Model subiect de examen nr. 1

1. a) Să se definească funcţia $\operatorname{Log} z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Să se determine partea reală şi imaginară a expresiei $(-1+i)^{2i}$.
2. a) Să se determine raza şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n^{2022}}{(n+1)!}(x+2)^n.$$

   b) Suma seriei $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{2^n n!}$.
3. a) Seria binomială.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \sqrt{1-x} - 1$, $x_0 = 0$.
4. a) Să se calculeze $f'_x(-3,1,0)$, unde $f : D \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = \frac{3xy^2}{x^2+z^2},$$

iar D este mulţimea punctelor $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ care nu se găsesc pe axa OY.
   b) Fie $z(x,y) = f(3x+y) + g(y-x)$. Să se demonstreze că $z''_{x^2} - 2z''_{xy} - 3z''_{y^2} = 0$.
5. Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x.$$

6. a) Funcţia Beta (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze

$$\int_0^1 x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Model subiect de examen nr. 2

1. a) Definiţia funcţiei e^z pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \frac{e^{\ln 2 + i\frac{5\pi}{6}}}{1-i\sqrt{3}}$.
2. a) Să se studieze convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^4}{(\sqrt{3})^n}$.
   b) Suma seriei $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot 3^n} + \ldots$
3. a) Seria geometrică.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - \operatorname{ch} 2x$, $x_0 = 0$.
4. a) Definiţia gradientului unui câmp scalar.
   b) Să se determine gradientul câmpului scalar $f(x,y,z) = 3xz^2\ln(5z-3y) - 3zy$ în punctul $(1,-1,0)$.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Formula de calcul a integralelor curbilinii de speţa I pentru curbe netede.
   b) Să se calculeze lungimea curbei $x = e^t\cos t$, $y = e^t \sin t$, $t \in [0,1]$.

Model subiect de examen nr. 3

1. a) Funcţia $\sin z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \sin\left(\frac{5\pi}{3} - i\ln 2\right)$.
2. a) Discul de convergenţă al seriei

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{n^3+1}{3^n}(x+3)^n.$$

   b) Suma seriei $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$
3. a) Seria binomială.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1$, $x_0 = 0$.
4. a) Divergenţa unui câmp vectorial (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze divergenţa câmpului $\vec{v} = \vec{u} \times \vec{r}$, unde $\vec{u} = x^2\vec{\imath} - z^2\vec{\jmath} + y^2\vec{\kappa}$, iar $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ este vectorul de poziţie.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x)^2(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Funcţia Gamma a lui Euler (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze: $\displaystyle\int_0^{\infty} (x^{10} - 4x^5)e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$.

Model subiect de examen nr. 4

1. a) Funcţia $\cos z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \cos\left(\frac{5\pi}{6} + i\ln 2\right)$.
2. a) Natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   b) Să se calculeze suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}\left(-\frac{\pi^2}{16}\right)^n$.
3. a) Seria de puteri a funcţiei exponenţiale.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = xe^x$, $x_0 = 2$.
4. a) Rotorul unui câmp vectorial.
   a) Să se calculeze rotorul câmpului $\vec{v} = (y^3 - 3xz)\vec{\imath} + (z^2 - 2y^2x^2)\vec{\jmath} + (2z - x^3)\vec{\kappa}$.
5. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(3 + 2\cos x)(1 + \cos x)}\,\mathrm{d}x$.
6. a) Formula de calcul a integralelor curbilinii de speţa a II-a pentru curbe netede.
   b) Să se calculeze lucrul mecanic al forţei $\vec{F} = -y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$ ce acţionează asupra unui punct material ce se mişcă pe curba $x^2 + y^2 = 9$ în sens trigonometric.

Model subiect de examen nr. 5

1. a) Să se definească funcţia $\operatorname{Log} z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Să se determine partea reală şi imaginară a expresiei $(1 + i\sqrt{3})^i$.
2. a) Să se determine discul de convergenţă al seriei de puteri $\sum\limits_{n\geq 1}(-1)^n \dfrac{n^2+1}{(\sqrt{2})^n}(x-3)^n$.
   b) Suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n! \cdot 2^n}$.
3. a) Seria de puteri a funcţiei cos.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \cos^2 x - \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$.
4. a) Laplacianul unui câmp scalar.
   b) Să se calculeze laplacianul câmpului $f(x, y, z) = 3x^2 z - \frac{y}{x^2+y^2}$.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x+1}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Funcţia Beta (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x^8+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Model subiect de examen nr. 6

