Seminar 7

Derivate parţiale

Probleme rezolvate

Problema 7.1. Se dă funcţia $f\colon (0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definită prin

$$f(x,y,z) = xe^{-zy^2+x} - \frac{z^3}{x} + 2y - 5.$$

Să se calculeze f'_x, f'_y, f'_z, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{y^2}, f''_{yx}, f''_{zy} şi f''_{z^2}. Să se calculeze $f''_{xz}(1,0,2)$.

Soluţie 7.1. Pentru a calcula f'_x, derivăm funcţia f în raport cu variabila x, considerând y şi z ca nişte constante.

$$f'_x = e^{-zy^2+x} + xe^{-zy^2+x}\cdot\left(-zy^2+x\right)'_x - z^3\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'_x + 0 = (1+x)e^{-zy^2+x} + \frac{z^3}{x^2}.$$

Calculăm şi celelalte derivate parţiale de ordinul întâi.

$$f'_y = xe^{-zy^2+x}\cdot(-2zy) + 2 = -2xyze^{-zy^2+x} + 2.$$

$$f'_z = xe^{-zy^2+x}\cdot(-y^2) - \frac{3z^2}{x} = -xy^2e^{-zy^2+x} - \frac{3z^2}{x}.$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul doi.

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \left((1+x)e^{-zy^2+x} + \frac{z^3}{x^2}\right)'_x = (2+x)e^{-zy^2+x} - \frac{2z^3}{x^3}.$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = -2(1+x)yze^{-zy^2+x}.$$

$$f''_{xz} = (f'_x)'_z = -(1+x)y^2e^{-zy^2+x} + \frac{3z^2}{x^2}.$$

$$f''_{y^2} = \left(f'_y\right)'_y = -2xze^{-zy^2+x} - 2xyze^{-zy^2+x}\cdot(-2zy) = -2xze^{-zy^2+x}(1-2zy^2).$$

$$f''_{yx} = \left(f'_y\right)'_x = -2yze^{-zy^2+x} - 2xyze^{-zy^2+x} = -2(1+x)yze^{-zy^2+x}.$$

Observăm că $f''_{xy} = f''_{yx}$. Acest lucru rezultă şi din Teorema lui Schwarz.

$$f''_{zy} = (f'_z)'_y = -2xye^{-zy^2+x} - xy^2e^{-zy^2+x}\cdot(-2zy) = -2xye^{-zy^2+x}(1-zy^2).$$

$$f''_{z^2} = (f'_z)'_z = xy^4e^{-zy^2+x} - \frac{6z}{x}.$$

Ţinând cont de expresia lui f''_{xz} obţinem $f''_{xz}(1,0,2) = 12$. □

Observaţie 7.1. Se pot folosi şi următoarele notaţii pentru derivate

$$f' = \frac{df}{dx}, \quad f'_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Problema 7.2. Să se calculeze $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m}(-1,0)$ pentru $f(x,y) = \dfrac{1}{2x-y}$.

Soluţie 7.2. Folosind formula $\left(\dfrac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n \cdot a^n \cdot n!}{(ax+b)^{n+1}}$, obţinem

$$\frac{\partial^m f}{\partial x^m} = \frac{(-1)^m 2^m \cdot m!}{(2x-y)^{m+1}}.$$

Derivând în raport cu y avem

$$\frac{\partial^{m+1} f}{\partial y \partial x^m} = \left(\frac{(-1)^m 2^m \cdot m!}{(2x-y)^{m+1}}\right)'_y = \frac{(-1)^m 2^m \cdot (m+1)!}{(2x-y)^{m+2}}.$$

Derivând în raport cu y de încă $n-1$ ori se obţine

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m} = \frac{(-1)^m 2^m \cdot (m+n)!}{(2x-y)^{m+n+1}}.$$

Aşadar

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m}(-1,0) = \frac{(-1)^m 2^m \cdot (m+n)!}{(-2)^{m+n+1}} = \frac{(m+n)!}{(-2)^{n+1}}.$$

□

Problema 7.3. Să se calculeze $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m}(-1,1)$ pentru $f(x,y) = 2xe^{3x-2y}$.

