

Curs 13

Integrale duble

13.1 Integrala dublă pe dreptunghi

Definiție 13.1. Fie $D = [a, b] \times [c, d]$. Funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă pe D dacă există numărul real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune a intervalului $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

și orice diviziune a intervalului $[c, d]$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_m = d$$

asa încât $\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} < \delta$, și pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \dots, n$ și $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \dots, m$ să avem

$$\left| I - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \right| < \varepsilon.$$

Notație 13.2. Dacă numărul I există, atunci el este unic și se notează $\iint_D f(x, y) dx dy$.

Interpretare 13.3. Să considerăm un exemplu practic care ne conduce la noțiunea de integrală dublă. Avem o suprafață în forma explicită $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Ne propunem să calculăm volumul V al corpului mărginit de această suprafață, planul XOY și suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu axa OZ și curba directoare frontiera dreptunghiului D .

Împărțim dreptunghiul D în dreptunghiuri mai mici $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$, unde punctele x_k , $k = 1, \dots, n$ reprezintă o diviziune a intervalului $[a, b]$, iar y_j , $j = 1, \dots, m$ reprezintă o diviziune a intervalului $[c, d]$. În fiecare dreptunghi mic considerăm un punct $(\xi_k, \eta_j) \in D_{kj}$. Aproximăm volumul cu suma volumelor paralelipipedelor având ca bază dreptunghiurile D_{ij} și ca înălțime valoarea $f(\xi_k, \eta_j)$. Rezultă

$$V \approx \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \eta_j) \cdot \mathcal{A}(D_{kj}) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La limită se obține volumul V .

Observație 13.4. Volumul corpului mărginit de suprafața $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$, planul XOY și suprafața cilindrică cu generatoarele paralele cu axa OZ și curba directoare frontiera dreptunghiului D se calculează cu formula

$$V = \iint_D f(x, y) \, dx \, dy.$$

Propoziție 13.5. Dacă f este integrabilă pe D atunci f este mărginită pe D .

Propoziție 13.6. Dacă f, g sunt două funcții integrabile pe D și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci funcția $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D și

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y) \, dx \, dy = \alpha \iint_D f(x, y) \, dx \, dy + \beta \iint_D g(x, y) \, dx \, dy.$$

Propoziție 13.7. Dacă f este o funcție integrabilă și pozitivă pe D , atunci

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy \geq 0.$$

Teoremă 13.8 (Formula de calcul). Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție integrabilă pe dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d]$ și pentru orice $x \in [a, b]$ integrala cu parametru $\int_c^d f(x, y) \, dy$ există. Atunci

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx.$$

Observație 13.9. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy.$$

Definiție 13.10. Mulțimea $A \subset \mathbb{R}^2$ are **aria nulă** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există dreptunghiurile D_i , $i = 1, 2, \dots$ astfel încât

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \quad \text{și} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(D_i) < \varepsilon.$$

Exemplu 13.11. Suportul unui drum neted pe porțiuni este o mulțime de arie nulă. Există drumuri a căror suport nu este o mulțime de măsură nulă. Primele exemple au fost construite de Osgood și Lebesgue în 1903¹.

Propoziție 13.12. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție mărginită și $A \subset D$ o mulțime de arie nulă. Dacă f este continuă pe $D \setminus A$ atunci f este integrabilă pe dreptunghiul D .

13.2 Integrale duble pe domenii simple

Definiție 13.13. Fie D o mulțime mărginită și fie un dreptunghi astfel încât $D \subset [a, b] \times [c, d]$. Spunem că $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este **integrabilă pe** D dacă funcția

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \setminus D \end{cases}$$

¹W. Osgood, A Jordan curve of positive area, Transactions of the American Mathematical Society, 4 (1903), 107–112, H. Lebesgue, Sur le problème des aires, Bulletin de la Société Mathématique de France, 31 (1903), 197–203.

este integrabilă pe $[a, b] \times [c, d]$. În acest caz scriem,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{[a,b] \times [c,d]} F(x, y) dx dy.$$

Observație 13.14. Se poate demonstra că valoarea integralei nu depinde de dreptunghiul $[a, b] \times [c, d]$ și nici de funcția F , care prelungește funcția f pe dreptunghi.

Definiție 13.15. Fie $g_1, g_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe $[a, b]$, cu proprietatea că $g_1(x) \leq g_2(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Mulțimea

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

se numește **domeniu simplu față de axa OY**.

Definiție 13.16. Fie $h_1, h_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe $[c, d]$, cu proprietatea că $h_1(y) \leq h_2(y)$ pentru orice $y \in [c, d]$. Mulțimea

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\},$$

se numește **domeniu simplu față de axa OX**.

