) = 1$. Deci ecuaţia $F(x,y,z) = 0$ determină pe z ca funcţie implicită $z = z(x,y)$ în jurul punctului $(0,y)$. Avem $z(0,y) = y$ şi există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (-\delta, \delta)$ şi $y \in I$ avem

$$z'_x(x,y) = \frac{\varphi(z(x,y))}{1 - x\varphi'(z(x,y))} \quad \text{şi} \quad z'_y(x,y) = \frac{1}{1 - x\varphi'(z(x,y))}.$$

Scriem formula lui Taylor cu restul sub forma lui Peano în punctul $x = 0$ pentru funcţia $g = f(z(\cdot, y)) : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$. Din condiţiile teoremei, $g \in C^n(-\delta, \delta)$. Rămâne să demonstrăm că

$$g(0) = f(y) \quad \text{şi} \quad g^{(k)}(0) = \frac{d\left(\varphi^k f'\right)}{dy^{k-1}}(y), \quad \text{pentru } 1 \leq k \leq n.$$

Avem $g(0) = f(z(0,y)) = f(y)$. Demonstrăm acum relaţia pentru derivate. Avem

$$g'(x) = [f(z(x,y))]'_x = f'(z(x,y))z'_x(x,y).$$

În particular, $g'(0) = f'(y)\varphi(y)$. Cu aceasta formula lui Lagrange este demonstrată pentru $n = 1$. Fie $n \geq 2$. Pentru a demonstra relaţia pentru orice $k \leq n$ să facem următoarele observaţii. Putem scrie

$$z'_x(x,y) = \frac{\varphi(z(x,y))}{1 - x\varphi'(z(x,y))} = \varphi(z(x,y)) \cdot \frac{1}{1 - x\varphi(z(x,y))} = \varphi(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y).$$

Să vedem acum o proprietate care are loc pentru o funcţie u de clasă $C^2(\mathbb{R}^2)$ şi v derivabilă pe $\mathbb{R}$. Avem

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[v(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right] = v'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + v(u) \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[v(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right].$$

Cu aceste două observaţii în minte să calculăm derivatele lui g. Mai întâi

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{\partial}{\partial x} g'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[f'(z(x,y)) z'_x(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[f'(z(x,y))\varphi(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y)\right] \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left[f'(z(x,y))\varphi(z(x,y)) \cdot z'_x(x,y)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[f'(z(x,y))\varphi^2(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y)\right]. \end{aligned}$$

Apoi inductiv

$$g^{(k)}(x) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\left[f'(z(x,y))\varphi^k(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y)\right].$$

Într-adevăr,

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\left[f'(z(x,y))\varphi^k(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y)\right]\right) \\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(z(x,y))\varphi^k(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y)\right]\right) \\ &= \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left[f'(z(x,y))\varphi^k(z(x,y)) \cdot z'_x(x,y)\right]\right) \\ &= \frac{\partial^{k}}{\partial y^{k}}\left[f'(z(x,y))\varphi^{k+1}(z(x,y)) \cdot z'_y(x,y)\right]. \end{aligned}$$

Putem înlocui $x = 0$ în expresia derivatei lui $g^{(k)}(x)$ înainte de a calcula derivatele după variabila y, pentru că cele două variabile sunt independente. Avem

$$g^{(k)}(0) = \frac{\partial^{k-1}}{\partial y^{k-1}}\left[f'(y)\varphi^k(y)\right]$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată. □

