Curs 8

Calcul diferenţial

8.1 Diferenţiala

Definiţie 8.1. O mulţime $G \subset \mathbb{R}^n$ este ***deschisă*** dacă pentru orice $x \in G$ există un $r > 0$ astfel încât $x + h$ aparţine lui G pentru orice $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ cu proprietatea $\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2} < r$.

Definiţie 8.2. O aplicaţie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se numeşte liniară dacă

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y), \qquad \text{pentru orice } x, y \in \mathbb{R}^n,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Definiţie 8.3. O aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este mărginită dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|T(x)| \leq M \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}, \qquad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}^n.$$

Definiţie 8.4. Fie $G \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi fie $x \in G$. Funcţia $f : G \to \mathbb{R}$ este ***diferenţiabilă*** în punctul x, dacă există o aplicaţie liniară $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi mărginită cu proprietatea că

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}} = 0.$$

Aplicaţia T se numeşte ***diferenţiala Fréchet*** şi se notează $T(h) = \mathrm{d}f(x)(h)$.

Teoremă 8.5. Diferenţiala unei funcţii într-un punct, dacă există, este unică.

Teoremă 8.6. Orice funcţie diferenţiabilă într-un punct este continuă în acel punct.

Teoremă 8.7. Fie $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă care are derivate parţiale de ordinul întâi continue într-un punct $x \in G$ al mulţimii deschise G. Atunci f este diferenţiabilă în punctul x şi

$$\mathrm{d}f(x)(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \cdot h_n.$$

Observaţie 8.8. Se foloseşte şi notaţia

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,\mathrm{d}x_n.$$

8.1.1 Diferenţiala funcţiilor de o variabilă reală

Fie $A \subset \mathbb{R}$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă într-un punct $x \in A$. Din definiţia diferenţiabilităţii în punctul x deducem că:

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|f(x+h) - f(x) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Pe de altă parte

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{|f(x+h) - f(x) - f'(x)\cdot h|}{|h|} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)\right| = 0.$$

Din unicitatea diferenţialei unei funcţii într-un punct, rezultă că aplicaţia liniară

$$T : A \to \mathbb{R},\ T(h) = f'(x)\cdot h,$$

este diferenţiala funcţiei f în punctul x, deci $\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x)\cdot h$.

Observaţie 8.9. Diferenţiala funcţiei identice $1_A : A \to A,\ 1_A(x) = x,\ \forall x \in A$ este $\mathrm{d}1_A(x)(h) = [1_A(x)]' \cdot h = h$ şi de aceea este justificată notaţia $h = \mathrm{d}x$. Rezultă că

$$\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x)\cdot \mathrm{d}x,\ \forall x \in A.$$

În această egalitate, litera x din expresiile $\mathrm{d}f(x)$ şi $f'(x)$ indică punctul la care se referă diferenţiala, respectiv derivata; $\mathrm{d}x$ este argumentul diferenţialei $\mathrm{d}f(x)$.

Aceasta explică de ce uneori se foloseşte pentru derivată notaţia

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x).$$

Observaţie 8.10. Interpretare geometrică. Diferenţa $f(x_0 + h) - f(x_0) = MN$ reprezintă creşterea funcţiei f, pentru creşterea h a argumentului.

$$\mathrm{d}f(x_0)(h) = f'(x_0)\cdot h = \mathrm{tg}\,\alpha \cdot h = \frac{TN}{M_0N}\cdot M_0N = TN.$$

Când aproximăm creşterea $f(x_0 + h) - f(x_0)$ prin $\mathrm{d}f(x_0)(h)$, înlocuim segmentul MN cu TN.

