Seminar 1

Şiruri de numere reale

1.1 Rezultate teoretice

1.1.1 Introducere

Folosim următoarele mulţimi de numere:
$\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \dots \}$– mulţimea numerelor naturale
$\mathbb{Z} = \{ \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \}$– mulţimea numerelor întregi
$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^* \}$– mulţimea numerelor raţionale (numere zecimale periodice)
$\mathbb{R}$– mulţimea numerelor reale formată din numere zecimale periodice şi neperiodice
Notaţia M^* înseamnă mulţimea M din care se scoate elementul 0. Vom folosi şi notaţia $\lfloor a \rfloor$ -parte întreagă din a, adică cel mai mare număr întreg mai mic sau egal decât $a \in \mathbb{R}$.

Pentru început să definim noţiunea de şir de numere.

Definiţie 1.1. Se numeşte ***şir de numere reale*** orice funcţie $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Notaţie 1.2. Pentru $n \in \mathbb{N}$ numărul $x(n)$ se notează x_n. Acesta se numeşte termenul de rang n al şirului x. Pentru şirul x vom folosi notaţia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau prescurtat (x_n). Uneori, pentru a descrie şirul x, vom enumera termenii săi: x_0, x_1, $x_2, \dots$.

Exemplu 1.3. 1) şirul (x_n) format din $0, 0, 0, \dots$ este şirul constant care are toţi termenii egali cu 0. Putem scrie $x_n = 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2) şirul (x_n) definit prin relaţia $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ este şirul puterilor lui -1. Dacă enumerăm primii termeni, aceştia sunt: $1, -1, 1, -1, 1, \dots$.

Vom da în continuare câteva tipuri de şiruri.

1.1.2 Şiruri mărginite

Definiţie 1.4. Vom spune că şirul de numere reale (x_n) este ***mărginit*** dacă mulţimea $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ este mărginită. Cu alte cuvinte, toţi termenii şirului (x_n) se găsesc într-un interval $[a, b]$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

Observaţie 1.5. Uneori, pentru a arăta că un şir de numere reale (x_n) este mărginit este mai uşor să găsim un $M > 0$ cu proprietatea că

$$|x_n| \leq M, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

În acest caz, $x_n \in [-M, M]$, ceea ce arată că şirul este mărginit.

Exemplu 1.6. Şirul definit prin $x_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ este mărginit. Într-adevăr,

$$|x_n| = \frac{1}{n+1} \leq 1, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N}.$$

1.1.3 Şiruri monotone

Definiţie 1.7. Vom spune că şirul (x_n) este:
strict crescător dacă $x_n < x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$
strict descrescător dacă $x_n > x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$
strict monoton dacă este strict crescător sau strict descrescător
crescător dacă $x_n \leq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$
descrescător dacă $x_n \geq x_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$
monoton dacă este crescător sau descrescător.

Observaţie 1.8. Pentru a studia monotonia unui şir (x_n) există trei metode: studiem semnul diferenţei $x_{n+1} - x_n$, sau comparăm câtul x_{n+1}/x_n cu 1, sau studiem monotonia funcţiei x care defineşte şirul.

Spre exemplu, dacă vrem să arătăm că şirul (x_n) este crescător, demonstrăm una din cele trei afirmaţii:
1) $x_{n+1} - x_n \geq 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$,
2) $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ (când şirul este format din termeni pozitivi $x_n > 0$),
3) funcţia x cu $x(n) = x_n$ este crescătoare (adică $x' \geq 0$, când x este derivabilă).

Definiţie 1.9. Fie $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ un şir de numere reale şi $n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ un şir strict crescător de indici, atunci funcţia $x \circ n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte ***subşir*** al şirului (x_n) şi se notează $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sau pe scurt (x_{n_k}).

Exemplu 1.10. Şirurile (x_{n+3}) şi (x_{2n+1}) sunt 2 exemple de subşiruri ale şirului (x_n).