Exemplu 7.10. Ecuaţia lui Kepler $E = M + e\sin E$ leagă anomalia excentrică E de anomalia medie M şi excentricitatea orbitei e. Datorită formulei lui Lagrange, putem exprima E în funcţie de puteri ale lui M. Pentru aceasta rescriem ecuaţia

$$E = M \cdot \frac{E}{E - e\sin E}.$$

De aici rezultă, pentru $e \neq 1$

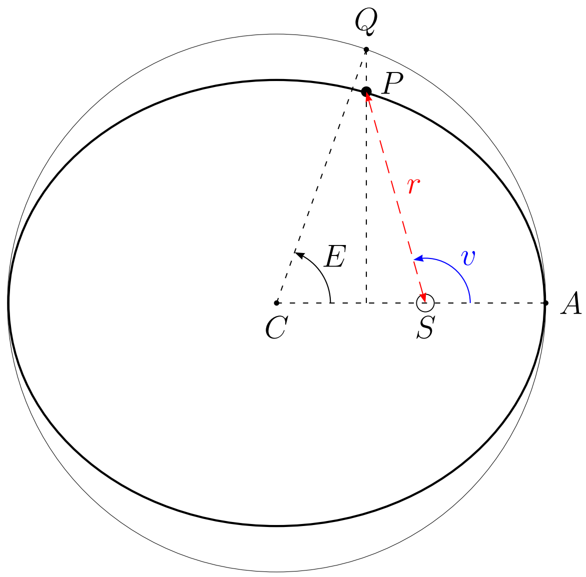
$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^n}{n!} \lim_{t\to 0} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[\left(\frac{t}{t - e\sin t}\right)^n\right] = \frac{M}{1-e} - \frac{eM^3}{6(1-e)^4} + o(M^3) \quad (M \to 0).$$

Dacă $e = 1$ atunci ecuaţia se rescrie $E = \sqrt[3]{M}\frac{E}{\sqrt[3]{E - \sin E}}$ şi avem

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M^{n/3}}{n!} \lim_{t\to 0} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[\left(\frac{t}{\sqrt[3]{t - \sin t}}\right)^n\right] = \sqrt[3]{6M} + \frac{M}{10} + o\left(M\right) \quad (M \to 0).$$

Pentru valori foarte mici ale lui e putem folosi şi dezvoltarea

$$E = M + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!} \lim_{t\to M} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[(\sin t)^n\right] = M + e\sin M + e^2 \sin M\cos M + o(e^2) \quad (e \to 0).$$



T= timpul de parcurgere a întregii orbite
t= timpul la un moment dat ($t \in [0, T]$)
$M = \frac{2\pi t}{T}$ anomalia medie

$a = CA$ semiaxa mare a orbitei
b=semiaxa mică a orbitei
$\epsilon = \frac{CS}{CA} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ excentricitatea orbitei

$M = E - \epsilon \sin E$

$r = a(1 - \epsilon \cos E)$
$v = 2\arg(\sqrt{1-\epsilon}\cos\frac{E}{2} + i\sqrt{1+\epsilon}\sin\frac{E}{2})$

Figura 7.1: Anomalia medie M, anomalia excentrică E şi anomalia adevărată v

Exemplu 7.11. Să numărăm în câte moduri pot fi scrise în şir n perechi de paranteze care sunt corect închise. Pentru $n = 1$ este doar perechea (). Pentru $n = 2$ avem două moduri: ()() sau (()). Pentru $n = 3$ sunt posibile variantele

$$((()))\quad (())()\quad (()())\quad ()(())\quad ()()().$$

În general, să notăm cu C_n numărul expresiilor corecte cu n perechi de paranteze. Să deducem o relaţie de recurenţă pentru C_n. Orice expresie de paranteze E formată din $n+1$ perechi de paranteze este de forma

$$E_{n+1} = (E_i)E_{n-i}$$

unde E_i sunt expresii de paranteze corect dispuse formate din $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ perechi. Aşadar avem

$$C_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} C_i C_{n-i}, \qquad \text{pentru } n \geq 0, \qquad \text{unde } C_0 = 1.$$

Dacă notăm funcţia generatoare a acestor numere prin

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

atunci $c(x) = 1 + x[c(x)]^2$. Rezolvând ecuaţia de gradul 2, obţinem

$$c(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Pentru a obţine o serie de puteri se alege semnul minus. Folosind seria binomială, rezultă

$$c(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} C_{\frac{1}{2}}^{n}(-4x)^n\right) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}C_{\frac{1}{2}}^{n}(4x)^n.$$

Fiindcă pentru $n \geq 1$ coeficientul binomial se poate rescrie sub forma

$$C_{\frac{1}{2}}^{n} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3}{2}-n\right)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}$$

deducem că

$$c(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!}{(m+1)!m!}x^m = 1 + x + 2x^2 + 5x^3 + \cdots .$$

Aşadar, $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{C_{2n}^n}{n+1}$. Numerele acestea se numesc numerele lui Catalan.

