Curs 12

Integrale curbilinii

12.1 Drumuri şi curbe

Definiţie 12.1. O funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ se numeşte ***drum plan*** dacă $m = 2$ sau ***drum în spaţiu*** dacă $m = 3$. Punctul $\gamma(a)$ se numeşte ***originea*** drumului, iar $\gamma(b)$ reprezintă ***extremitatea*** drumului. Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ drumul se numeşte ***închis***. Mulţimea $\gamma([a, b])$ se numeşte ***urma/traiectoria/imaginea/suportul*** drumului.

Observaţie 12.2. Dacă $m = 3$ putem scrie drumul γ specificând componentele funcţiei vectoriale $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sau

$$\gamma\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

iar dacă $m = 2$, componenta a treia, z, lipseşte.

Exemplu 12.3. Drumul descris de

$$\begin{cases} x = (1 - t)x_A + tx_B, \\ y = (1 - t)y_A + ty_B, \\ z = (1 - t)z_A + tz_B, \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

are ca suport segmentul AB, parcurs de la $A(x_A, y_A, z_A)$ la $B(x_B, y_B, z_B)$.

Exemplu 12.4. Drumul descris de

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos t, \\ y = y_0 + r\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

este drumul plan închis ce are ca suport cercul de ecuaţie $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, cu centrul (x_0, y_0) şi raza r, care este parcurs în sens trigonometric având originea şi extremitatea în punctul $(x_0 + r, y_0)$.

Definiţie 12.5. Drumul $\gamma^- : [a, b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$ se numeşte ***inversul*** drumului γ.

Observaţie 12.6. Să observăm că $\gamma^-(a) = \gamma(b)$, $\gamma^-(b) = \gamma(a)$ şi $\gamma^-([a, b]) = \gamma([a, b])$. Drumul γ^- are aceeşi urmă ca şi drumul iniţial, dar este parcurs în sens invers de la extremitatea drumului iniţial la originea acestuia.

Definiţie 12.7. Fie $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ şi $\gamma_2 : [b, c] \to \mathbb{R}^m$ două drumuri cu proprietatea că extremitatea primului coincide cu originea celui de-al doilea $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$. Atunci putem defini ***reuniunea/juxtapunerea/compunerea*** drumurilor ca fiind drumul notat $\gamma_1 \cup \gamma_2 : [a, c] \to \mathbb{R}^m$, definit prin

$$(\gamma_1 \cup \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Definiţie 12.8. Fiind dat un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ şi o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$

$$t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b,$$

drumurile $\gamma_k : [t_{k-1}, t_k] \to \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2, \ldots, n$ definite prin $\gamma_k(t) = \gamma(t)$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$ formează ***descompunerea*** drumului γ asociată diviziunii Δ. Putem scrie

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n.$$

Definiţie 12.9. Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ se numeşte ***neted*** dacă aplicaţia γ este de clasă C^1 pe $[a, b]$ şi $\gamma'(t) \neq 0$, pentru orice $t \in [a, b]$. Drumul γ se numeşte ***neted pe porţiuni*** dacă există o descompunere $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \cdots \cup \gamma_n$ astfel încât toate drumurile γ_k sunt netede.

Observaţie 12.10. Un drum în spaţiu este neted dacă componentele sale x, y, z sunt funcţii derivabile cu derivatele funcţii continue pe $[a, b]$ şi $(x'(t), y'(t), z'(t)) \neq (0, 0, 0)$, pentru orice $t \in [a, b]$.

Definiţie 12.11. Două drumuri $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ şi $\gamma_2 : [c, d] \to \mathbb{R}^m$ sunt ***echivalente*** dacă există o funcţie $h : [a, b] \to [c, d]$ strict crescătoare şi continuă astfel încât $h(a) = c$ şi $h(b) = d$ şi $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

Observaţie 12.12. Dacă notăm prin $\gamma_1 \sim \gamma_2$ faptul că γ_1 şi γ_2 sunt drumuri echivalente, atunci relaţia binară $\sim$ reprezintă o relaţie de echivalenţă.

Într-adevăr, alegând $h(t) = t$ avem $\gamma \sim \gamma$, ceea ce arată proprietatea de reflexivitate.