Teoremă 1.11. Orice şir de numere reale are un subşir monoton.

1.1.4 Şiruri convergente

Definiţie 1.12. Spunem că şirul de numere reale (x_n) este ***convergent*** dacă există un număr real $\ell \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang $N \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq N$ să avem $|x_n - \ell| < \varepsilon$.

Notaţie 1.13. Dacă un şir (x_n) este convergent vom numi numărul $\ell \in \mathbb{R}$ limita şirului şi vom scrie $x_n \to \ell$ sau

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \ell.$$

Observaţie 1.14. Şirul (x_n) este convergent dacă există un număr real ℓ cu proprietatea că în afara oricărui interval deschis care conţine pe ℓ există doar un număr finit de termeni sau altfel spus orice inteval deschis care conţine pe ℓ conţine toţi termenii şirului, exceptând eventual un număr finit de termeni.

Exemplu 1.15. Şirul $x_n = \frac{1}{n}$ este convergent şi $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Într-adevăr, fie $\varepsilon > 0$. Pentru $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 \in \mathbb{N}$ avem $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Deci, pentru orice $n \geq N$ rezultă inegalitatea

$$|x_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează că $x_n \to 0$.

Propoziţie 1.16. Orice şir convergent are limită unică.

Propoziţie 1.17. Orice subşir al unui şir convergent este convergent spre aceeaşi limită.

Observaţie 1.18. Dacă $x_n \to x$ atunci de exemplu $x_{n+p} \to x$, $x_{2n} \to x$, $x_{2n+1} \to x$. Dacă un şir are două subşiruri cu limite diferite, înseamnă că şirul nu este convergent. De exemplu, $x_n = (-1)^n$ are subşirurile $x_{2n} = 1 \to 1$ şi $x_{2n+1} = -1 \to -1$ cu limite diferite, deci el nu este convergent.

Propoziţie 1.19. Orice şir convergent este mărginit.

Observaţie 1.20. Orice şir convergent este mărginit, dar nu orice şir mărginit este convergent. De exemplu, $x_n = (-1)^n$ nu este convergent, deşi este mărginit.

Propoziţie 1.21. Dacă (x_n) este convergent la x, atunci $|x_n| \to |x|$.

Propoziţie 1.22. Dacă (x_n) şi (y_n) sunt şiruri convergente de numere reale şi $a \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$
$$\lim_{n\to\infty}(a \cdot x_n) = a \cdot \lim_{n\to\infty} x_n$$

Teoremă 1.23 (Trecerea la limită în inegalităţi)**.** Fie (x_n) şi (y_n) două şiruri convergente cu proprietatea că $x_n < y_n$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Observaţie 1.24. Să observăm că deşi inegalitatea între termenii şirului este strictă, totuşi inegalitatea dintre limite nu este strictă. Dacă luăm şirul constant $x_n = 0$ şi $y_n = \frac{1}{n}$, atunci $x_n < y_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dar $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

Teoremă 1.25 (Teorema cleştelui)**.** Dacă avem trei şiruri cu proprietăţile: $a_n \leq x_n \leq b_n$, pentru orice $n \geq n_0$ şi ştim că $a_n \to x$ şi $b_n \to x$ atunci $x_n \to x$.

Corolar 1.26 (Criteriul majorării)**.** Dacă $|x_n - x| \leq \alpha_n$, pentru orice $n \geq n_0$ şi $\alpha_n \to 0$ atunci $x_n \to x$.

Corolar 1.27. Dacă avem un şir $x_n \to 0$ şi un şir mărginit a_n atunci

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot x_n = 0.$$

Exemplu 1.28. Avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = \lim_{n\to\infty} \sin n \cdot \frac{1}{n} = 0,$$

pentru că $a_n = \sin n \in [-1, 1]$ este mărginit şi $x_n = \frac{1}{n} \to 0$.

Teoremă 1.29 (Weierstrass)**.** Orice şir monoton şi mărginit este convergent.