Rescriind ecuaţia funcţiei generatoare sub forma $c(x)-1 = x(1+c(x)-1)^2$ şi notând $z = c(x)-1$ obţinem ecuaţia $z = x(1+z)^2$ cu formula

$$c(x)-1 = z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\lim_{t\to 0}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(1+t)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\cdot 2k(2k-1)\cdots(k+2) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!x^k}{(k+1)!k!}.$$

7.3 Funcţii definite implicit de un sistem de ecuaţii

Un rezultat mai general decât cele două teoreme precedente este

Teoremă 7.12. Fie $D \subset \mathbb{R}^{n+m}$ o mulţime deschisă şi o funcţie $F = (F_1, \ldots, F_m) : D \to \mathbb{R}^m$ de clasă C^1 pe D. Dacă există $x_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ şi $y_0 = (y_{0,1}, \ldots, y_{0,m}) \in \mathbb{R}^m$ astfel încât $(x_0, y_0) \in D$ cu proprietăţile $F(x_0, y_0) = 0$ şi

$$\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}(x_0, y_0) \neq 0,$$

atunci există $U = (x_{0,1}-a_1, x_{0,1}+a_1)\times\cdots\times(x_{0,n}-a_n, x_{0,n}+a_n)$ şi $V = (y_{0,1}-b_1, y_{0,1}+b_1)\times\cdots\times(y_{0,m}-b_m, y_{0,m}+b_m)$ pentru care $U\times V \subset D$ şi există în mod unic $f : U \to V$ astfel încât $f(x_0) = y_0$, $F(x, f(x)) = 0$, pentru orice $x \in U$ şi f este de clasă C^1, iar derivatele parţiale se calculează prin

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_i} = -\frac{\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_{k-1},x_i,y_{k+1},\ldots,y_m)}}{\frac{D(F_1,\ldots,F_m)}{D(y_1,\ldots,y_m)}}.$$

Demonstraţie. A se consulta, de exemplu, articolul scris de O. de Oliveira numit ”The Implicit and the Inverse Function Theorems: easy proofs” din revista Real Analysis Exchange, vol. 39(1) din 2013/2014, paginile 207–218. □

Exemplu 7.13. Pornind de la soluţia $(2,-1,2,1)$ să se arate că sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0 \\ 2xy + y^4 - 2u^2 + 3v^3 + 8 = 0 \end{cases}$$

determină ca funcţii implicite pe $u = u(x,y)$ şi $v = v(x,y)$. Să se calculeze derivatele parţiale ale lui u şi v în raport cu x în punctul $(x,y) = (2,-1)$.

Fie $F(x,y,u,v) = (x^2-y^2-u^3+v^2+4, 2xy+y^4-2u^2+3v^3+8)$. Observăm că $F(2,-1,2,1) = (0,0)$ şi

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 9v^2 \end{vmatrix} = 8uv - 27u^2v^2 = -92$$

ia valoare nenulă în punctul $(2, -1, 2, 1)$. Conform Teoremei funcţiilor implicite, sistemul determină pe u şi pe v ca funcţii implicite de x şi y. Derivatele se pot calcula astfel

$$u'_x = \frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = \frac{\begin{vmatrix} -2x & 2v \\ -2y & 9v^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 9v^2 \end{vmatrix}} = \frac{-18xv^2 + 4yv}{8uv - 27u^2v^2} = \frac{-18xv + 4y}{8u - 27u^2v}$$

$$v'_x = \frac{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,x)}}{\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,v)}} = \frac{\begin{vmatrix} -3u^2 & -2x \\ -4u & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -3u^2 & 2v \\ -4u & 9v^2 \end{vmatrix}} = \frac{6yu^2 - 8ux}{8uv - 27u^2v^2} = \frac{6yu - 8x}{8v - 27uv^2}$$

