Curs 11

Integrale cu parametri

Definiţie 11.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă şi fie $f : A \times [c, d] \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ funcţia $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, \cdot)$ este integrabilă pe $[c, d]$. Atunci

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_c^d f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)\,\mathrm{d}y$$

se numeşte ***integrală cu parametri*** $x_1, \ldots, x_n$.

Teoremă 11.2. Dacă $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este continuă atunci integrala cu parametru

$$g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

este o funcţie continuă pe $[a, b]$. Putem scrie

$$\lim_{h\to 0} \int_c^d f(x + h, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \lim_{h\to 0} f(x + h, y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

În plus g este integrabilă pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Teoremă 11.3. Dacă $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este derivabilă în raport cu prima variabilă şi $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$ atunci $g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ este derivabilă având derivata continuă pe $[a, b]$. În plus,

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Observaţie 11.4. Dacă $\alpha, \beta : [a, b] \to [c, d]$ sunt funcţii derivabile şi $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este derivabilă în raport cu prima variabilă şi $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $[a, b] \times [c, d]$ atunci $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

este derivabilă şi

$$g'(x) = \beta'(x) \cdot f(x, \beta(x)) - \alpha'(x) \cdot f(x, \alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Exemplu 11.5. Să se calculeze $I'(a)$ unde $I(a) = \displaystyle\int_2^a \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x$, $a > 2$.

Avem

$$I'(a) = \frac{e^{-a^2}}{a} - \int_2^a e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-a^2}}{a} + \left.\frac{e^{-ax}}{a}\right|_2^a = \frac{2e^{-a^2} - e^{-2a}}{a}.$$

Exemplu 11.6. Să se calculeze

$$\lim_{t\searrow 0} \int_0^1 \frac{(x+t)^3 - 1}{\ln(x+t)}\,\mathrm{d}x.$$

Folosind formula $\int a^y\,\mathrm{d}y = \frac{a^y}{\ln a}$, scriem succesiv

$$\begin{aligned}
\lim_{t\searrow 0} \int_0^1 \frac{(x+t)^3 - 1}{\ln(x+t)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\searrow 0} \int_0^1 \left.\frac{(x+t)^y}{\ln(x+t)}\right|_{y=0}^{y=3}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\searrow 0} \int_0^1 \left(\int_0^3 (x+t)^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\searrow 0} \int_0^3 \left(\int_0^1 (x+t)^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\searrow 0} \int_0^3 \left.\frac{(x+t)^{y+1}}{y+1}\right|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\searrow 0} \int_0^3 \frac{(1+t)^{y+1} - t^{y+1}}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \lim_{t\searrow 0} \frac{(1+t)^{y+1} - t^{y+1}}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \ln 4.
\end{aligned}$$

11.1 Integrale improprii cu parametri

Considerăm cazul unui interval nemărginit.

Definiţie 11.7. Fie funcţia $f : [a,b] \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x \in [a,b]$ integrala improprie $\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$ este convergentă. Atunci funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

se numeşte ***integrală improprie cu parametru***.

Definiţie 11.8. Integrala $\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$ este ***uniform convergentă*** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > c$ astfel încât pentru orice $d_2 > d_1 > \delta$ şi pentru orice $x \in [a,b]$ să avem

$$\left|\int_{d_1}^{d_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

Observaţie 11.9. Fie un şir strict crescător de numere reale (d_n) astfel încât $d_0 = c$ şi $d_n \to \infty$. Atunci integrala improprie cu parametru se poate scrie ca o serie de funcţii:

$$\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^\infty \int_{d_{n-1}}^{d_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^\infty z_n(x), \qquad z_n(x) = \int_{d_{n-1}}^{d_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Folosind Criteriul lui Cauchy pentru serii de funcţii şi uniform convergenţa integralei improprii cu parametru, din

$$|z_{n+1}(x) + \cdots + z_{n+p}(x)| = \left| \int_{d_n}^{d_{n+p}} f(x,y)\, \mathrm{d}y \right|$$

rezultă uniform convergenţa seriei de funcţii. Aplicând proprietăţile seriilor uniform convergente putem demonstra următoarele proprietăţi.