1.1.5 Şiruri divergente

Definiţie 1.30. Şirul (x_n) are limita $+\infty$ (sau simplu ∞), dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq N$.

Exemplu 1.31. Şirul (x_n) definit prin $x_n = a \cdot n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a > 0$ este fixat, are limita ∞, pentru că $a \cdot n > \varepsilon$, pentru orice $n \geq N = \left\lfloor \frac{\varepsilon}{a} \right\rfloor + 1$.

Definiţie 1.32. Şirul (x_n) are limita $-\infty$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $x_n < -\varepsilon$, pentru orice $n \geq N$.

Definiţie 1.33. Un şir care nu este convergent se numeşte ***divergent***.

Observaţie 1.34. Există două cauze pentru care un şir este divergent:

1. fie nu are limită (de exemplu $x_n = (-1)^n$),
2. fie are limită care nu e finită (de exemplu $x_n = n$, care are limita $+\infty$).

Definiţie 1.35. Vom spune că un şir ***are limită***, dacă şirul este convergent sau dacă are limita $+\infty$ sau $-\infty$.

Teoremă 1.36. Orice şir monoton are limită.

Teoremă 1.37 (Criteriul majorării)**.** Fie (x_n) un şir care are limita $+\infty$ şi (y_n) un şir astfel încât $y_n \geq x_n$, pentru orice $n \geq n_0$. Atunci şirul (y_n) are limita $+\infty$.

Exemplu 1.38. Să studiem convergenţa şirului $x_n = q^n$, unde $q \in \mathbb{R}$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty, & q > 1 \\ 1, & q = 1 \\ 0, & q \in (-1, 1) \\ \text{nu există}, & q \leq -1. \end{cases}$$

Într-adevăr, pentru $q > 1$, scriind primii doi termeni din binomul lui Newton, obţinem

$$q^n = (1 + q - 1)^n \geq 1 + n(q - 1) > n(q - 1).$$

Pentru că $q - 1 > 0$ rezultă că $n(q - 1)$ tinde la ∞ şi folosind criteriul majorării q^n va tinde la ∞.

Pentru $q = 1$ avem şirul constant $x_n = 1^n = 1 \cdot 1 \cdots 1 = 1$ cu limita 1. Pentru $q = 0$ avem şirul constant $x_n = 0^n = 0 \cdot 0 \cdots 0 = 0$ cu limita 0.

Pentru $q \in (0, 1)$ numărul $a = \frac{1}{q} > 1$ deci $a^n \to \infty$, conform primului caz. Atunci

$$q^n = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \to 0.$$

Pentru $q \in (-1, 0)$ avem $-q \in (0, 1)$ şi deci $(-q)^n \to 0$, conform cazului anterior. Atunci $q^n = (-1)^n \cdot (-q)^n$ va tinde la 0, fiind produsul dintre un şir mărginit şi un şir care tinde la 0.

Pentru $q = -1$, şirul nu are limită, pentru că are subşiruri cu limite diferite. La fel este în cazul în care $q < -1$, pentru că $x_{2n} \to \infty$ şi $x_{2n+1} \to -\infty$.

1.1.6 Operaţii cu $+\infty$ şi $-\infty$

Adunarea

Teoremă 1.39. Dacă şirul (x_n) este convergent şi are limita x, iar şirul (y_n) are limita $+\infty$, atunci şirul sumă $(x_n + y_n)$ are limita $+\infty$.

