Seminar 3

Şiruri şi serii de numere complexe

Probleme rezolvate

Problema 3.1. Să se stabilească natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$.

Soluţie 3.1. Calculăm limita raportului

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Conform criteriului raportului seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă. □

Problema 3.2. Să se stabilească natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$.

Soluţie 3.2. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}} \cdot \frac{2^{n^2}}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{[n! \cdot (n+1)]^2}{(n!)^2 \cdot 2^{(n+1)^2-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Aplicând de două ori regula lui l'Hospital, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^2}{2^{2x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2(x+1)}{2^{2x+1} 2 \ln 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{2^{2x+1}(2\ln 2)^2} = 0.$$

Pe baza criteriului raportului seria dată este convergentă. □

Problema 3.3. Să se stabilească natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^n \operatorname{tg} \frac{a}{2^n}, \quad a > 0.$

Soluţie 3.3. Calculăm

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1} \operatorname{tg} \frac{a}{2^{n+1}}}{e^n \operatorname{tg} \frac{a}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e \operatorname{tg} \frac{a}{2^{n+1}}}{\frac{a}{2^{n+1}}} \frac{\frac{a}{2^n}}{\operatorname{tg} \frac{a}{2^n}} \frac{\frac{a}{2^{n+1}}}{\frac{a}{2^n}} = \frac{e}{2} < 1.$$

Conform criteriului raportului seria este divergentă. □

Problema 3.4. Să se stabilească natura seriei $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n!}$.

Soluţie 3.4. Calculăm raportul

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{[\ln(n+1)]^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(\ln n)^n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^n.$$

Cu regula lui l'Hospital avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0.$$

Iar

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\ln \frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^n = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln \frac{n+1}{n}}{\ln n}} = e^{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1.$$

Limita raportului va fi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, ceea ce arată că seria este convergentă. □

Probleme propuse

3.5. Să se studieze convergenţa şirurilor:

a) $z_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^n + i \cos \frac{1}{n}$

b) $z_n = \frac{1}{n+i}$

c) $z_n = i^n$,

d) $z_n = z^n,\ z \in \mathbb{C}$

e) $z_n = nz^n,\ z \in \mathbb{C}$

f) $z_n = \left(1 + \frac{\ln 2 + i\pi}{n}\right)^n$

3.6. Să se calculeze suma seriilor:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{i+2}\right)^n$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n + 5(-1)^n}{(1+2i)^{n+1}}$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}, x \in \mathbb{R}$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{3^n}, x \in \mathbb{R}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$,

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$.

Să se studieze natura seriilor

3.7. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a^n}{n^b},\ a, b \in \mathbb{R}$

3.8. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n!}}{10^{n+1}}$.

3.9. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^{\ln 2}}{(\ln 2)^n}$.

3.10. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2n)!!}{n^n}$.

3.11. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}$.

3.12. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdots (3n-1)}$.

3.13. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$.

3.14. $\sum\limits_{n\geq 1} n^2 \sin \frac{\pi}{2^n}$.

Indicaţii la problemele propuse

3.5. a) Calculăm limita părţii reale şi limita părţii imaginare; $z_n \to e+i$ b) $z_n \to 0$ c) Şirul este periodic, deci divergent d) Pentru $|z|<1$ şirul (z_n) este convergent la 0, pentru $|z|>1$ şirul este divergent deoarece şirul modulelor este divergent; pentru $|z|=1$ şirul (z_n) devine $z_n = \cos nt + i \sin nt$, pentru un $t \in [0, 2\pi)$. Dacă $t=0$ atunci $z_n = 1$. Fie $t \neq 0$. Presupunem că (z_n) este convergent la $c+is$, $c, s \in \mathbb{R}$. Atunci $z_{n+1} = \cos nt \cos t - \sin t \sin nt + i(\sin nt \cos t + \sin t \cos nt) \to c \cos t - s \sin t + i(s \cos t + c \sin t)$. Pe de altă parte $z_{n+1} \to c+is$. Rezultă $c = c\cos t - s \sin t$ şi $s = s \cos t + c \sin t$. Rezultă $c^2+s^2=0$, contradicţie cu faptul că $|z_n|=1$. Am demonstrat că (z_n) este divergent. d) Şirul converge doar dacă $|z|<1$. e) Şirul converge la $z = e^{\ln 2 + i\pi} = -2$.
3.6. a) Seria geometrică cu raţia $z = \frac{i}{i+2}$ are suma $\frac{i+2}{2}$. Se va verifica faptul că $|z|<1$.b) Se desface în două serii geometrice. Suma este $\frac{11+13i}{20}$. c) Suma seriei date este partea reală a seriei geometrice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx + i \sin nx}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos x + i \sin x}{2} \right)^n$$

şi are valoarea $\frac{2(2-\cos x)}{5-4\cos x}$. d) $\frac{3 \sin 2x}{10-6\cos 2x}$. e) $\frac{1}{18}$. f) $\frac{1}{12}$.
3.7. Criteriul raportului. Dacă $a<1$ CONV, dacă $a>1$ DIV, dacă $a=1$ serie armonică generalizată, cu $b>1$ CONV şi $b \leq 1$ DIV.
3.8. DIV; aplicăm criteriul raportului; avem $L=+\infty$
3.9. DIV; aplicăm criteriul raportului; avem $L = 1/\ln 2$
3.10. CONV; aplicăm criteriul raportului; avem $L = 2/e$
3.11. ABS CONV; aplicăm criteriul raportului; avem $L=0$
3.12. CONV; aplicăm criteriul raportului; avem $L=2/3$
3.13. CONV; aplicăm criteriul raportului; avem $L=2/3$
3.14. CONV; aplicăm criteriul raportului; avem $L=1/2$