Rezultă

$$u'_x(2, -1) = \frac{10}{23} \text{ şi } v'_x(2, -1) = \frac{14}{23}.$$

7.4 Teorema funcţiilor inverse

Se cunoaşte faptul că pentru o funcţie bijectivă $f : I \to J$, $I, J \subset \mathbb{R}$ există o funcţie $g : J \to I$ cu proprietatea că

$$f(g(y)) = y, \text{ pentru orice } y \in J \text{ şi } g(f(x)) = x \text{ pentru orice } x \in I.$$

Funcţia g este unică şi se numeşte inversa funcţiei f.

Teorema următoare ne arată existenţa inversei şi derivabilitatea ei în jurul unui punct în care funcţia are derivată nenulă.

Teoremă 7.14. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $x_0 \in I$ şi $f \in C^1(I)$ cu proprietatea că $f'(x_0) \neq 0$. Atunci există un interval deschis $J \subset f(I)$ care-l conţine pe $f(x_0)$ şi $K \subset I$ un interval deschis care-l conţine pe x_0 şi o unică funcţie derivabilă $g : J \to K$ cu proprietatea $g(f(x_0)) = x_0$ şi $f(g(y)) = y$ pentru orice $y \in J$. În plus

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, \quad \text{pentru orice } y \in J.$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema funcţiilor implicite pentru mulţimea $D = I \times f(I) \subset \mathbb{R}^2$ deschisă şi funcţia $F : D \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = f(x) - y$ cu proprietatea că $F(x_0, f(x_0)) = 0$ şi $F'_x(x_0, f(x_0)) = f'(x_0) \neq 0$. Atunci există $a, b > 0$ astfel încât $J = (f(x_0) - a, f(x_0) + a)$ şi $K = (x_0 - b, x_0 + b)$ şi o unică funcţie $g : J \to K$ cu proprietatea $g(f(x_0)) = x_0$ şi $F(g(y), y) = 0$ pentru orice $y \in J$. $\square$

Teoremă 7.15. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval deschis, $a \in I$ şi $f \in C^n(I)$ cu proprietatea că $f'(a) \neq 0$. Atunci ecuaţia $y = f(x)$ admite scrierea lui x în funcţie de y în jurul punctului a prin $x = g(y)$ şi avem

$$g(y) = a + \sum_{k=1}^{n} \frac{(y - f(a))^k}{k!} \cdot \lim_{x \to a} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left[\left(\frac{x - a}{f(x) - f(a)} \right)^k \right] + o\left((y - f(a))^n\right), \quad (y \to f(a)).$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema lui Lagrange. Rescriem ecuaţia $y = f(x)$ în forma $y - f(a) = f(x) - f(a)$ sau

$$x = a + [y - f(a)] \cdot \varphi(x), \quad \text{unde } \varphi(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{f(x)-f(a)}, & x \in I \setminus \{ a \} \\ \frac{1}{f'(a)}, & x = a. \end{cases}$$

Funcţia φ este corect definită. În plus $\varphi \in C^n(I)$. $\square$

Exemplu 7.16. Pentru $y \geq -\frac{1}{e}$ dat, soluţia ecuaţiei $y = xe^x$ defineşte funcţia lui Lambert, notată $x = W(y)$. Aplicăm teorema anterioară pentru $f(x) = xe^x$, $a = 0$. Avem $f(a) = 0$ şi $f'(a) = 1$. Pentru că

$$\left(\frac{x-a}{f(x)-f(a)}\right)^k = e^{-kx} \quad \text{şi} \quad \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left[\left(\frac{x-a}{f(x)-f(a)}\right)^k\right] = (-k)^{k-1}e^{-kx}$$

rezultă

$$W(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{y^k(-k)^{k-1}}{k!} + o(y^n) = y - y^2 + \frac{3y^3}{2} - \frac{8y^4}{3} + o(y^4).$$