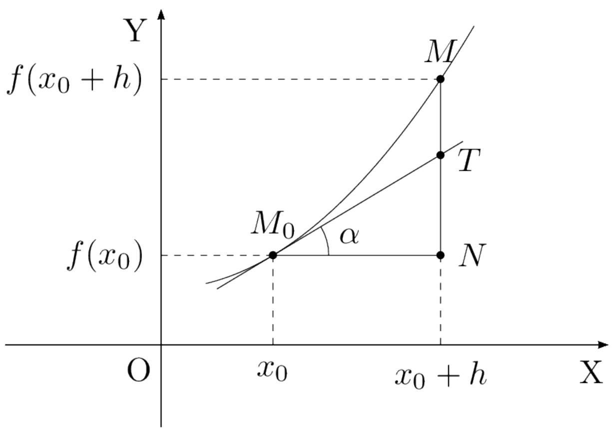

Figura 8.1: Interpretarea geometrică a diferenţialei

Regulile de diferenţiere sunt o consecinţă a regulilor de derivare:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(f+g) &= \mathrm{d}f + \mathrm{d}g \\
\mathrm{d}(f\cdot g) &= g\cdot \mathrm{d}f + f\cdot \mathrm{d}g \\
\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\cdot \mathrm{d}f - f\cdot \mathrm{d}g}{g^2},\ g(x)\neq 0 \\
\mathrm{d}(f\circ u) &= f'(u)\cdot \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

8.1.2 Diferenţiale de ordin superior

Fie $A\subset\mathbb{R}$ o mulţime deschisă şi fie $f : A\to\mathbb{R}$ derivabilă de două ori într-un punct $x\in A$. Diferenţiala de ordinul doi a funcţiei f calculată în punctul x, pentru creşterea h, se obţine prin diferenţierea primei diferenţiale, conform regulii deduse. Cum $\mathrm{d}f(x)(h) = f'(x)\cdot h$, avem

$$\mathrm{d}^2 f(x)(h) = [\mathrm{d}\, f(x)(h)]'\cdot h = (f'(x)\cdot h)'\cdot h = f''(x)\cdot h^2,$$

sau folosind convenţia $h=\mathrm{d}x$, rezultă că $\mathrm{d}^2 f = f''\cdot \mathrm{d}x^2$.

Analog, dacă f admite derivată de ordinul n în punctul x, atunci diferenţiala de ordinul n este $\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)\cdot \mathrm{d}x^n$.

Observaţie 8.11. Atenţie la notaţii:
1. $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2 = \mathrm{d}x\cdot \mathrm{d}x$
2. $\mathrm{d}^2x = 0$, pentru că este diferenţiala a doua a funcţiei $f(x)=x$.
3. $\mathrm{d}(x^2) = 2x\cdot \mathrm{d}x$.

Pentru o funcţie $f : A\to\mathbb{R}$ de mai multe variabile şi un punct $a=(a_1,\ldots,a_n)$ aparţinând mulţimii deschise A, definim recursiv diferenţiala de ordinul p. Dacă f este de clasă C^p pe mulţimea A atunci

$$\mathrm{d}^p f(x)(h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\cdot h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\cdot h_n\right)^{(p)} f(x).$$

Pentru funcţii de două variabile $f(x,y)$ diferenţiala de ordinul p se scrie

$$\mathrm{d}^p f(x,y)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\cdot \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\cdot \mathrm{d}y\right)^{(p)} f(x,y) = \sum_{i=0}^{p} C_p^i \frac{\partial^p f}{\partial x^{p-i}\partial y^i}(x,y)\mathrm{d}x^{p-i}\mathrm{d}y^i.$$

Diferenţiala de ordinul 2 este

$$\mathrm{d}^2 f(x,y)(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y) = f''_{x^2}(x,y)\mathrm{d}x^2 + 2f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f''_{y^2}(x,y)\mathrm{d}y^2.$$

Exemplu 8.12. Fie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 2x^3y^2 + x - y^3$. Să determinăm diferenţialele de ordinul 1 şi 2 ale lui f în punctul $(1,2)$.