1. a) Definiţia funcţiei e^z pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \frac{e^{2-\frac{5\pi i}{3}}}{-i\sqrt{3}+1}$.
2. a) Natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n^2+1)2^n}{(n^4+1)3^n}$.
   b) Suma seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n n}{2^n}$.
3. a) Seria de puteri pentru sinus hiperbolic.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = x \operatorname{sh} x - \frac{x^2}{1+x^2}$, $x_0 = 0$.
4. a) Jacobianul unei transformări $T = (u, v) : D \to \mathbb{R}^2$ de clasă $C^1(D), D \subseteq \mathbb{R}^2$.
   b) Să se calculeze Jacobianul transformării $T = (u, v) : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definită prin $u = x\sqrt{x}y^3$ şi $v = y - \sqrt{x}$.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Funcţia Gamma a lui Euler (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze: $\displaystyle\int_0^\infty (x^4 - 2x^3)e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Model subiect de examen nr. 7

1. a) Funcţia $\sin z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \sin\left(i \ln 3 - \frac{7\pi}{6}\right)$.
2. a) Discul de convergenţă pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \dfrac{n+1}{2^n}(x-3)^n$.
   b) Suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n(n+2)}{n!}$.
3. a) Seria geometrică.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = 1$.
4. a) Derivata unui câmp scalar după o direcţie.
   b) Să se calculeze derivata câmpului $f(x,y,z) = 4x^3y^2 - z^3 + ye^{z-x^2}$ după direcţia $\vec{v} = \vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{\kappa}$ în punctul (-1,2,0).
5. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\sin x}\, \mathrm{d}x$.
6. a) Funcţia Beta (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^3+1)^3}\, \mathrm{d}x$.

Model subiect de examen nr. 8

1. a) a) Funcţia $\cos z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \cos\left(\frac{5\pi}{4} - i \ln 3\right)$.
2. a) Natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2022}}{2^{2n+1}}$.
   b) Să se calculeze suma seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\cos \frac{n\pi}{4}}{2^n}$.
3. a) Seria de puteri a funcţiei logaritmice.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \ln(2-x)$, $x_0 = 0$.
4. a) Gradientul unui câmp scalar (definiţie şi 3 proprietăţi)
   b) Să se determine versorul normalei la suprafaţa $x^2 + x + y^2 - z = 0$ în punctul $(-1, 2, 4)$.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, \mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Formula de calcul a primitivei unei diferenţiale totale exacte.
   b) Să se calculeze $\displaystyle\int_{(0,0,1)}^{(1,2,3)} e^{xy}(zy\, \mathrm{d}x + zx\, \mathrm{d}y + \mathrm{d}z)$.

Model subiect de examen nr. 9

1. a) Funcţia $\cos z$ pentru $z \in \mathbb{C}$.
   b) Să se determine partea reală şi imaginară a numărului complex $z = \cos\left(\frac{7\pi}{4} - i\right)$.
2. a) Să se determine raza de convergenţă şi mulţimea de convergenţă a seriei de puteri

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{n^2+1}{(2n+1)!}(x-3)^n.$$

   b) Suma seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$.
3. a) Seria de puteri a funcţiei cosinus hiperbolic.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \left(\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right)^2$, $x_0 = 0$.
4. a) Definiţia derivatei parţiale a unei funcţii $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clasă $C^1(\mathbb{R}^3)$ în raport cu prima variabilă în punctul $(2, 0, -1)$.
   b) Să se calculeze F''_{xy}, unde $F(x, y) = f(x^3y, 4x - 2y)$, iar $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\int_0^\infty \frac{x+2}{(x+1)^2(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Funcţia Beta a lui Euler (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cdot \cos^6 x\,\mathrm{d}x$.

Model subiect de examen nr. 10

1. a) Funcţia putere z^α pentru $z, \alpha \in \mathbb{C}$.
   b) Partea reală şi imaginară a expresiei $(-1-i)^i$.
2. a) Natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{8^n (n!)^2}$.
   b) Suma seriei $\sum_{n\geq 0} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{2^n}$.
3. a) Seria de puteri pentru funcţia sinus.
   b) Seria Taylor pentru $f(x) = \cos \pi x \cdot \sin 2\pi x$, $x_0 = 1$.
4. a) Operatorul nabla şi proprietatea de liniaritate.
   b) Să se calculeze divergenţa câmpului $\vec{v} = (\vec{a}\cdot\vec{r})\mathrm{grad}\, r^3$, unde $\vec{a}$ este un vector constant, $\vec{r}$ este vectorul de poziţie, iar r este lungimea vectorului de poziţie.
5. Să se studieze convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{x+2}{x(x+3)^2}\,\mathrm{d}x$, şi în caz de convergenţă să se determine valoarea ei.
6. a) Funcţia Beta a lui Euler (definiţie şi 3 proprietăţi).
   b) Să se calculeze: $\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt[3]{8-x^3}}\,\mathrm{d}x$.