Teoremă 7.17. Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi fie $f : D \to \mathbb{R}^n$ o funcţie de clasă C^1 pe D. Fie $x_0 \in D$ astfel încât

$$\det J(f)(x_0) = \frac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Atunci există $U = (y_{0,1} - b_1, y_{0,1} + b_1) \times \cdots \times (y_{0,n} - b_n, y_{0,n} + b_n)$ o vecinătate a lui $y_0 = (y_{0,1}, \ldots, y_{0,n}) = (f_1(x_0), \ldots, f_n(x_0))$ şi există o funcţie $g : U \to D$ cu proprietatea că $g(y_0) = x_0$ şi $f(g(y)) = y$, pentru orice $y \in U$. În plus, g este de clasă C^1 pe U şi

$$J(g)(y) = [J(f)(g(y))]^{-1}.$$

Demonstraţie. Se aplică Teorema funcţiilor implicite în forma cea mai generală pentru funcţia $F(x, y) = f(x) - y$. $\square$

7.5 Probleme rezolvate

Problema 7.1. Să se arate că ecuaţia $e^y - e^x + x^2y - 1 = 0$ determină pe y ca funcţie implicită de x într-o vecinătate a punctului $x = 1$ şi să se calculeze $y'(1)$ şi $y''(1)$.

Soluţie 7.1. Fie $F(x, y) = e^y - e^x + x^2y - 1$. Avem $F(1, 1) = 0$ iar $F'_x = -e^x + 2xy$ şi $F'_y = e^y + x^2$ sunt funcţii continue cu $F'_y(1, 1) = e + 1 \neq 0$. Pe baza acestora y se poate defini ca funcţie implicită de x într-o vecinătate a lui $x = 1$. Scriem $y = y(x)$. Pentru a calcula derivata lui y în $x = 1$ putem aplica formula

$$y'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)},$$

şi obţinem $y'(1) = (e-2)/(e+1)$. Derivata lui y se mai poate calcula şi derivând ecuaţia $e^{y(x)} - e^x + x^2y(x) - 1 = 0$. Se obţine $e^{y(x)}y'(x) - e^x + 2xy(x) + x^2y'(x) = 0$, de unde $y'(x) \cdot \left(e^{y(x)} + x^2\right) = e^x - 2xy(x)$, adică

$$y'(x) = \frac{e^x - 2xy(x)}{e^{y(x)} + x^2}.$$

Se obţine $y'(1) = \frac{e-2}{e+1}$. Derivând încă o dată obţinem

$$\begin{aligned}
y''(x) &= \frac{[e^x - 2y(x) - 2xy'(x)] \cdot \left[e^{y(x)} + x^2\right] - [e^x - 2xy(x)] \cdot \left[e^{y(x)}y'(x) + 2x\right]}{\left[e^{y(x)} + x^2\right]^2} \\
&= \frac{\left[e^x - 2y(x) - 2x\frac{e^x - 2xy(x)}{e^{y(x)} + x^2}\right] \cdot \left[e^{y(x)} + x^2\right] - [e^x - 2xy(x)] \cdot \left[e^{y(x)}\frac{e^x - 2xy(x)}{e^{y(x)} + x^2} + 2x\right]}{\left[e^{y(x)} + x^2\right]^2} \\
&= \frac{-4x(e^x - 2xy)(e^y + x^2) + (e^x - 2y)(e^y + x^2)^2 - e^y(e^x - 2xy)^2}{(e^y + x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Rezultă că $y''(1) = \frac{-3(e-2)}{(e+1)^3}$. □

Problema 7.2. Să se calculeze y' dacă $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Soluţie 7.2. Derivăm ecuaţia $\dfrac{1}{2}\cdot\ln\big(x^2+y^2(x)\big) = \operatorname{arctg}\dfrac{y(x)}{x}$ şi obţinem

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2y(x)y'(x)}{x^2+y^2(x)} = \frac{1}{1+\frac{y^2(x)}{x^2}}\cdot\frac{xy'(x)-y(x)}{x^2}.$$

De aici rezultă că $x+y(x)y'(x) = xy'(x)-y(x)$. Astfel, $y'(x) = \frac{-x-y(x)}{y(x)-x}$. □

Problema 7.3. Ecuaţia $F(x+2y, y-2x) = 1$ defineşte pe y ca funcţie implicită de x. Să se calculeze y'.