Pentru că h e strict crescătoare, ea este injectivă, iar pentru că h e continuă şi $h(a) = c$ şi $h(b) = d$ rezultă că $h([a, b]) = [c, d]$ şi deci h este surjectivă, ceea ce implică faptul că h este bijectivă. Astfel, există inversa funcţiei h, care este o funcţie continuă, strict crescătoare şi $h^{-1}(c) = a$ şi $h^{-1}(d) = b$. În plus, avem $\gamma_2 = \gamma_1 \circ h^{-1}$. Am demonstrat că $\gamma_1 \sim \gamma_2$ implică $\gamma_2 \sim \gamma_1$, ceea ce reprezintă proprietatea de simetrie.

Ne rămâne să verificăm faptul că relaţia $\sim$ este tranzitivă. Fie $\gamma_1 \sim \gamma_2$ şi $\gamma_2 \sim \gamma_3$. Atunci există $h : [a, b] \to [c, d]$ şi $g : [c, d] \to [e, f]$ strict crescătoare şi continue cu $h(a) = c$, $h(b) = d$ şi $g(c) = e$, $g(d) = f$ cu proprietatea că $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$ şi $\gamma_2 = \gamma_3 \circ g$. Funcţia $i = g \circ h : [a, b] \to [e, f]$ are proprietatea că $i(a) = g(h(a)) = g(c) = e$ şi $i(b) = f$. În plus, i este strict crescătoare şi continuă şi $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h = (\gamma_3 \circ g) \circ h = \gamma_3 \circ (g \circ h) = \gamma_3 \circ i$, ceea ce demonstrează că $\gamma_1 \sim \gamma_3$.

Definiţie 12.13. Se numeşte ***curbă*** o clasă de drumuri echivalente. Fiind dată o curbă, un drum care o reprezintă se numeşte ***parametrizare*** a curbei.

Exemplu 12.14. Drumul $\gamma_1(t) = (\sin t, \cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ este echivalent cu drumul $\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1 - t^2})$, $t \in [0, 1]$. Într-adevăr, funcţia $h : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to [0, 1]$, $h(t) = \sin t$ este strict crescătoare şi continuă cu $h(0) = 0$ şi $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ şi în plus $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

Ambele drumuri γ_1 şi γ_2 reprezintă parametrizări ale aceleaşi curbe: sfertul de cerc din primul cadran parcurs de la $(0, 1)$ la $(1, 0)$.

Observaţie 12.15. O curbă este mulţimea tuturor drumurilor echivalente care au un suport dat şi un sens de parcurs precizat.

O curbă plană se poate specifica în 4 forme:
1) forma parametrică: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$
2) forma vectorială: $\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$, $t \in [a, b]$
3) forma explicită: $y = f(x)$, $x \in [a, b]$
4) forma implicită: $F(x, y) = 0$ şi descrierea sensului de parcurs.

O curbă în spaţiu se poate specifica în 3 forme:
1) forma parametrică: $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$
2) forma vectorială: $\vec{r} = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{\kappa}$, $t \in [a, b]$
3) ca intersecţie de două suprafeţe

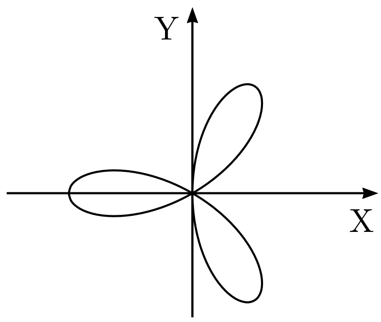
$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

şi descrierea sensului de parcurs.

Definiţie 12.16. Se numeşte curbă ***simplă*** o curbă cu parametrizarea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^m$ funcţie injectivă pe $[a, b)$ (adică la valori distincte ale parametrului corespund puncte distincte pe suportul curbei [cu excepţia, poate, a capetelor în cazul unei curbe închise]).

Exemplu 12.17. Un exemplu de curbă care nu este simplă este curba descrisă parametric prin ecuaţiile

$$\begin{cases} x = -\cos 3t \cos t, \\ y = -\cos 3t \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, \pi].$$



Punctul $(0, 0)$ se obţine pentru trei valori distincte ale parametrului t: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$ şi $\frac{5\pi}{6}$. Un astfel de punct se numeşte punct triplu. Curba se numeşte trifoi.

12.2 Integrale curbilinii de speţa I

Definiţie 12.18. Fie $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ o funcţie şi C o curbă care are suportul inclus în D. Numim ***integrală curbilinie de speţa I a funcţiei*** f ***pe curba*** C numărul real I (dacă un astfel de număr există) cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice alegere a punctelor M_k în ordine pe curbă cu proprietatea că M_0 este originea curbei, M_n este extremitatea curbei C, iar fiecare segment $M_{k-1}M_k$ are lungimea mai mică decât δ (putem scrie $\ell(M_{k-1}M_k) < \delta$) şi pentru orice alegere a punctelor N_k de pe curbă aflate între M_{k-1} şi M_k să aibă loc

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(N_k) \cdot \ell(M_{k-1}M_k) \right| < \varepsilon.$$

Notaţie 12.19. Dacă există numărul I atunci el este unic şi se notează $\int_C f \, \mathrm{d}s$.

