Curs 10

Integrale improprii

Definiţie 10.1. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte ***local integrabilă*** dacă f este integrabilă pe orice interval mărginit şi închis $[c, d] \subseteq I$.

Tratăm separat cazul când intervalul I este mărginit şi când intervalul I este nemărginit.

10.1 Integrale improprii pe interval mărginit

Am văzut că o funcţie integrabilă Riemann este o funcţie mărginită. Să considerăm două exemple de funcţii nemărginite care ne permit să extindem noţiunea de integrabilitate.

Exemplu 10.2. Fie funcţia $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Se observă uşor că funcţia f este nemărginită, pentru că

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

Funcţia f este integrabilă pe orice interval $[t, 1]$, $t > 0$ şi

$$\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2 - 2\sqrt{t}.$$

În acest caz,

$$\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \searrow 0}(2 - 2\sqrt{t}) = 2.$$

Exemplu 10.3. Fie funcţia $g : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Se observă că funcţia g este nemărginită în 0, pentru că

$$\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Funcţia g este integrabilă pe orice interval $[t, 1]$, $t > 0$ şi

$$\int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_t^1 = -\ln t.$$

În acest caz,

$$\lim_{t \searrow 0} \int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{t \searrow 0} \ln t = +\infty.$$

Definiţie 10.4. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul a care local integrabilă. Dacă limita $\lim\limits_{t \searrow a} \displaystyle\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este ***integrabilă impropriu*** pe $(a, b]$. În acest caz, integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se numeşte integrala improprie a funcţiei f pe $(a, b]$ şi spunem că ea este convergentă. Prin definiţie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \searrow a} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu 10.5. Din exemplele anterioare f este integrabilă impropriu pe $(0, 1]$, dar g nu. Spunem că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă. În plus

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$

Definiţie 10.6. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul b care este integrabilă pe orice interval $[a, t]$, $t < b$. Dacă limita $\lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este ***integrabilă impropriu*** pe $[a, b)$, iar integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. În acest caz notăm

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t \nearrow b} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Definiţie 10.7. Fie $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctele a şi b. Spunem că f este integrabilă impropriu pe (a, b) dacă f este integrabilă impropriu pe intervalele $(a, c]$ şi $[c, b)$, pentru orice $c \in (a, b)$. În acest caz,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definiţie 10.8. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul $c \in (a, b)$. Spunem că f este ***integrabilă impropriu*** pe $[a, b]$ dacă f este integrabilă impropriu pe intervalele $[a, c)$ şi $(c, b]$. În acest caz,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie 10.9. Definiţia se poate extinde pentru oricâte puncte aflate în interiorul intervalului în care funcţia este nemărginită.

Definiţie 10.10. Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul $c \in (a, b)$. Dacă $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sunt divergente având valorile $\pm\infty$, atunci ***valoarea principală*** a integralei improprii $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se defineşte prin

$$vp \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu 10.11. Fie integrala improprie $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Aceasta este divergentă, deoarece $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ şi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ sunt divergente. Valoarea principală este

$$vp \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x| \Big|_{\varepsilon}^{1} = \ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon = 0.$$

Definiţie 10.12. Fie I un interval mărginit şi fie $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în cel puţin un punct din $[a, b]$, unde $[a, b]$ este mulţimea punctelor de acumulare ale intervalului I. Spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este ***absolut convergentă*** dacă integrala $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Definiţie 10.13. O integrală improprie absolut convergentă este convergentă. În acest caz, are sens să studiem convergenţa integralelor improprii doar pentru funcţii pozitive.

Teoremă 10.14 (Criteriul comparaţiei)**.** Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ sunt local integrabile astfel încât

$$0 \le f(x) \le g(x), \text{ pentru orice } x \in [c, b),\ c > a.$$

1. Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
2. Dacă $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ atunci $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Teoremă 10.15. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, nemărginită în b, pozitivă pe $[a, b)$. Dacă există limita

$$\ell = \lim_{x \nearrow b} (b - x)^\alpha f(x)$$

atunci
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \ge 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \ge 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Teoremă 10.16. Fie $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, nemărginită în a, pozitivă pe $(a, b]$. Dacă există limita

$$\ell = \lim_{x \searrow a} (x - a)^\alpha \cdot f(x)$$

atunci
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \ge 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \ge 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu 10.17. Să studiem convergenţa integralei $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$.

