Curs 9

Integrale

9.1 Primitive

Definiţie 9.1. Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Funcţia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ se numeşte ***primitivă*** a funcţiei f dacă F este derivabilă pe $[a,b]$ şi

$$F'(x) = f(x), \qquad \text{pentru orice } x \in [a,b].$$

Notaţie 9.2. Mulţimea primitivelor unei funcţii date f se numeşte ***integrală nedefinită*** şi se notează $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Aşadar, avem formula generală

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

unde C este o constantă oarecare.

Redăm mai jos, un tabel cu primitivele uzuale.

$$\int t^a\,\mathrm{d}t = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ t \in I \subset (0,\infty)$$

$$\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C, \qquad t \in I \subset \mathbb{R}^*$$

$$\int a^t\,\mathrm{d}t = \frac{a^t}{\ln a} + C, \qquad a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C, \qquad a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C, \qquad a \neq 0,\ t \in I \subset \mathbb{R} \setminus \{-a,a\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left(t + \sqrt{t^2+a^2}\right) + C, \qquad a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t + \sqrt{t^2-a^2}\right| + C, \qquad a > 0,\ t \in I \subset \mathbb{R} \setminus [-a,a]$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{a} + C, \qquad a > 0,\ t \in I \subset (-a,a)$$

$$\int \sin t\,\mathrm{d}t = -\cos t + C, \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

9.2 Integrala Riemann

Definiţie 9.3. O funcţie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se numeşte ***integrabilă (Riemann)*** dacă există un număr real $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune a intervalului $[a, b]$

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

cu proprietatea că

$$\max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} (x_k - x_{k-1}) < \delta$$

şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ să avem

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) - I \right| < \varepsilon.$$

Notaţie 9.4. Dacă numărul I din definiţia unei funcţii integrabile există atunci el este unic şi se numeşte ***integrala Riemann*** a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Pentru o funcţie pozitivă f, acest număr I reprezintă aria de sub graficul funcţiei f cuprins între dreptele $x = a$ şi $x = b$ şi axa OX.

Propoziţie 9.5. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este mărginită pe $[a, b]$.

Propoziţie 9.6. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Propoziţie 9.7. Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Proprietăţi ale integralei Riemann

1) Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a, b]$ şi $c, d \in \mathbb{R}$ atunci $cf + dg$ este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b [cf(x) + dg(x)]\,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + d \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

3) Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c) \cdot (b - a).$$

4) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci

$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5) Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ şi $c \in (a, b)$ atunci f este integrabilă pe $[a, c]$ şi pe $[c, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Calculul integralei Riemann

Teoremă 9.8 (Leibniz-Newton)**.** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie integrabilă pe $[a, b]$ şi $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ o primitivă a lui f. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Observaţie 9.9. Nu orice funcţie integrabilă are primitive. De exemplu, funcţia semn $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Funcţia f este mărginită şi are un punct de discontinuitate de prima speţă. Ea este integrabilă, dar nu are primitive.

Nu orice funcţie care admite primitive este integrabilă. De exemplu, $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă pentru funcţia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dar f nu este integrabilă pentru că nu este mărginită.

Teoremă 9.10 (Integrarea prin părţi)**.** Fie $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile pe $[a, b]$ şi derivabile astfel încât f' şi g' sunt integrabile pe $[a, b]$. Atunci

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teoremă 9.11 (Prima metodă de schimbare de variabilă)**.** Fie $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ o funcţie cu derivata continuă pe $[c, d]$. Dacă $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mulţimea valorilor lui φ este inclusă în $[a, b]$, $\varphi([c, d]) \subset [a, b]$, atunci

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Teoremă 9.12 (A doua metodă de schimbare de variabilă)**.** Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ o funcţie bijectivă astfel încât φ şi φ^{-1} sunt de clasă C^1, iar $\varphi'(t) \neq 0$ pe $[c, d]$. Atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemplu 9.13. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

Fie $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Fie $x_k = \frac{k}{n}$ punctele diviziunii echidistante a intervalului $[0,1]$

$$x_0 = 0 < x_1 = \frac{1}{n} < x_2 = \frac{2}{n} < \cdots < x_n = \frac{n}{n} = 1.$$

Alegem punctele intermediare $\xi_k = \frac{k}{n} \in [x_{k-1}, x_k]$. Fie funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Atunci S_n se poate scrie ca o sumă Riemann

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Fiindcă f este continuă pe $[0,1]$ ea este integrabilă pe $[0,1]$. Va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Exemplu 9.14. Să se calculeze $\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x$.

Folosim integrarea prin părţi.

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x\,\mathrm{d}x &= \int_1^e x' \cdot \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)'\,\mathrm{d}x \\ &= e\ln e - \ln 1 - \int_1^e \mathrm{d}x = e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

Exemplu 9.15. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

Folosim schimbarea de variabilă $x^2 = t$. Diferenţiind se obţine $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Pentru $x = 0$ avem $t = 0$, iar pentru $x = 1$ rezultă $t = 1$. Cu acestea

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2)^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8}.$$