Observaţie 1.40. Proprietatea anterioară se poate exprima prin

$$x + \infty = \infty + x = \infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Asemănător se poate demonstra că

$$\infty + \infty = \infty, \quad x + (-\infty) = -\infty + x = -\infty, \quad -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Observaţie 1.41. Nu se atribuie nici un sens operaţiei $\infty - \infty$, deoarece, dacă (x_n) are limita $+\infty$, iar (y_n) are limita $-\infty$, atunci şirul $(x_n + y_n)$, poate să fie convergent, sau cu limita $+\infty$, sau cu limita $-\infty$, sau poate să nu aibă limită. De exemplu, pentru $x_n = x+n$ şi $y_n = -n$ avem $x_n + y_n = x \to x$, pentru $x_n = 2n$ şi $y_n = -n$, $x_n + y_n = n \to \infty$, pentru $x_n = n$ şi $y_n = -2n$, $x_n + y_n = -n \to -\infty$, iar pentru $x_n = (-1)^n + n$ şi $y_n = -n$, şirul sumă $x_n + y_n = (-1)^n$ nu are limită.

Pentru a elimina nedeterminarea se foloseşte de multe ori metoda conjugatei, care se bazează pe formula

$$a - b = \frac{a^m - b^m}{a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}}.$$

Exemplu 1.42. Să se determine limita şirului $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Folosind metoda conjugatei pentru $a = \sqrt{n+1}$, $b = \sqrt{n}$ şi $m = 2$, obţinem

$$x_n = \frac{n + 1 - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

Produsul

Se pot demonstra următoarele proprietăţi

$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0. \end{cases}$$

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) = \infty, \quad (-\infty) \cdot \infty = \infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Observaţie 1.43. Operaţiilor $0 \cdot \infty$ şi $0 \cdot (-\infty)$ nu li se atribuie nici un sens. Pentru a elimina astfel de operaţii se rescrie produsul sub forma $0/0$ sau ∞/∞.

Câtul

Au loc proprietăţile

$$\frac{x}{\infty} = 0, \quad \frac{x}{-\infty} = 0.$$

Observaţie 1.44. Nu se atribuie nici un sens operaţiilor $\frac{\infty}{\infty}$ sau $\frac{0}{0}$. Pentru a elimina aceste operaţii se foloseşte de cele mai multe ori metoda factorului forţat. În ce priveşte operaţia fără sens $\frac{1}{0}$, se poate demonstra că, dacă (x_n) este un şir de numere pozitive, convergent la zero, atunci $1/x_n \to +\infty$.

Exemplu 1.45. Limita şirului $x_n = \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$ se poate calcula dând factor forţat termenul care tinde cel mai repede la infinit.

$$x_n = \frac{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}{3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}$$

şi pentru că $\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ rezultă că $x_n \to \frac{1}{3}$.

Exemplu 1.46. Dând factor forţat termenul n^p la numărător şi n^q la numitor se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_p n^p + a_{p-1}n^{p-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1}n^{q-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} \infty \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{a_p}{b_q}\right), & p > q \\ \frac{a_p}{b_q}, & p = q \\ 0, & p < q. \end{cases}$$

Alteori, pentru a elimina nedeterminarea ∞/∞ sau $0/0$ se foloseşte

Teoremă 1.47 (Stolz-Cesaro)**.** Dacă avem două şiruri (x_n) şi (y_n) care verifică una din condiţiile:
1) $x_n \to 0$ şi $y_n \to 0$, iar (y_n) este strict monoton
2) $y_n \to \infty$ şi (y_n) este strict crescător.
Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n},$$

dacă limita din membrul drept există (finită sau infinită).

Teoremă 1.48 (Regula lui l'Hospital)**.** Dacă avem două şiruri (x_n) şi (y_n) definite prin intermediul a două funcţii derivabile, cu $y' > 0$, atunci (pentru cazurile $0/0$ sau ∞/∞) avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x'(n)}{y'(n)},$$

dacă limita din membrul drept există.