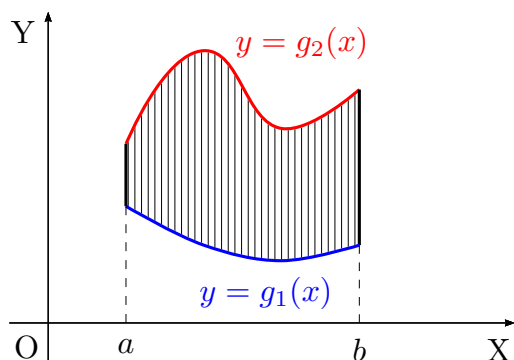


Figura 13.1: Domeniu simplu în raport cu axa OY

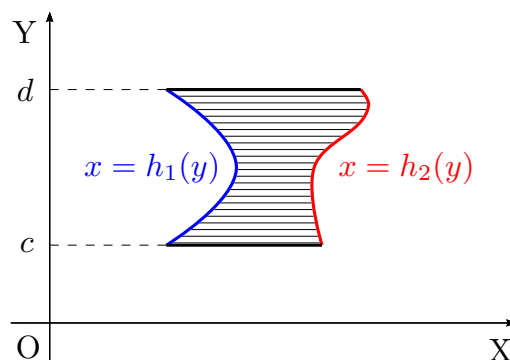


Figura 13.2: Domeniu simplu în raport cu axa OX

Teoremă 13.17. Fie D un domeniu simplu în raport cu axa OY

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

unde g_1, g_2 sunt funcții de clasă C^1 pe $[a, b]$. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Teoremă 13.18. Fie D un domeniu simplu în raport cu axa OX

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

unde h_1, h_2 sunt funcții de clasă C^1 pe $[c, d]$. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

Observație 13.19. Dacă mulțimea D nu este simplă față de niciuna dintre axele de coordonate, atunci împărțim domeniul D în domenii mai mici care sunt simple față de cel puțin una dintre axe și apoi aplică proprietatea de aditivitate a integralei duble față de domeniul de integrare.

Exemplu 13.20. Să se calculeze $\iint_D xy \, dx \, dy$, unde D este domeniul

$$D = \left\{ (x, y) \mid y^2 \leq x, y \geq \frac{x}{2} \right\}.$$

Frontiera domeniului D este dată de parabola $y^2 = x$ și dreapta $y = \frac{x}{2}$. Punctele de intersecție ale celor două curbe se determină rezolvând sistemul

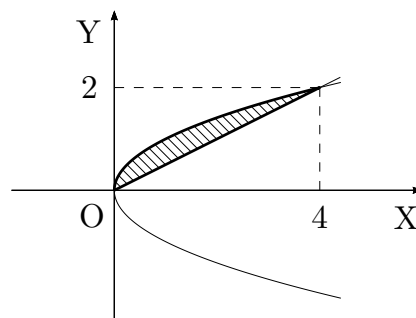
$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Rezultă ecuația $y^2 = 2y$, adică $y^2 - 2y = 0$, cu soluțiile $y = 0$ și $y = 2$. Pentru $y = 0$, obținem $x = 0$, iar pentru $y = 2$, avem $x = 4$. Putem scrie

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 4, \frac{x}{2} \leq y \leq \sqrt{x} \right\}.$$

Rezultă

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx = \int_0^4 x \frac{y^2}{2} \Big|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) dx = \frac{8}{3}.$$



Aplicații ale integralei duble

Definiție 13.21. Spunem că o mulțime plană mărginită D are arie dacă funcția caracteristică a mulțimii

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \end{cases}$$

este o funcție integrabilă pe \mathbb{R}^2 . În acest caz, aria mulțimii D se calculează cu formula

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx \, dy.$$

Exemplu 13.22. Masa unei plăci plane de grosime neglijabilă care are forma unui domeniu plan D , iar densitatea punctuală este dată de funcția $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}$ se calculează cu formula

$$m = \iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy.$$

Centrul de greutate al plăcii are coordonatele

$$x_G = \frac{\iint_D x \rho(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy}, \quad y_G = \frac{\iint_D y \rho(x, y) \, dx \, dy}{\iint_D \rho(x, y) \, dx \, dy}.$$

13.3 Schimbarea de variabile în integrala dublă

Teoremă 13.23. Fie Δ o mulțime deschisă din \mathbb{R}^2 și $T : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ o aplicație injectivă de clasă C^1 astfel încât jacobianul transformării J să fie diferit de zero în orice punct din Δ . Fie $D = T(\Delta)$. Dacă $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ este integrabilă atunci