Avem

$$\mathrm{d}f(x,y) = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y = (6x^2y^2+1)\mathrm{d}x + (4x^3y - 3y^2)\mathrm{d}y$$

şi atunci

$$\mathrm{d}f(1,2) = 25\mathrm{d}x - 4\mathrm{d}y.$$

Diferenţiala de ordinul doi a lui f este

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = 12xy^2\mathrm{d}x^2 + 24x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (4x^3-6y)\mathrm{d}y^2.$$

Diferenţiala de ordinul 2 în punctul (1,2) este

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = 48\mathrm{d}x^2 + 48\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 8\mathrm{d}y^2.$$

8.2 Formula lui Taylor pentru funcţii de mai multe variabile

Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unde A este o mulţime deschisă. Presupunem că f are derivate parţiale de orice ordin într-o vecinătate a punctului $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A$.

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ astfel încât $a + t(x - a) \in A$. În acest caz, există un $\epsilon > 0$ astfel încât funcţia $g : (-\epsilon, 1 + \epsilon) \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(a + t(x - a)) = f(a_1 + t(x_1 - a_1), \dots, a_n + t(x_n - a_n))$$

este corect definită şi are derivate de orice ordin în intervalul $(-\epsilon, \epsilon)$.

Aplicăm formula lui Taylor pentru funcţia g de o variabilă reală în punctul $t = 0$. Va exista c între 0 şi t cu

$$g(t) = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)t^2}{2!} + \cdots + \frac{g^{(p)}(0)t^p}{p!} + \frac{g^{(p+1)}(c)t^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Pentru $t = 1$ folosind faptul că

$$\begin{aligned}
g(0) &= f(a)\\
g(1) &= f(x)\\
g'(t) &= \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a + t(x - a)) \cdot (x_i - a_i) = \mathrm{d}f(a + t(x - a))(x - a)\\
g''(t) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 f(a + t(x - a)) = \mathrm{d}^2 f(a + t(x - a))(x - a)\\
g^{(p)}(t) &= \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^p f(a + t(x - a)) = \mathrm{d}^{\mathrm{p}} f(a + t(x - a))(x - a).
\end{aligned}$$

rezultă formula lui Taylor pentru mai multe variabile

$$f(x) = f(a) + \mathrm{d}f(a)(x - a) + \cdots + \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{p}} f(a)(x - a)}{p!} + \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{p+1}} f(a + c(x - a))(x - a)}{(p+1)!},$$

unde $c \in (0, 1)$.

8.3 Extreme

Definiţie 8.13. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie. Punctul $a \in A$ este ***punct de minim local*** al lui f dacă

$$f(x) - f(a) \geq 0$$

pentru orice x din vecinătatea lui a, adică orice x care verifică inegalitatea $(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \epsilon$, pentru o anumită valoare $\epsilon > 0$.

Punctul a este ***punct de maxim local*** al lui f dacă

$$f(x) - f(a) \leq 0$$

pentru orice x din vecinătatea lui a.

Punctul a este ***punct de extrem local*** al lui f dacă este un punct de maxim local sau punct de minim local. Valorile funcţiei în punctele de extrem local se numesc extreme locale.

Teoremă 8.14 (Fermat)**.** Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, fie $a \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă f este diferenţiabilă în a, iar a este punct de extrem local al funcţiei f, atunci diferenţiala lui f este nulă în acest punct.

Observaţie 8.15. Pentru a găsi punctele de extrem local ale unei funcţii, căutăm punctele ***critice (staţionare)***, adică punctele în care diferenţiala se anulează. Totuşi, nu orice punct critic este un punct de extrem, după cum arată următorul exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Diferenţiala lui f se anulează în punctele în care se anulează derivatele parţiale. Pentru că $f'_x = 2x$ şi $f'_y = -2y$, rezultă că $(0, 0)$ este singurul punct critic. Dar, $(0, 0)$ nu este punct de extrem, pentru că dacă ar fi, atunci $f(x, y) - f(0, 0)$ ar avea semn constant în vecinătatea punctului $(0, 0)$. Cum $f(x, 0) \geq 0$ şi $f(0, y) \leq 0$, rezultă că $f(x, y)$ îşi schimbă semnul în apropierea originii.