Teoremă 1.49. Fie (x_n) un şir de numere pozitive care este convergent la 0. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Puteri

Au loc următoarele proprietăţi

$$\begin{aligned} &x^\infty = \infty, \quad x^{-\infty} = 0, \quad x > 1 \\ &x^\infty = 0, \quad x^{-\infty} = \infty, \quad x \in (0,1) \\ &\infty^x = \infty, \quad x > 0 \\ &\infty^x = 0, \quad x < 0 \\ &0^\infty = 0, \quad \infty^\infty = \infty, \quad \infty^{-\infty} = 0. \end{aligned}$$

Observaţie 1.50. Nu se atribuie nici un sens operaţiilor 1^∞, 0^0, sau ∞^0. Pentru a elimina ultimile două operaţii se foloseşte uneori relaţia $x = e^{\ln x}$. Pentru a elimina operaţia 1^∞ se foloseşte următorul rezultat.

Teoremă 1.51. Fie (x_n) un şir de numere pozitive care este convergent la 0. Atunci

$$\lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} = e.$$

Corolar 1.52. Pentru orice şir (x_n) convergent la zero cu $x_n \neq 0$ şi orice $a > 0$ avem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{x_n}-1}{x_n} = \ln a.$$

Logaritmi

Au loc operaţiile

$$\ln\infty = \infty, \quad \ln 0 = -\infty.$$

De aici prin formula de schimbare a bazei $\log_x y = \frac{\ln y}{\ln x}$ se deduc următoarele relaţii

$$\log_x\infty = \infty, \quad \log_x 0 = -\infty, \quad x > 1$$

şi

$$\log_x\infty = -\infty, \quad \log_x 0 = \infty, \quad x \in (0,1).$$

Folosind formula $x = e^{\ln x}$, nedeterminările 0^0 şi ∞^0 se reduc la $0\cdot(\pm\infty)$, care sunt mai uşor de eliminat. De exemplu, se poate folosi uneori următorul rezultat

Teoremă 1.53 (Consecinţa Teoremei lui Stolz-Cesaro)**.** Dacă (a_n) este un şir de numere pozitive, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

dacă limita din membrul drept există.

1.2 Exerciţii

1.2.1 Probleme rezolvate

Problema 1.1. Să se demonstreze că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

este strict crescător, iar şirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin

$$y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

este strict descrescător. Să se deducă faptul că (x_n) şi (y_n) sunt convergente spre aceeaşi limită (notată e) şi au loc inegalităţile

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \geq 1. \tag{1.1}$$

Soluţie 1.1. Inegalitatea mediilor pentru numerele nenegative $a_k \geq 0$, unde k ia valorile $1, 2, \ldots, n$ este

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Inegalitatea este strictă dacă nu toate numerele a_k sunt egale.

Considerând $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{n+1}{n}$ şi $a_{n+1} = 1$, obţinem

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n \cdot \frac{n+1}{n} + 1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

ceea ce demonstrează $x_n < x_{n+1}$. Considerând $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{n-1}{n}$ şi $a_{n+1} = 1$, obţinem

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \cdot 1} < \frac{n \cdot \frac{n-1}{n} + 1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

inegalitate care este echivalentă cu

$$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1},$$

de unde deducem că $y_{n-1} > y_n$.

Pentru că (x_n) este strict crescător şi mărginit superior de y_1, deducem că (x_n) este convergent şi $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n \,:\, n \geq 1 \,\}$. Rezultă $x_n < e$, pentru orice $n \geq 1$. Şirul y_n are aceeaşi limită pentru că $y_n = x_n(1 + \frac{1}{n})$. Inegalitatea $e < y_n$ rezultă din monotonia lui (y_n) şi din faptul că $\lim_{n\to\infty} y_n = e$. □

Problema 1.2. Să se calculeze limitele următoarelor şiruri

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n, \quad a, b > 0.$

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n$

Soluţie 1.2. a) Folosind limitele tip $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$ şi $\frac{c^{x_n} - 1}{x_n} \to \ln c$, unde $x_n \to 0$, obţinem

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2} - 1\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} - 2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} - 2} \cdot \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} - 2}{2} \cdot n} \\
&= e^{\lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}} - 2}{2} \cdot n} \\
&= e^{\frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} + \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}} \\
&= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = e^{\frac{1}{2}\ln(a \cdot b)} = e^{\ln(a\cdot b)^{\frac{1}{2}}} = (a \cdot b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

b) Folosind limitele tip $(1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$ şi $\frac{\sin x_n}{x_n} \to 1$, pentru un şir $x_n \to 0$, avem