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} (f \circ T)(u, v) |J| du dv.$$

Observație 13.24. Când se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases}, \quad (u, v) \in \Delta$$

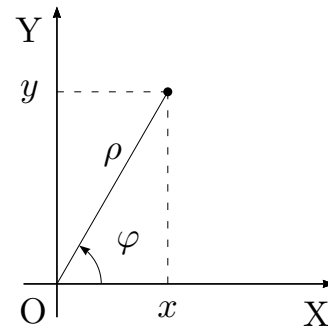
jacobianul se calculează cu formula determinantului matricii lui Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$. Noul domeniu Δ se obține determinând frontiera acestuia din ecuațiile frontierei vechiului domeniu D prin înlocuirea lui x cu $x(u, v)$ și y cu $y(u, v)$.

În cazul în care frontiera domeniului D este cerc sau arc de cerc, este utilă folosirea coordonatelor polare ρ și φ . Se face schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x = \rho \cos \varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho \sin \varphi, & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$\begin{aligned} J &= \frac{D(x, y)}{D(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho. \end{aligned}$$



Exemplu 13.25. Să se calculeze $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ unde D este mulțimea

$$D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0 \}.$$

Facem schimbarea de variabile

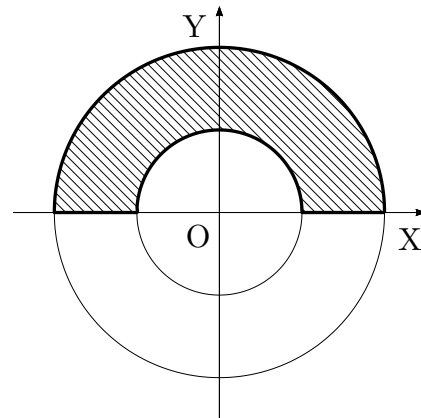
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Din condiția $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ obținem $1 \leq \rho^2 \leq 4$, adică $\rho \in [1, 2]$. Din $y \geq 0$ se obține inegalitatea $\sin \varphi \geq 0$, adică $\varphi \in [0, \pi]$. Noul domeniu este

$$\Delta = \{ (\rho, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 1 \leq \rho \leq 2 \}.$$

Jacobianul este $|J| = \rho$. Valoarea integralei este

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^\pi \left(\int_1^2 e^{-\rho^2} \rho d\rho \right) d\varphi = \pi \left. \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \right|_1^2 = \frac{\pi}{2e} \left(1 - \frac{1}{e^3} \right).$$



13.4 Formula lui Green

Teoremă 13.26. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu una dintre axe. Fie C curba simplă, închisă care descrie frontiera domeniului D , parcursă în sens direct (sensul în care domeniul D se găsește la stânga). Fie $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$ funcții de clasă C^1 pe D . Atunci

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy.$$

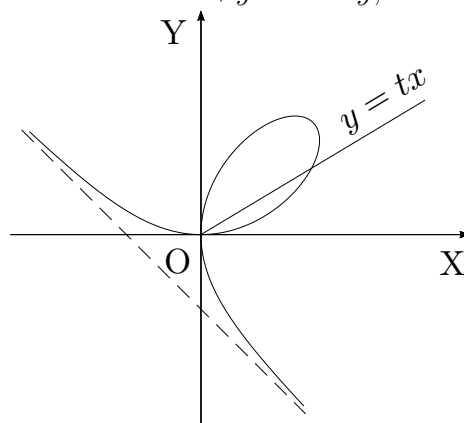
Observație 13.27. Formula se poate folosi și pentru un domeniu D care este o reuniune finită de domenii simple în raport cu una dintre axe.

Observație 13.28. Formula lui Green ne permite să găsim aria unui domeniu mărginit de o curbă netedă de ecuație dată. Se poate folosi oricare din formulele

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy = \int_C x dy = - \int_C y dx = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

Exemplu 13.29. Să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes: $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$. Pentru a parametriza această curbă o intersectăm cu o dreaptă $y = tx$. Curbă are punct dublu în origine, iar axele OX și OY sunt tangente buclei. Cum t este panta drepte, rezultă că $t \in [0, \infty)$. Se obține

$$C: \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \quad t \in [0, \infty).$$



Aria foliului lui Descartes va fi

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3} \cdot \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3} \cdot \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^\infty \frac{2t^2 - t^5 - t^2 + 2t^5}{(1+t^3)^3} dt = \frac{9a^2}{2} \int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \cdot \frac{-1}{1+t^3} \Big|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$