Soluţie 7.3. Notăm $u = x+2y(x)$ şi $v = y(x)-2x$ şi derivăm folosind formula pentru derivata funcţiilor compuse. Se obţine

$$F'_u(u,v)\cdot(1+2y'(x)) + F'_v(u,v)\cdot(y'(x)-2) = 0.$$

Rezultă

$$y' = \frac{2F'_v(u,v)-F'_u(u,v)}{2F'_u(u,v)+F'_v(u,v)}.$$

□

Problema 7.4. Fie ecuaţia $z^2 - xe^y - ye^z - ze^x = 0$. Să se verifice dacă ecuaţia dată defineşte o funcţie implicită $z = z(x,y)$ pentru care $z(0,0) = 1$. Să se calculeze derivatele parţiale $z'_x(0,0)$, $z'_y(0,0)$, $z''_{x^2}(0,0)$, $z''_{xy}(0,0)$ şi $z''_{y^2}(0,0)$.

Soluţie 7.4. Fie $F(x,y,z) = z^2 - xe^y - ye^z - ze^x$ funcţia de clasă $C^2(\mathbb{R}^3)$ reprezentând membrul stâng al ecuaţiei date. Punctul $(0,0,1)$ verifică ecuaţia $F(x,y,z) = 0$. Avem $F'_z = 2z - ye^z - e^x$. Pentru că $F'_z(0,0,1) = 1 \neq 0$ rezultă că există funcţia $z(x,y)$ într-o vecinătate a punctului $(0,0)$ cu proprietatea că $F(x,y,z(x,y)) = 0$ şi $z(0,0) = 1$.

Pentru a calcula $z'_x(0,0)$ derivăm ecuaţia în raport cu x. Se obţine

$$2z\cdot z'_x - e^y - ye^z\cdot z'_x - z'_x e^x - ze^x = 0.$$

Va rezulta

$$z'_x = \frac{e^y+ze^x}{2z-ye^z-e^x}.$$

Atunci $z'_x(0,0) = 2$. Analog, derivând ecuaţia iniţială în raport cu y, se obţine

$$z'_y = \frac{e^z+xe^y}{2z-ye^z-e^x},$$

şi $z'_y(0,0) = e$.

Derivatele parţiale de ordinul doi se calculează astfel:

$$z''_{x^2} = \left(\frac{e^y+ze^x}{2z-ye^z-e^x}\right)'_x = \frac{(z'_xe^x+ze^x)(2z-ye^z-e^x)-(e^y+ze^x)(2z'_x-ye^zz'_x-e^x)}{(2z-ye^z-e^x)^2}$$

$$z''_{xy} = \left(\frac{e^y+ze^x}{2z-ye^z-e^x}\right)'_y = \frac{(e^y+z'_ye^x)(2z-ye^z-e^x)-(e^y+ze^x)(2z'_y-e^z-ye^zz'_y)}{(2z-ye^z-e^x)^2}$$

$$z''_{y^2} = \left(\frac{e^z+xe^y}{2z-ye^z-e^x}\right)'_y = \frac{(e^zz'_y+xe^y)(2z-ye^z-e^x)-(e^z+xe^y)(2z'_y-e^z-ye^zz'_y)}{(2z-ye^z-e^x)^2}$$