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \sin\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\sin\frac{1}{n}} \cdot \sin\frac{1}{n} \cdot n} = e^{\lim_{n\to\infty} n \sin\frac{1}{n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}} = e.$$

□

Problema 1.3. Să se calculeze limita şirului

$$a_n = \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}}, \quad p \in \mathbb{N},\ p \geq 1.$$

Soluţie 1.3. Folosim criteriul lui Stolz-Cesaro, cu $x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p$ şi $y_n = n^{p+1}$. Se observă că (y_n) este un şir strict crescător de numere pozitive şi nemărginit. Aplicând formula binomului lui Newton

$$(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + \mathrm{C}_n^n b^n$$

avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^p n^p + \mathrm{C}_p^1 2^{p-1} n^{p-1} + \cdots + 1}{\mathrm{C}_{p+1}^1 n^p + \mathrm{C}_{p+1}^2 n^{p-1} + \cdots + 1} = \frac{2^p}{\mathrm{C}_{p+1}^1}.$$

Aşadar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{2^p}{\mathrm{C}_{p+1}^1} = \frac{2^p}{p+1}.$$

□

Problema 1.4. Să se calculeze limita şirului

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}.$$

Soluţie 1.4. Folosim consecinţa criteriului lui Stolz-Cesaro. Fie şirul de numere pozitive $a_n = \frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}$. Atunci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{3(n+1)}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!} \cdot \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^3(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = 1.$$

Rezultă că $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. □

Problema 1.5. a) Să se demonstreze că şirul $\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ este un şir convergent.
b) Notând cu γ limita şirului γ_n, să se calculeze limita

$$\lim_{n\to\infty} n(\gamma_n - \gamma).$$

Soluţie 1.5. a) Folosind inegalităţile (1.1) deducem

$$n \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

De aici rezultă

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}. \tag{1.2}$$

Pe baza acestor inegalităţi rezultă că

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0,$$

ceea ce arată că şirul $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este strict descrescător.

Însumând acum inegalităţile (1.2) pentru $n = 1, 2, \dots$ rezultă

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln 1 < \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

De aici obţinem $\gamma_{n+1} < 1$ şi $\gamma_n > \ln(n+1) - \ln n > 0$, ceea ce arată că $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir mărginit.

Mărginirea şi monotonia şirului $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ demonstrează convergenţa lui. În plus am obţinut că $\gamma \in (0, 1)$.

b) Fie şirul $x_n = \gamma_n - \gamma$ convergent la 0 şi $y_n = \frac{1}{n}$. Pentru că y_n este convergent descrescător la 0, putem aplica criteriul Stolz-Cesaro. Calculăm

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} -n + n(n+1)\ln\frac{n+1}{n} \\
&\overset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln(1+x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{x^2}\ln(1+x) + \left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{1+x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Va rezulta că

$$\lim_{n\to\infty} n(\gamma_n - \gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{2}.$$

□

1.2.2 Probleme propuse

1.6. Să se calculeze limita şirurilor:

a) $x_n = \dfrac{6n^5 + 7n - 2}{8n^5 + 4n + 1}$

b) $x_n = \dfrac{n^3 - 1}{n^4 + n + 1}$

c) $x_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{2 - 3n}$

d) $x_n = \dfrac{1 + 9^n}{10^{2n}}$

e) $x_n = \dfrac{3^n + 5^n}{3^{n+1} \cdot 5^{n+2}}$

f) $x_n = \dfrac{n3^n + 5^n}{(n+1)3^{n+1} + 5^{n+1}}$.

g) $x_n = \dfrac{2^n + 3^n}{3^{n+1} + 5^n}$

h) $x_n = \dfrac{n3^n + 2^n}{(n+1)3^{n+1} + 2^{n+1}}$.

