Seminar 9

Funcţii compuse

Probleme rezolvate

Problema 9.1. Se dă $F(x,y) = f(y^4 - 3x^2)$. Să se calculeze F'_x, F'_y, F''_{x^2}, F''_{xy} şi F''_{y^2}. Apoi, să se calculeze $F''_{x^2}(-1,2)$.

Soluţie 9.1. Notând $u = y^4 - 3x^2$ obţinem

$$F'_x = f'(u) \cdot u'_x = f'(u) \cdot (-6x) = -6xf'(u).$$
$$F'_y = f'(u) \cdot u'_y = f'(u) \cdot 4y^3 = 4y^3 f'(u).$$

Derivatele de ordinul doi vor fi

$$F''_{x^2} = (F'_x)'_x = (-6x \cdot f'(u))'_x = -6f'(u) - 6xf''(u) \cdot u'_x = -6f'(u) + 36x^2 f''(u).$$
$$F''_{xy} = (F'_x)'_y = (-6x \cdot f'(u))'_y = -6xf''(u) \cdot u'_y = -24xy^3 f''(u).$$
$$F''_{y^2} = \left(F'_y\right)'_y = \left(4y^3 \cdot f'(u)\right)'_y = 12y^2 f'(u) + 16y^6 f''(u).$$

Ţinând cont de expresia derivatei F''_{x^2}, avem $F''_{x^2}(-1,2) = -6f'(13) + 36f''(13)$. □

Problema 9.2. Se se calculeze derivatele de ordinul doi ale funcţiei

$$F(x,y) = 2x\ln(y+1) - x^3 y \cdot f(2y - 3x).$$

Soluţie 9.2. Calculăm mai întâi derivatele de ordinul întâi. Notăm $u = 2y - 3x$.

$$\begin{aligned} F'_x &= 2\ln(y+1) - 3x^2 y \cdot f(u) - x^3 y \cdot f'(u) \cdot (-3) \\ &= 2\ln(y+1) - 3x^2 y \cdot f(u) + 3x^3 y \cdot f'(u) \end{aligned}$$
$$F'_y = \frac{2x}{y+1} - x^3 \cdot f(u) - 2x^3 y \cdot f'(u).$$

Calculăm acum derivatele de ordinul doi.

$$F''_{x^2} = -6xy \cdot f(u) + 18x^2 y \cdot f'(u) - 9x^3 y \cdot f''(u).$$
$$F''_{xy} = \frac{2}{y+1} - 3x^2 \cdot f(u) + (-6x^2 y + 3x^3) \cdot f'(u) + 6x^3 y \cdot f''(u).$$
$$F''_{y^2} = -\frac{2x}{(y+1)^2} - 4x^3 \cdot f'(u) - 4x^3 y \cdot f''(u).$$

□

Problema 9.3. Să se arate că funcţia $z = xy \cdot \varphi(x^2 - y^2)$ verifică ecuaţia

$$xy^2 \cdot z'_x + x^2y \cdot z'_y = z \cdot (x^2 + y^2).$$

Soluţie 9.3. Calculăm derivatele de ordinul întâi ale funcţiei z, notând $u = x^2 - y^2$:

$$z'_x = y \cdot \varphi(u) + xy \cdot \varphi'(u) \cdot 2x = y\varphi(u) + 2x^2y\varphi'(u).$$
$$z'_y = x\varphi(u) - 2xy^2\varphi'(u).$$

Atunci

$$\begin{aligned} xy^2 \cdot z'_x + x^2y \cdot z'_y &= xy^2 \cdot [y\varphi(u) + 2x^2y\varphi'(u)] + x^2y \cdot [x\varphi(u) - 2xy^2\varphi'(u)] \\ &= xy^3\varphi(u) + x^3y\varphi(u) = xy\varphi(u) \cdot (x^2 + y^2) = z \cdot (x^2 + y^2). \end{aligned}$$

□

Problema 9.4. Să se calculeze $F'(1)$ şi $F''(1)$ pentru $F(x) = f(\sqrt{x}, e^{3x})$, $x \geq 0$, unde $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

Soluţie 9.4. Notăm $u = \sqrt{x}$ şi $v = e^{3x}$. Calculăm derivata întâi.