Avem $z''_{x^2}(0,0) = -3$, $z''_{xy}(0,0) = 1-e$ şi $z''_{y^2}(0,0) = 0$. □

Problema 7.5. Să se calculeze $z'_x - z'_y$ dacă z este definită implicit de ecuaţia

$$F(x+y, y-z, z+x) = 0.$$

Soluţie 7.5. Cu formula pentru derivarea funcţiilor compuse se obţine

$$F'_u + F'_v \cdot (-z'_x) + F'_w \cdot (z'_x + 1) = 0,$$

ceea ce ne dă

$$z'_x = \frac{-F'_u - F'_w}{-F'_v + F'_w}.$$

Derivând ecuaţia în raport cu y avem

$$F'_u + F'_v \cdot (1 - z'_y) + F'_w \cdot z'_y = 0,$$

ceea ce ne dă

$$z'_y = \frac{-F'_u - F'_v}{-F'_v + F'_w}.$$

Obţinem $z'_x - z'_y = -1$. □

Problema 7.6. Ecuaţia $x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz)$ defineşte implicit funcţia $z(x, y)$. Să se arate că

$$(cy - bz) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$$

nu depinde de funcţia φ.

Soluţie 7.6. Notăm $u = ax + by + cz$ şi avem prin derivare în raport cu x

$$2x + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(u) \cdot \left(a + c\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x + a\varphi'(u)}{2z - c\varphi'(u)}.$$

Derivând în raport cu y ecuaţia iniţială se obţine

$$2y + 2z \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi'(u) \cdot \left(b + c\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y + b\varphi'(u)}{2z - c\varphi'(u)}.$$

Va rezulta

$$\begin{aligned}
&(cy - bz) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \\
&\quad = (cy - bz) \cdot \frac{-2x + a\varphi'(u)}{2z - c\varphi'(u)} + (az - cx) \cdot \frac{-2y + b\varphi'(u)}{2z - c\varphi'(u)} \\
&\quad = \frac{-2cxy + acy\varphi'(u) + 2bxz - abz\varphi'(u) - 2ayz + abz\varphi'(u) + 2cxy - bcx\varphi'(u)}{2z - c\varphi'(u)} \\
&\quad = \frac{c\varphi'(u)(ay - bx) + 2z(bx - ay)}{2z - c\varphi'(u)} = bx - ay.
\end{aligned}$$

□

Problema 7.7. Să se studieze în ce condiţii se poate obţine ρ şi φ din transformarea $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Soluţie 7.7. Jacobianul transformării este

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

Pentru a exista inversa, trebuie ca $J \neq 0$. Deci, pentru a exprima pe ρ şi φ în funcţie de x şi y trebuie ca $\rho \neq 0$. Teorema funcţiilor inverse nu ne arată şi modalitatea în care putem scrie inversa, ci doar condiţiile în care o putem face. Totuşi în această problemă putem scrie $\rho = \pm\sqrt{x^2+y^2}$, iar $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$, $x \neq 0$ şi $\varphi = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(y)$, când $x = 0$. În punctul $(x, y) = (0, 0)$ nu putem exprima unghiul φ în mod unic. □

7.6 Probleme propuse

7.8. Ecuaţiile următoare

a) $e^y - e^x + xy = 0$

b) $x^3 + y^3 - x + y - 2 = 0$

c) $y^x - x^y = 0$

d) $f(\sin x + y, \cos y + x) = 0$

e) $f(x^2 + y^2, 1 + xy) = 0$

definesc implicit funcţia $y = y(x)$. Să se calculeze $y'(x)$.

7.9. Ecuaţiile

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

b) $x\ln y + y\ln z + z\ln x - 3 = 0$

c) $(x + y)e^z - xy - z = 0$

d) $y(x + z) - (y + z)f(z) = 0$

e) $f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$

f) $f(yz, e^{xz}) = 0$

definesc implicit funcţia $z = z(x, y)$. Să se calculeze z'_x şi z'_y.

7.10. Dacă z este definită implicit de ecuaţia $f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ să se arate că

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

7.11. Să se verifice că $az'_x + bz'_y = 1$, unde z este definit de $F(x - az, y - bz) = 0$.

7.12. Funcţia $z = z(x, y)$ este definită de ecuaţia $(y + z)\sin z - y(x + z) = 0$. Să se arate că

$$z\sin z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - y^2 \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

7.13. Să se studieze în ce condiţii se poate obţine ρ, φ şi θ din transformarea $x = \rho\cos\varphi\sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$.