Funcţia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)}}$ este o funcţie pozitivă, local integrabilă şi nemărginită în a şi b. Studiem integrabilitatea improprie a funcţiei f pe (a, b). Conform definiţiei studiem convergenţa integralelor improprii din f pe intervalele $(a, c]$ şi $[c, b)$. Pentru că

$$\lim_{x \searrow a} (x - a)^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{|a|}{\sqrt[3]{b - a}} > 0$$

şi $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ rezultă că integrala $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

De asemenea, pentru că

$$\lim_{x \nearrow b} (b - x)^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{|b|}{\sqrt[3]{b - a}} > 0$$

şi $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ rezultă că integrala $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

În concluzie, integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, ceea ce arată că $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă.

Exemplu 10.18. Să se studieze convergenţa integralei improprii $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Pentru că funcţia de sub integrală este negativă, considerăm funcţia $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}$, care este pozitivă, local integrabilă şi nemărginită în 1. Din

$$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^2 \cdot f(x) = \lim_{x\nearrow 1} -\ln(1-x) = +\infty.$$

şi $\alpha = 2 > 1$ rezultă că integrala $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă, ceea ce arată că $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

10.2 Integrale improprii pe interval nemărginit

Să considerăm două exemple de funcţii definite pe interval nemărginit care ne permit să extindem noţiunea de integrabilitate.

Exemplu 10.19. Fie funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Funcţia f este integrabilă pe orice interval $[0,t]$, $t > 0$ şi

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x\Big|_0^t = \operatorname{arctg} t.$$

În acest caz,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

Exemplu 10.20. Fie funcţia $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Funcţia g este integrabilă pe orice interval $[0,t]$, $t > 0$ şi

$$\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x|\Big|_0^t = \ln(1+t).$$

În acest caz,

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\ln(1+t) = +\infty.$$

Definiţie 10.21. Fie $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Dacă $\lim\limits_{t\to\infty}\displaystyle\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este ***integrabilă impropriu*** pe $[a,\infty)$. În acest caz, integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă şi se numeşte integrala improprie a funcţiei f pe $[a,\infty)$. Prin definiţie ea are valoarea

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu 10.22. Din exemplele anterioare f este integrabilă impropriu pe $[0,\infty)$, dar g nu. Spunem că $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă. În plus

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Definiţie 10.23. Fie $f : (-\infty, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Dacă $\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este ***integrabilă impropriu*** pe $(-\infty, b]$, iar integrala $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. În acest caz notăm

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Definiţie 10.24. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Spunem că f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{R}$ dacă f este integrabilă impropriu pe intervalele $(-\infty, c]$ şi $[c, \infty)$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$. În acest caz,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definiţie 10.25. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Dacă $\int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sunt divergente, atunci valoarea principală a integralei improprii $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este valoarea limitei

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemplu 10.26. Integrala $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ este divergentă, deoarece integralele $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ şi $\int_{-\infty}^0 \sin x\,\mathrm{d}x$ sunt divergente. Într-adevăr, limita

$$\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{t\to\infty} \cos t$$

nu există. Dar, valoarea principală a integralei $\int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ este

$$vp \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^{t} \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

Teoremă 10.27 (Criteriul comparaţiei)**.** Fie $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sunt local integrabile astfel încât

$$0 \le f(x) \le g(x),\ \text{pentru orice}\ x \in [b, \infty),\ b > a.$$

1. Dacă $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă atunci $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
2. Dacă $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ atunci $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Teoremă 10.28. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, pozitivă pe $[a, \infty)$. Dacă există limita

$$\ell = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x)$$

atunci
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \le 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \le 1$ integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Exemplu 10.29. Să studiem convergenţa integralei $\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.

Funcţia $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^3}$ este o funcţie pozitivă şi local integrabilă. Pentru că

$$\lim_{x\to\infty} x^{6-\frac{1}{3}} \cdot f(x) = 1$$

şi $\alpha = 6 - \frac{1}{3} > 1$ rezultă că integrala $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Teoremă 10.30 (Dirichlet)**.** Fie f o funcţie continuă pe $[a,\infty)$ astfel încât primitiva $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ este mărginită pe $[a,\infty)$. Presupunem că $g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ este derivabilă, descrescătoare, cu $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Atunci

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

Exemplu 10.31. Integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Pentru a arăta că este convergentă, aplicăm criteriul lui Dirichlet. Funcţia f definită prin $f(x) = \sin x$ este continuă pe $[1,\infty)$ având primitive mărginite

$$\int_1^t \sin x\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \cos t.$$

Funcţia $g(x) = \frac{1}{x}$ este derivabilă, descrescătoare, cu limita zero la infinit. Deci, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Presupunem că integrala este absolut convergentă. Atunci, din inegalitatea

$$|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

şi din faptul că integrala $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă (criteriul lui Dirichlet), rezultă că integrala

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \leq \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, contradicţie cu

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln t = +\infty.$$