$$F'(x) = f'_u \cdot u' + f'_v \cdot v' = f'_u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + f'_v \cdot 3e^{3x}.$$

Vom avea $F'(1) = \frac{1}{2} f'_u(1, e^3) + 3e^3 f'_v(1, e^3)$. Calculăm derivata de ordinul doi.

$$\begin{aligned} F''(x) &= \left(f'_u \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + f'_v \cdot 3e^{3x}\right)' \\ &= (f'_u)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + f'_u \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' + (f'_v)' \cdot 3e^{3x} + f'_v \cdot \left(3e^{3x}\right)'. \end{aligned}$$

Avem

$$(f'_u)' = f''_{u^2} \cdot u' + f''_{uv} \cdot v' = f''_{u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + f''_{uv} \cdot 3e^{3x}$$
$$(f'_v)' = f''_{vu} \cdot u' + f''_{v^2} \cdot v' = f''_{vu} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + f''_{v^2} \cdot 3e^{3x}$$

Pentru că $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ avem conform Teoremei lui Schwarz $f''_{uv} = f''_{vu}$. Obţinem

$$F''(x) = \frac{1}{4x} \cdot f''_{u^2} + \frac{3e^{3x}}{\sqrt{x}} \cdot f''_{uv} + 9e^{6x} \cdot f''_{v^2} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} \cdot f'_u + 9e^{3x} \cdot f'_v.$$

Deci, avem

$$F''(1) = f''_{u^2}(1, e^3) + 3e^3 \cdot f''_{uv}(1, e^3) + 9e^6 \cdot f''_{v^2}(1, e^3) - \frac{1}{4} \cdot f'_u(1, e^3) + 9e^3 \cdot f'_v(1, e^3).$$

□

Problema 9.5. Să se calculeze $F'(x)$ pentru $F(x) = g(3x - 2, \ln x, \cos x)$, $x > 0$.

Soluţie 9.5. Notând $u = 3x - 2$, $v = \ln x$ şi $w = \cos x$, avem

$$F'(x) = g'_u \cdot u' + g'_v \cdot v' + g'_w \cdot w' = 3g'_u + \frac{1}{x} g'_v - \sin x \cdot g'_w.$$

□

Problema 9.6. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei

$$f(x, y) = xy^2 \cdot \varphi(x - y, \operatorname{arctg} xy).$$

Soluţie 9.6. Notăm $u = x - y$ şi $v = \operatorname{arctg} xy$. Avem

$$f'_x = y^2 \cdot \varphi(u, v) + xy^2(\varphi'_u \cdot u'_x + \varphi'_v \cdot v'_x) = y^2 \cdot \varphi(u, v) + xy^2 \varphi'_u + \frac{xy^3}{1 + x^2y^2} \varphi'_v.$$

$$f'_y = 2xy \cdot \varphi(u, v) + xy^2(\varphi'_u \cdot u'_y + \varphi'_v \cdot v'_y) = 2xy \cdot \varphi(u, v) - xy^2 \varphi'_u + \frac{x^2y^2}{1 + x^2y^2} \varphi'_v.$$

□

Problema 9.7. Fie $F(x, y) = f(x + y^2, e^{x^2})$. Să se calculeze F'_x, F''_{x^2} şi F''_{xy}.

Soluţie 9.7. Notăm $u = x + y^2$ şi $v = e^{x^2}$. Avem

$$F'_x = f'_u \cdot u'_x + f'_v \cdot v'_x = f'_u + 2xe^{x^2} f'_v.$$

$$F''_{x^2} = f''_{u^2} + 2xe^{x^2} f''_{uv} + 2xe^{x^2}(f''_{vu} + 2xe^{x^2} f''_{v^2}).$$

$$F''_{xy} = 2yf''_{u^2} + 4xye^{x^2} f''_{vu}.$$

□

Problema 9.8. Fie $F(\rho, \varphi) = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$, unde $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Să se calculeze

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial F}{\partial \rho}.$$

Soluţie 9.8. Notăm $u = \rho \cos \varphi$ şi $v = \rho \sin \varphi$. Avem

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot (-\rho \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \rho \cos \varphi.$$