i) $x_n = \dfrac{3^n + \ln n \cdot 5^n}{3^n + \ln(n+1) \cdot 5^{n+2}}$

j) $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{2n+1}}$.

k) $x_n = \dfrac{7n^2 - \sqrt{5n^2 + 6n + 1}}{2n^2 + 1 + \ln(n+1)}$

l) $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n^2 - 3n + 1}}{\sqrt{2n+1}}$.

m) $x_n = \log_3 \dfrac{1}{n}$

n) $x_n = \log_{\frac{1}{2}} n^2$.

1.7. Să se calculeze limita şirurilor:

$a)\ x_n = \dfrac{n}{2^n}$ $\quad b)\ x_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{3^n}$

$c)\ x_n = \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\quad d)\ x_n = \dfrac{\ln(1+2^n)}{\ln(1+3^n)}$

$e)\ x_n = \dfrac{a^n}{n}, \quad a > 0$ $\quad f)\ x_n = n^k a^n, \quad a \in (-1,1),\ k \in \mathbb{N}$

1.8. Să se calculeze limita şirurilor:

$a)\ x_n = \sqrt{n^2+n+2} - \sqrt{n^2-n+1}$ $\quad b)\ x_n = \sqrt[3]{1-n^3} + n$

$c)\ x_n = n\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right)$ $\quad d)\ x_n = n^3\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}} - n\sqrt{2}\right)$

$e)\ x_n = (n+1)^{\frac{2}{3}} - (n-1)^{\frac{2}{3}}$ $\quad f)\ x_n = \sqrt[m]{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} - n$

$g)\ x_n = n\ln(n^2+1) - n\ln(n^2+2)$ $\quad h)\ h)x_n = 1 + 3n - n^7$

1.9. Să se calculeze limita şirurilor:

$a)\ x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{3n^2-1}{n^2+n+1}}$ $\quad b)\ x_n = \left(\dfrac{n-1}{9n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{2n^3+n}}$

$c)\ x_n = e^{-\frac{\sqrt{3n^6+1}}{n^3+n+1}}$ $\quad d)\ x_n = \left(\dfrac{n^2-1}{5n^2+n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+2}}$

$e)\ x_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{\frac{3n^2-1}{n+1}}$ $\quad f)\ x_n = \left(\dfrac{8n}{8n+1}\right)^{\frac{n^2-1}{n+1}}$

$g)\ x_n = \left(2 - \sqrt[n]{3}\right)^n$ $\quad h)\ x_n = \left(1 + \dfrac{\sqrt[3]{n}+1}{2\sqrt{n}+1}\right)^{\sqrt[6]{n}}$

1.10. Să se calculeze limita şirurilor:

$a)\ x_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{5n+1}$ $\quad b)\ x_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$

$c)\ x_n = \dfrac{a^n}{n!}, \quad a > 0$ $\quad d)\ x_n = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}$

$e)\ x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$ $\quad f)\ x_n = \dfrac{1}{n}\ln\left(3^{\frac{n}{1}} + 3^{\frac{n}{2}} + \cdots + 3^{\frac{n}{n}}\right)$

1.11. Să se calculeze limita şirurilor:

$a)\ x_n = \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{2}{n}}$ $\quad b)\ x_n = n^2\left(1 - \cos\dfrac{2}{n}\right)$

$c)\ x_n = n\left(\sin\dfrac{2}{n} - \sin\dfrac{1}{n}\right)$ $\quad d)\ x_n = n^2\left(\sin\dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n+1}\right)$

$e)\ x_n = n\cdot \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{n}$ $\quad f)\ x_n = n^3\cdot\sin\dfrac{1}{n}\cdot\sin\dfrac{2}{n^2}$