Soluţie 7.3. Avem $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial y^n \partial x^m}(-1,1) = \dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(-1,1)$. Derivând de n ori în raport cu y obţinem

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,y) = 2xe^{3x-2y}(-2)^n.$$

Folosind formula lui Leibniz, rezultă

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(x,y) = 2(-2)^n C_m^0 x \left(e^{3x-2y}\right)_x^{(m)} + 2(-2)^n C_m^1 \left(e^{3x-2y}\right)_x^{(m-1)} = 2(-2)^n 3^{m-1} e^{3x-2y}(3x+m).$$

În punctul $(-1,1)$ derivata are valoarea

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(-1,1) = 2(-2)^n 3^{m-1} e^{-5}(m-3).$$

□

Problema 7.4. Să se scrie matricea lui Jacobi pentru funcţia $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$f(x,y) = (\sin(x-3y), x^2\cos(xy), y^2 - 3x^4)$$

în punctul $(0,0)$.

Soluţie 7.4. Avem

$$J(f)(x,y)=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos(x-3y) & -3\cos(x-3y)\\ 2x\cos(xy)-x^2y\sin(xy) & -x^3\sin(xy)\\ -12x^3 & 2y\end{bmatrix}.$$

□

Rezultă

$$J(f)(0,0)=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Problema 7.5. Să se calculeze Jacobianul transformării $T=(u,v):\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$$(u,v)=\left(\sqrt{x^2+y^2},\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right).$$

Soluţie 7.5. Avem

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

□

Problema 7.6. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\frac{x}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

Soluţie 7.6. Fie (x,y) astfel încât $y\neq 0$. Atunci

$$f'_x(x,y)=y\cos\frac{x}{y},\qquad \text{şi } f'_y(x,y)=2y\sin\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}.$$

Fie acum un punct $(x,0)$. Atunci

$$f'_x(x,0)=\lim_{t\to x}\frac{f(t,0)-f(x,0)}{t-x}=\lim_{t\to x}\frac{0}{t-x}=0$$

$$f'_y(x,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(x,t)-f(x,0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin\frac{x}{t}}{t}=\lim_{t\to 0}t\sin\frac{x}{t}=0.$$

În concluzie,

$$f'_x(x,y)=\begin{cases} y\cos\frac{x}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0,\end{cases}$$

$$f'_y(x,y)=\begin{cases} 2y\sin\frac{x}{y}-x\cos\frac{x}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0.\end{cases}$$

□

Probleme propuse

7.7. Se dă $f(x,y) = \ln\left(x^2y^2 + \sqrt{1+x^2+y^2}\right)$. Să se calculeze f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}.

7.8. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiei

$$f(x,y,z) = \ln\left(x^y \cdot y^z \cdot z^x\right), \quad x,y,z > 0.$$

7.9. Se dă $f(x,y,z) = \dfrac{x}{z^2} - yx^2 + 3z - 5$. Să se calculeze f'_x, f'_y, f'_z, f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{y^2}, f''_{yz} şi f''_{z^2}.

7.10. Se dă $f(x,y) = \ln(3x+2y)$, $x,y > 0$. Să se calculeze $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(1,1)$.

7.11. Se dă $f(x,y) = 3y^2e^{x+2y}$. Să se calculeze $\dfrac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}(1,2)$.

7.12. Să se scrie matricea lui Jacobi pentru $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = (3xy - 4y^2z + 7x^3z^2, 2x^4y^2 - xz^3 + 5yz)$$

în punctul $(1,-2,-1)$.

7.13. Să se calculeze Jacobianul transformării $T = (u,v,w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$(u,v,w) = (x\cos y \sin z, x \sin y \sin z, x\cos z).$$

7.14. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

7.15. Să se arate că derivatele mixte de ordinul doi ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sunt distincte.