Teoremă 11.10. Fie funcţia $f : [a,b] \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât integrala improprie $\int_c^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}y$ este uniform convergentă. Atunci funcţia $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \int_c^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}y$$

este continuă şi în plus

$$\int_a^b \left(\int_c^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x,y)\, \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Teoremă 11.11. Fie funcţia $f : [a,b] \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$ continuă astfel încât integralele $g(x) = \int_c^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}y$ sunt convergente pentru orice $x \in [a,b]$. În plus f este derivabilă parţial în raport cu prima variabilă x şi integrala $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, \mathrm{d}y$ este uniform convergentă. Atunci g este derivabilă şi

$$g'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, \mathrm{d}y.$$

Având îun vedere importanţa uniform convergenţei unei integrale improprii cu parametru să dăm următorul criteriu, care se poate demonstra folosind criteriul lui Weierstrass de uniform convergenţă a seriilor.

Teoremă 11.12. Fie $f : [a,b] \times [c,\infty) \to \mathbb{R}$. Dacă există o funcţie $M : [c,\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $|f(x,y)| \le M(y)$, pentru orice $x \in [a,b]$ şi orice $y \ge c$ şi integrala $\int_c^\infty M(y)\, \mathrm{d}y$ este convergentă, atunci integrala $\int_c^\infty f(x,y)\, \mathrm{d}y$ este uniform convergentă pe $[a,b]$.

11.2 Funcţiile Gamma şi Beta ale lui Euler

Funcţia Gamma

Definiţie 11.13. Funcţia $\Gamma : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x.$$

Observaţie 11.14. Să observăm că funcţia este corect definită. Scriem

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x.$$

Pentru că

$$\lim_{x \searrow 0} x^{1-a} \cdot e^{-x} x^{a-1} = 1$$

integrala $\int_0^1 e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $1 - a < 1$, adică $a > 0$.

Din

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x} x^{a-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0$$

rezultă convergenţa integralei $\int_1^\infty e^{-x} x^{a-1}\, \mathrm{d}x$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Teoremă 11.15 (Proprietăţile funcţiei Gamma)**.** Au loc următoarele relaţii:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ a > 0$
3. $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$
4. $\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin \pi a},\ a \in (0,1)$
5. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Exemplu 11.16. Să se calculeze $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

Folosind relaţia de recurenţă $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ se obţine

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

Observaţie 11.17. Să observăm că folosind relaţia de recurenţă, putem extinde funcţia Gamma şi pe axa reală negativă.

Pentru $a < 0$ definim

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \frac{\Gamma(a+1)}{a}, \quad a \in (-1,0)\\
\Gamma(a) &= \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)}, \quad a \in (-2,-1)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma(a) &= \frac{\Gamma(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)}, \quad a \in (-n-1,-n).
\end{aligned}$$

Funcţia Beta

Definiţie 11.18. Funcţia $\beta : (0,\infty)\times(0,\infty) \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie 11.19. Să observăm că funcţia este corect definită. Scriem

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru că

$$\lim_{x\searrow 0} x^{1-a}\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} = 1$$

integrala $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $1-a<1$, adică $a>0$.

Din

$$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{1-b}\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} = 1$$

rezultă convergenţa integralei $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ este asigurată dacă $1-b<1$, adică $b>0$.

Teoremă 11.20 (Proprietăţile funcţiei beta)**.** Au loc următoarele relaţii:

1. $\beta(a, b) = \beta(b, a)$
2. $\beta(a, b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$
3. $\beta(a, b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right).$

Exemplu 11.21. Să se calculeze integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Facem schimbarea de variabilă $x^n = t$. Avem $\mathrm{d}x = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$. Atunci

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} \cdot \beta\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n \sin\frac{\pi}{n}}.$$