Interpretare 12.20. Să considerăm un exemplu practic care a condus la noţiunea de integrală curbilinie de speţa I. Avem un fir material de grosime neglijabilă în raport cu lungimea având forma curbei C. În fiecare punct al curbei avem o anumită densitate dată de funcţia $\rho : C \to \mathbb{R}$. Ne propunem să calculăm masa firului material.

Aproximăm curba C cu linia poligonală $M_0M_1 \dots M_n$, unde M_k sunt puncte luate în ordine pe curbă. Aproximăm masa firului material cu masa liniei poligonale construite, presupunând că densitatea pe fiecare segment al liniei poligonale este constantă şi are ca valoare densitatea unui anumit punct N_k de pe curbă aflat între M_{k-1} şi M_k. Masa fiecărui segment omogen este produsul dintre densitatea segmentului şi lungimea segmentului. Masa liniei poligonale va fi

$$\sum_{k=1}^{n} \text{masa}(M_{k-1}M_k) = \sum_{k=1}^{n} \rho(N_k) \cdot \ell(M_{k-1}M_k).$$

La limită, atunci când numărul de puncte de pe curbă creşte la infinit, această sumă tinde la masa firului material.

Observaţie 12.21. Masa firului material se calculează cu formula $m = \int_C \rho \, \mathrm{d}s$. Dacă firul este omogen şi $\rho = 1$ atunci masa coincide cu lungimea firului. Formula pentru lungimea unei curbe este

$$\ell(C) = \int_C \mathrm{d}s.$$

Teoremă 12.22 (Formula de calcul a integralei curbilinii de speţa I)**.** Dacă C este o curbă netedă reprezentată parametric prin

$$C\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(y), \\ z = z(t), \end{cases} \quad t \in [a, b]$$

şi $f : C \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă atunci

$$\int_C f(x, y, z) \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, \mathrm{d}t.$$

Observaţie 12.23. Integrala nu depinde de parametrizare.

Teoremă 12.24. Fie C o curbă netedă pe porţiuni şi fie C_k curbele netede care alcătuiesc descompunerea curbei C. Atunci

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_{C_1 \cup \dots \cup C_n} f \, \mathrm{d}s = \int_{C_1} f \, \mathrm{d}s + \dots + \int_{C_n} f \, \mathrm{d}s.$$

Teoremă 12.25. Fie C o curbă netedă şi fie C^- curba parcursă în mod invers. Atunci

$$\int_C f \, \mathrm{d}s = \int_{C^-} f \, \mathrm{d}s.$$

Exemplu 12.26. Să se calculeze lungimea unui cerc.

Considerăm cercul cu centrul de coordonate (x_0, y_0) şi rază r. Parametrizarea acestui cerc parcurs în sens trigonometric este

$$C\colon \begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Avem

$$\begin{aligned} \ell(C) &= \int_C \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} \, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} r \, \mathrm{d}t = 2\pi r. \end{aligned}$$

12.3 Integrale curbilinii de speţa II

Definiţie 12.27. Fie $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o funcţie vectorială $f = (P, Q, R)$ şi C o curbă care are suportul inclus în D. Numim ***integrală curbilinie de speţa a II-a a funcţiei*** f ***pe curba*** C numărul real I (dacă un astfel de număr există) cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice alegere a punctelor $M_k(x_k, y_k, z_k)$ în ordine pe curbă cu proprietatea că M_0 este originea curbei, M_n este extremitatea curbei C, iar fiecare segment $M_{k-1}M_k$ are lungimea mai mică decât δ şi pentru orice alegere a punctelor N_k de pe curbă aflate între M_{k-1} şi M_k să aibă loc

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} P(N_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(N_k)(y_k - y_{k-1}) + R(N_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

Notaţie 12.28. Dacă există numărul I din definiţie atunci el este unic şi se notează $\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$.

Interpretare 12.29. Să considerăm un exemplu practic care a condus la noţiunea de integrală curbilinie de speţa a II-a. Ne propunem să calculăm lucrul mecanic L al unei forţe $\vec{F}$ ce acţionează asupra unui punct ce se deplasează pe curba C.

