Seminar 4

Serii de puteri

Probleme rezolvate

Problema 4.1. Să se găsească discul de convergenţă al seriilor de puteri

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^n}{n}$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left[1-(-3)^n\right] x^n$

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^n x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{(n!)^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n(2n+1)} (x+2i)^n$

f) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} x^n.$

Soluţie 4.1. a) Seria este centrată în $x_0 = 1$. Avem $a_n = \frac{1}{n}$. Raza de convergenţă este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Discul de convergenţă este $|x-1| < 1$.

b) Seria este centrată în $x_0 = 0$ şi avem $a_n = 1-(-3)^n$. Raza de convergenţă este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1-(-3)^n|}{|1-(-3)^{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|-3|^n \left|\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right|}{|-3|^{n+1} \left|\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right|} = \frac{1}{3}.$$

Discul de convergenţă este $|x| < \frac{1}{3}$. c) Avem $x_0 = 0$ şi $a_n = n^n$. Raza de convergenţă este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Mulţimea de convergenţă este $\{0\}$.

d) Avem $x_0 = 0$ şi $a_n = \frac{1}{(n!)^2}$. Raza de convergenţă este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^2 = \infty.$$

Mulţimea de convergenţă este $\mathbb{C}$.

e) Seria este centrată în $x_0 = -2i$, iar a_n este $a_n = \frac{i^n}{n(2n+1)}$. Raza de convergenţă este

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+3)}{n(2n+1)} = 1.$$

Discul de convergenţă este $|x+2i|<1$.

f) Avem $x_0=0$ şi $a_n=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!}$. Raza de convergenţă este

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{2}.$$

Discul de convergenţă este $|x|<\frac{1}{2}$. □

Problema 4.2. Să se găsească suma seriilor

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+2}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)x^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n(2n-1)x^{2n}$

Soluţie 4.2. a) Pornim de la seria geometrică

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},\quad x\in(-1,1).$$

Derivând, avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}.$$

Înmulţind egalitatea anterioară cu x obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Mai derivând încă o dată

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)'=\frac{(1-x)^2+x2(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Iar acum, dacă înmulţim toată egalitatea cu x rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

Pentru $x=\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}n^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}=6.$$

b) Descompunem seria în două şi folosim formula dedusă la punctul a).

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n^2+2}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^n+2\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}{\frac{4^3}{3^3}}+2\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{45}{32}.$$

c) Suma seriei se calculează pornind de la seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

Prin derivare se obţine

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Înmulţind cu x^2 egalitatea anterioară, rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)x^{n} = \frac{x^2}{(1-x)^2}.$$

d) Pentru a calcula suma seriei considerăm

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{2n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = -\left(\frac{1}{1+x^2} - 1\right) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Derivând această relaţie de două ori obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}2n(2n-1)x^{2n-2} = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)'' = \left(\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

Împărţind cu 2 şi înmulţind cu x^2 rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}n(2n-1)x^{2n} = \frac{x^2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

□

Problema 4.3. Să se găsească suma seriilor

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n(2n+1)}$

Soluţie 4.3. a) Observăm că

$$\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t.$$

Avem

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \operatorname{arctg} x.$$

b) Putem scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(1+t)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

c) Descompunem fracţia din termenul general al seriei în fracţii simple. Avem

$$\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{2n+1}$$

cu $A = 1$ şi $B = -2$. Descompunem seria iniţială în două serii convergente

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(-t^2)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1\frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t + 2\int_0^1\frac{-t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

Problema 4.4. Să se găsească suma seriilor

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{(2n+1)!}$

Soluţie 4.4. a) Pornim de la seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x - 1.$$

Prin derivare şi apoi înmulţire cu x rezultă

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n!} = xe^x.$$

Derivăm încă o dată şi înmulţim apoi cu x şi obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x^n}{n!} = x(x+1)e^x.$$

Pentru $x = -1$ avem

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(-1)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 0 - e^{-1} + e^{-1} - 1 = -1.$$

b) Pornim de la formula

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x.$$

Prin derivare avem

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n}}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Pentru $x = 1$

$$\cos 1 = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} + \sin 1,$$

de unde rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{1}{2}\left(\cos 1 - \sin 1\right).$$

□

Probleme propuse

Să se găsească suma seriilor:

4.5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2^n}$

4.6. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)^2 x^n$

4.7. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

4.8. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$

4.9. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n2^n}{n!}$

4.10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n n!}$

4.11. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2+4)}{(2n+1)!}$

4.12. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$

Indicaţii la problemele propuse

4.5. $-\frac{2}{9}$ **4.6.** $\frac{1-x}{(1+x)^3}$ **4.7.** $2\ln 2 - 1$

4.8.

$$\frac{1}{3}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}$$

4.9. $-\frac{2}{e^2}$ **4.10.** $-\frac{1}{4\sqrt{e}}$ **4.11.** $4\sin 1 - \frac{1}{4}\cos 1$ **4.12.** $\frac{1}{2e}$.