Seminar 8

Operatorii grad, div şi rot

Să se calculeze

Problema 8.1. $\vec{v} = \operatorname{grad} f \times \operatorname{grad} g$, unde $f = x + y + z$ şi $g = xy + yz + zx$.

Problema 8.2. versorul normalei la suprafaţa $x^2 + y^2 - z = 0$ în punctul $P(1, 2, 5)$.

Problema 8.3. derivata lui $f(x, y, z) = 6xz - 2y^2$ după direcţia $\vec{u} = \vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}$.

Problema 8.4. $\operatorname{div} \vec{v}$ şi $\operatorname{rot} \vec{v}$, unde $\vec{v} = (z - y)\vec{\imath} + (x - z)\vec{\jmath} + (y - x)\vec{\kappa}$.

Problema 8.5. $E_1 = \vec{b} \operatorname{grad} f + r^6 \vec{a} \operatorname{grad} g$ şi $E_2 = \operatorname{div}[(f + g)\vec{r}] - 3(f + g)$, unde $f = \vec{a} \operatorname{grad} r^3$ şi $g = \vec{b} \operatorname{grad} r^{-3}$, iar $\vec{a}$, $\vec{b}$ sunt vectori constanţi şi $\vec{r}$ este vectorul de poziţie.

Problema 8.6. $\operatorname{grad}(\vec{a} \times \vec{r}) \cdot (\vec{b} \times \vec{r})$.

Problema 8.7. $\operatorname{div} \vec{v}$ şi $\operatorname{rot} \vec{v}$, unde $\vec{v} = f(r)\vec{r}$.

Problema 8.8. Δf, unde $f(x, y, z) = 3x^2 z^3 + 4xy^2$.

Problema 8.9. Δr.

Temă

8.10. Să se calculeze $\operatorname{grad} |\vec{a} \times \vec{r}|$.

8.11. Să se determine $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f)$, unde f este un câmp scalar de clasă C^2.

8.12. Să se calculeze $\operatorname{div} \vec{v}$ şi $\operatorname{rot} \vec{v}$, unde $\vec{v} = (\vec{a} \cdot \vec{r})(\vec{a} \times \vec{r})$.

8.13. Să se calculeze $\Delta f(r)$ şi apoi $\Delta \frac{1}{r}$.

8.14. Să se calculeze $\operatorname{div} \vec{v}$ şi $\operatorname{rot} \vec{v}$, unde $\vec{v} = (yz + 3x)\vec{\imath} + (xz + 3y)\vec{\jmath} + (xy + 3z)\vec{\kappa}$.

Indicaţii

8.1. $\operatorname{grad} f = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{\kappa}$ şi $\operatorname{grad} g = (y + z)\vec{\imath} + (x + z)\vec{\jmath} + (y + x)\vec{\kappa}$. Atunci $\vec{v} = (y - z)\vec{\imath} + (z - x)\vec{\jmath} + (x - y)\vec{\kappa}$.

8.2. Formula pentru versorul normalei într-un punct P al unei suprafeţe date implicit $F(x, y, z) = 0$ este

$$\vec{n} = \pm \frac{\operatorname{grad} F(P)}{|\operatorname{grad} F(P)|}.$$

În cazul nostru $\vec{n} = \pm\frac{1}{\sqrt{21}}(2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - \vec{\kappa})$.

8.3. Derivata lui f după direcţia $\vec{u}$ este

$$\frac{df}{d\vec{u}} = \operatorname{grad} f \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = (6z\vec{\imath} - 4y\vec{\jmath} + 6x\vec{\kappa}) \cdot \frac{\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}}{\sqrt{6}} = \frac{6z + 4y + 12x}{\sqrt{6}}.$$

8.4. $\operatorname{div}\vec{v} = 0$ şi $\operatorname{rot}\vec{v} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{\kappa}$.

8.5. $f = 3r(\vec{a}\cdot\vec{r})$, $\operatorname{grad} f = 3r\vec{a} + \frac{3(\vec{a}\cdot\vec{r})}{r}\vec{r}$, $g = -\frac{3}{r^5}(\vec{b}\cdot\vec{r})$, $\operatorname{grad} g = -\frac{3}{r^5}\vec{b} + \frac{15(\vec{b}\cdot\vec{r})}{r^7}\vec{r}$. Atunci $E_1 = \frac{18}{r}(\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r})$ şi $E_2 = 6r(\vec{a}\cdot\vec{r}) + \frac{12(\vec{b}\cdot\vec{r})}{r^5}$.

8.6. Se folosesc proprietăţile produsului mixt şi ale produsului dublu vectorial

$$(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r}) = \vec{b}\cdot(\vec{r}\times(\vec{a}\times\vec{r})) = \vec{b}\cdot\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{r} \\ \vec{a}\cdot\vec{r} & \vec{r}\cdot\vec{r} \end{vmatrix} = r^2(\vec{a}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{r})(\vec{b}\cdot\vec{r}).$$

Atunci

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(\vec{a}\times\vec{r})\cdot(\vec{b}\times\vec{r}) &= (\vec{a}\cdot\vec{b})\operatorname{grad} r^2 - (\vec{b}\cdot\vec{r})\operatorname{grad}(\vec{a}\cdot\vec{r}) - (\vec{a}\cdot\vec{r})\operatorname{grad}(\vec{b}\cdot\vec{r}) \\ &= 2(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{r} - (\vec{b}\cdot\vec{r})\vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{r})\vec{b}. \end{aligned}$$

8.7. $\operatorname{div}\vec{v} = 3f(r) + rf'(r)$, $\operatorname{rot}\vec{v} = f(r)\operatorname{rot}\vec{r} + \operatorname{grad} f(r)\times\vec{r} = \vec{0}$.

8.8.

$$\Delta f = f''_{x^2} + f''_{y^2} + f''_{z^2} = 6z^3 + 8x + 18x^2 z.$$

8.9. $\Delta r = \operatorname{div}(\operatorname{grad} r) = \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{div}\vec{r} + \vec{r}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$.