Aproximăm curba C cu linia poligonală $M_0M_1 \ldots M_n$, unde M_k sunt puncte luate în ordine pe curbă. Aproximăm lucrul mecanic L cu lucrul mecanic al unui punct ce se deplasează pe linia poligonală construită, presupunând că forţa pe fiecare segment al liniei poligonale este constantă şi are aceeaşi valoare ca forţa ce acţionează asupra unui anumit punct N_k de pe curbă aflat între M_{k-1} şi M_k. Lucru mecanic de pe fiecare segment este produsul scalar dintre forţă şi deplasare. Lucrul mecanic pe linia poligonală va fi

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{F}(N_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} P(N_k)(x_k - x_{k-1}) + Q(N_k)(y_k - y_{k-1}) + R(N_k)(z_k - z_{k-1}).$$

La limită, această sumă tinde la lucrul mecanic L.

Observaţie 12.30. Dacă $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ este vectorul de poziţie, atunci vectorul deplasare este $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{\imath} + \mathrm{d}y\vec{\jmath} + \mathrm{d}z\vec{\kappa}$. Cu aceasta, putem scrie

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r},$$

care se mai numeşte circulaţia vectorului $\vec{F}$ de-a lungul curbei C. Dacă curba C este închisă, atunci pentru integrală se mai foloseşte şi notaţia $\oint_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$.

Teoremă 12.31 (Formula de calcul a integralei curbilinii de speţa a II-a)**.** Dacă C este o curbă netedă reprezentată parametric prin

$$C\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(y), & t \in [a, b] \\ z = z(t), \end{cases}$$

şi $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{\kappa}$, unde P, Q, R sunt funcţii continue pe un domeniu ce conţine suportul lui C, atunci

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\,\mathrm{d}t.$$

Observaţie 12.32. Integrala nu depinde de parametrizare.

Teoremă 12.33. Fie C o curbă netedă pe porţiuni şi fie C_k curbele netede care alcătuiesc descompunerea curbei C. Atunci

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1\cup\cdots\cup C_n} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} + \cdots + \int_{C_n} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

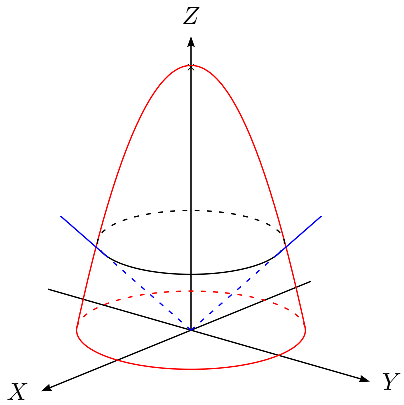
Teoremă 12.34. Fie C o curbă netedă şi fie C^- curba parcursă în mod invers. Atunci

$$\int_C \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{C^-} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}.$$

Exemplu 12.35. Să se calculeze $\int_C z^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z$, unde C este curba aflată la intersecţia conului $z = \sqrt{x^2+y^2}$ cu paraboloidul $z = 6-(x^2+y^2)$, iar sensul de parcurgere al curbei este sensul orar dacă curba este privită din origine.

La intersecţia conului $z = \sqrt{x^2+y^2}$ cu paraboloidul $z = 6-(x^2+y^2)$ se găseşte un cerc. Ecuaţia cercului se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 6-(x^2+y^2). \end{cases}$$



Obţinem $z = 2$ şi $x^2+y^2 = 4$. Putem să parametrizăm acest cerc în felul următor:

$$C\colon \begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \qquad t\in[0,2\pi]. \\ z = 2, \end{cases}$$

Pentru calculul integralei avem

$$\begin{aligned} I &= \int_C z^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + (x^2+y^2)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} [4(-2\sin t) + 2\cos t(2\cos t)]\,\mathrm{d}t \\ &= -8\int_0^{2\pi} \sin t\,\mathrm{d}t + 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 8\cos t\Big|_0^{2\pi} + 2\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = 4\pi. \end{aligned}$$

12.4 Forme diferenţiale exacte

Definiţie 12.36. Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi fie $P,Q,R: D\to\mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1. Expresia

$$\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

se numeşte ***formă diferenţială de ordinul întâi*** pe D.

Definiţie 12.37. Forma diferenţială

$$\omega = P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

se numeşte ***exactă*** dacă există o funcţie $\phi\in C^1(D)$ cu proprietatea că

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \qquad Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \qquad R = \frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

Funcţia ϕ se numeşte ***primitiva*** formei diferenţiale exacte ω.