Definiţie 8.16. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă, $x \in A$ şi $f : A \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 pe A. Spunem că $\mathrm{d}^2 f(x)$ este ***pozitiv definită*** dacă

$$\mathrm{d}^2 f(x)(h) > 0, \qquad \text{pentru orice } h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0.$$

Spunem că $\mathrm{d}^2 f(x)$ este ***negativ definită*** dacă

$$\mathrm{d}^2 f(x)(h) < 0, \qquad \text{pentru orice } h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0.$$

Teoremă 8.17. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime deschisă şi $a \in A$ un punct critic al funcţiei $f : A \to \mathbb{R}$ de clasă C^2 pe A. Dacă $\mathrm{d}^2 f(a)$ este negativ definită atunci a este punct de maxim local, iar dacă $\mathrm{d}^2 f(a)$ este pozitiv definită, atunci a este punct de minim local.

Teoremă 8.18 (Sylvester)**.** Fie $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ şi $x \in A$. Fie matricea hessiană (a_{ij}) unde

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \; i, j = \overline{1, n}.$$

1) $\mathrm{d}^2 f(x)$ este pozitiv definită dacă şi numai dacă

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots \quad , \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

2) $\mathrm{d}^2 f(x)$ este negativ definită dacă şi numai dacă

$$-\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots \quad , \quad (-1)^n \Delta_n > 0.$$

Exemplu 8.19. Să se găsească extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2.$$

Căutăm punctele critice, soluţiile sistemului

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 - 4(x - y) = 0 \\ 4y^3 + 4(x - y) = 0 \end{cases}.$$

Rezolvăm sistemul şi găsim punctele critice $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}),\ (-\sqrt{2}, \sqrt{2}),\ (0,0)$.
Matricea hessiană este

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{x^2} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{bmatrix}.$$

În punctul $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ matricea hessiană este

$$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{bmatrix}.$$

Pentru că $\Delta_1 = 20 > 0$ şi $\Delta_2 = 384 > 0$ înseamnă că $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ este punct de minim local iar $f_{min} = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$.

În mod analog se arată că $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ este tot punct de minim local cu $f_{min} = -8$.

În punctul critic $(0,0)$, matricea hessiană este

$$H(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Pentru că $\Delta_2 = 0$ nu putem trage nici o concluzie cu criteriul lui Sylvester. Atunci studiem semnul diferenţei $f(x,y) - f(0,0)$ în vecinătatea originii. Avem

$$f(x,x) = 4x^4 > 0,\ \forall x \neq 0.$$

$$f(x,0) = x^2(x^2 - 2) < 0,\ \text{pentru } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$
$$\Rightarrow f(x,0) < f(0,0),\ \text{pentru } x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}).$$

Rezultă că într-un disc cu centrul în $(0,0)$ şi rază mai mică decât $\sqrt{2}$, diferenţa $f(x,y) - f(0,0)$ nu-şi păstreză semnul, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem.

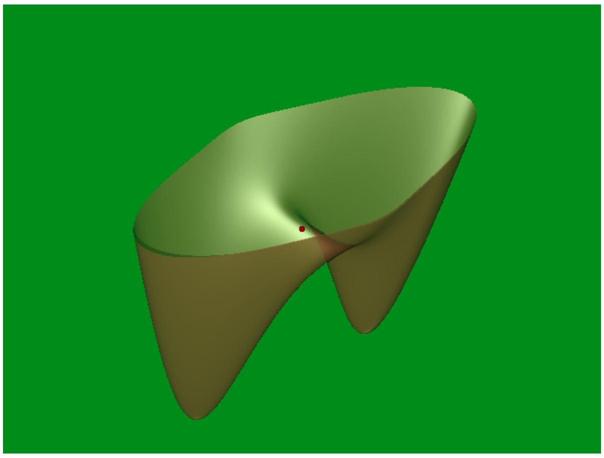

Figura 8.2: Punctul $(0,0)$ este punct şa al suprafeţei $z = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$