1.12. Să se calculeze limitele

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{\ln 2} + \dfrac{1}{\ln 3} + \cdots + \dfrac{1}{\ln n}\right)$

c) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^1 + 2^2 + \cdots + n^n}{n^n}$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lfloor 1^p \cdot x\rfloor + \lfloor 2^p \cdot x\rfloor + \cdots + \lfloor n^p \cdot x\rfloor}{n^{p+1}}$

f) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$

g) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)\dots(k+p)}{n^{p+2}}$

h) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}\right)$.

i) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \cdots + n\sqrt{n}}{n^2\sqrt{n}}$

j) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^{10} + 2^{10} + \cdots + n^{10} - \frac{n^{11}}{11}}{n^{10}}$

1.13. Să se calculeze limitele

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$

d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{4n}{\sqrt[n]{(2n)!}}$

e) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$

f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n!}$

g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}8^n}$

h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}$.

i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$

j) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}, \quad a, b > 0$

1.14. Să se calculeze limita şirului $x_n = (n+1)!\left(e - 2 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n!}\right)$.

1.2.3 Indicaţii la problemele propuse

1.6. a) $\frac{3}{4}$ b) 0 c) $-\infty$ d) 0 e) 0 f) $\frac{1}{5}$ g) 0 h) $\frac{1}{3}$ i) $\frac{1}{25}$ j) $3(\sqrt{2} - 1)$. k) $\frac{7}{2}$ l) ∞ m) $-\infty$ n) $-\infty$.

1.7. a) 0 b) 0 c) 0 d) $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ e) dacă $a > 1$ limita e $+\infty$, altfel 0 f) 0.

1.8. a) 1 b) 0 c) $-\frac{1}{4}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ e) 0 f) $\frac{m+1}{2}$ g) 0 h) $-\infty$.

1.9. a) $\frac{1}{8}$ b) 1 c) $e^{-\sqrt{3}}$ d) 0 e) $e\sqrt{e}$ f) $e^{-\frac{1}{8}}$ g) $\frac{1}{3}$ h) $\sqrt{e}$.

1.10. Se aplică criteriul cleştelui. a) 0 b) 0 c) 0. Dacă $a \in (0,1)$ atunci avem $a^n \to 0$. Dacă $a \geq 1$ atunci

$$0 < x_n = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{\lfloor a\rfloor}\cdot\frac{a}{\lfloor a\rfloor + 1}\cdots\frac{a}{n} < \frac{a^{\lfloor a\rfloor}}{\lfloor a\rfloor!}\cdot\left(\frac{a}{\lfloor a\rfloor + 1}\right)^{n-\lfloor a\rfloor}.$$

d) 0. Folosind inegalitatea $\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2}$ se obţine

$$\frac{1}{4n} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1} < x_n^2 < \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}.$$

e) 1. Avem

$$\sqrt{1 - \frac{1}{n+1}} = n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < x_n < n\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} < 1.$$

f) $\ln 3$. Avem

$$\ln 3 = \frac{1}{n} \ln 3^n < x_n < \frac{1}{n} \ln(n3^n) = \frac{\ln n}{n} + \ln 3.$$

1.11. a) $\frac{\pi}{2}$ b) $x_n = 2n^2 \sin^2 \frac{1}{n} \to 2$ c) $2 - 1 = 1$ d) $x_n = 2n^2 \sin \frac{1}{2n(n+1)} \cos \frac{2n+1}{2n(n+1)} \to 1$ e) π f) 2

1.12. a) $\frac{1}{p+1}$ b) 0 c) 1 d) 2 e) $\frac{x}{p+1}$ f) $\frac{2}{3}$ g) $\frac{1}{p+2}$ h) 1 i) $\frac{2}{5}$ j) $\frac{1}{2}$.

1.13. Se aplică consecinţa criteriului lui Stolz-Cesaro. a) 1 b) 1 c) ∞ d) 0 e) $\frac{1}{e}$ f) 1 g) 2 h) 1 i) 1 j) $\max(a, b)$.

1.14. Se aplică Stolz-Cesaro în cazul $0/0$ şi se obţine 1.