Teoremă 12.38 (Formula lui Leibniz-Newton pentru forme diferenţiale exacte)**.** Dacă $\gamma : [a, b] \to D$, $D \subset \mathbb{R}^3$ un drum de clasă C^1, iar $\phi : D \to \mathbb{R}$ o primitivă a formei diferenţiale exacte ω, atunci

$$\int_\gamma \omega = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a)).$$

Definiţie 12.39. O mulţime $D \subset \mathbb{R}^3$ este ***deschisă*** dacă pentru orice $(x_0, y_0, z_0) \in D$ există un $r > 0$ astfel încât mulţimea

$$\left\{ (x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2 \right\}$$

este inclusă în D. Altfel spus, o mulţime este deschisă dacă pentru orice punct al mulţimii, mulţimea include cel puţin o bilă centrată în punctul ales.

Definiţie 12.40. O mulţime $D \subset \mathbb{R}^3$ este ***conexă*** dacă nu există două mulţimi deschise $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}^3$ astfel încât

$$D_1 \cap D \neq \emptyset, \quad D_2 \cap D \neq \emptyset, \quad D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad D \subset D_1 \cup D_2.$$

Cu alte cuvinte, o mulţime este conexă dacă este formată dintr-o singură bucată.

Teoremă 12.41 (Teorema de caracterizare a formelor diferenţiale exacte)**.** Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi conexă şi ω o formă diferenţială pe D. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
1) ω este o formă diferenţială exactă
2) pentru orice drum închis γ cu suportul inclus în D avem $\int_\gamma \omega = 0$
3) $\int_\gamma \omega$ nu depinde de drum.

Teoremă 12.42. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă. Dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este o formă diferenţială exactă, iar ϕ este o primitivă de clasă $C^2(D)$ a formei diferenţiale ω, atunci

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Definiţie 12.43. O mulţime $D \subset \mathbb{R}^3$ este ***stelată*** dacă există cel puţin un punct $a \in D$ cu proprietatea că pentru orice $x \in D$ segmentul $[a, x]$ este inclus în întregime în D.

Teoremă 12.44. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi stelată. Dacă $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$, $P, Q, R \in C^1(D)$ este o formă diferenţială cu proprietatea că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

atunci ω este o formă diferenţială exactă.

Observaţie 12.45. Teorema anterioară ne arată în ce condiţii o formă diferenţială este exactă. Primitiva acestei forme diferenţiale se determină cu formula

$$\phi(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,\mathrm{d}t.$$

În plan, formula pentru primitiva unei forme diferenţiale exacte $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ este

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,\mathrm{d}t.$$

Exemplu 12.46. Calculaţi $\displaystyle\int_{(1,0,1)}^{(2,3,4)} yz(2x+y-z)\,\mathrm{d}x + xz(x+2y-z)\,\mathrm{d}y + xy(x+y-2z)\,\mathrm{d}z$.

Fie

$$\begin{aligned} P &= yz(2x+y-z),\\ Q &= xz(x+2y-z),\\ R &= xy(x+y-2z). \end{aligned}$$

Acestea sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^3$ şi

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + 2yz - z^2\\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 + 2xy - 2xz\\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy + y^2 - 2yz. \end{aligned}$$

Pentru că $\mathbb{R}^3$ este stelată, rezultă că forma diferenţială $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ este exactă. Determinăm o primitivă cu formula

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^z xy(x+y-2t)\,\mathrm{d}t = xy(x+y)t - xyt^2\Big|_0^z = xyz(x+y-z). \end{aligned}$$

Pe baza formulei lui Leibniz-Newton

$$\int_{(1,0,1)}^{(2,3,4)} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \phi(2,3,4) - \phi(1,0,1) = 24.$$

Exemplu 12.47. Se dă forma diferenţială

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Să se arate că ω nu este exactă. Să se calculeze $\int_C \omega$, unde C este cercul $x^2+y^2=r^2$ parcurs în sens trigonometric.

Fie $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$ şi $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$. Acestea sunt funcţii de clasă C^1 pe $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, cu proprietatea că

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0).$$

Dacă ω ar fi exactă atunci integrala pe orice curbă închisă din domeniu ar fi 0. Dar

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-r\sin t}{r^2}(-r\sin t) + \frac{r\cos t}{r^2}(r\cos t)\right]\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Acest lucru ne arată că ω nu este exactă. Iar acest fapt, că ω nu este exactă, se explică din faptul că mulţimea $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nu este stelată.