Calculăm derivatele de ordinul doi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \sin \varphi\right) \cdot \cos \varphi + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \sin \varphi\right) \cdot \sin \varphi \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \cdot \cos^2 \varphi + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} \cdot \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \cdot \sin^2 \varphi,\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} &= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot(-\rho\sin\varphi)+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\rho\cos\varphi\right]\cdot(-\rho\sin\varphi)-\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\rho\cos\varphi\\ &\quad+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot(-\rho\sin\varphi)+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\rho\cos\varphi\right]\cdot\rho\cos\varphi-\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\rho\sin\varphi\\ &=\rho^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\sin^2\varphi-2\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\cos^2\varphi\right)\\ &\quad-\rho\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\sin\varphi\right).\end{aligned}$$

Înlocuind, se obţine $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}+\dfrac{1}{\rho^2}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial\rho}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}$. □

Problema 9.9. Fie $F(x,y)=y\cdot f\left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}},\dfrac{x+y}{x-y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$, unde f,g sunt funcţii de clasă C^2. Să se calculeze $x^2\cdot F''_{x^2}+2xy\cdot F''_{xy}+y^2\cdot F''_{y^2}$.

Soluţie 9.9. Pentru x şi y fixaţi, introducem funcţia $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(t)=F(tx,ty)$. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse, obţinem

$$\begin{aligned}h'(t)&=x\cdot F'_x(tx,ty)+y\cdot F'_y(tx,ty)\\ h''(t)&=x^2\cdot F''_{x^2}(tx,ty)+2xy\cdot F''_{xy}(tx,ty)+y^2\cdot F''_{y^2}(tx,ty).\end{aligned}$$

De aici rezultă

$$h''(1)=x^2\cdot F''_{x^2}(x,y)+2xy\cdot F''_{xy}(x,y)+y^2\cdot F''_{y^2}(x,y),$$

care este exact expresia ce trebuie calculată. Pe de altă parte

$$h(t)=ty\cdot f\left(\frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}},\frac{x+y}{x-y}\right)+g\left(\frac{y}{x}\right).$$

De aici rezultă $h''(t)=0$. Obţinem $x^2\cdot F''_{x^2}+2xy\cdot F''_{xy}+y^2\cdot F''_{y^2}=0$. □

Probleme propuse

9.10. Se dă $F(x,y)=f\left(\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\right)$, $x,y>0$. Să se calculeze F''_{x^2}, F''_{xy} şi F''_{y^2}.

9.11. Se dă $F(x,y,z)=f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$. Să se calculeze $F''_{x^2}+F''_{y^2}+F''_{z^2}$.

9.12. Să se arate că funcţiile următoare verifică ecuaţiile

a) $z=\varphi(bx-ay)$	$az'_x+bz'_y=0.$
b) $z=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$xz'_x+yz'_y=0.$
c) $z=\rho\cdot f(\ln\rho+\varphi)$	$\rho z'_\rho-z'_\varphi=z.$
d) $z=y\cdot\varphi\left(y\cdot\dfrac{x^2+y^2}{x^2}\right)$	$x(x^2+y^2)z'_x+2y^2\left(xz'_x+yz'_y-z\right)=0.$

9.13. Să se calculeze $F'(0)$ şi $F''(0)$ pentru $F(x) = f(x^3 - 2x, x^2 + 1)$.

9.14. Să se calculeze $F'(x)$ şi $F''(x)$ pentru $F(x) = f(\operatorname{tg} x, \ln(x^2 + 1))$.

9.15. Se se calculeze F'_x, F'_y, F''_{x^2}, F''_{xy} şi F''_{y^2} pentru

a) $F(x, y) = f\left(xy, \dfrac{x}{y}\right)$

b) $F(x, y) = f\left(x^3 + 2y, xy^3\right)$

c) $F(x, y) = f\left(x^2 - 3xy, y - x\right)$,

d) $F(x, y) = x^3 - xy^2 \cdot f(x - y, 2xy)$

9.16. Fie $F(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right) + x \cdot g\left(\dfrac{y}{x}, \dfrac{x - y}{x + y}\right)$, unde f, g sunt funcţii de clasă C^2. Să se calculeze

$$x^2 \cdot F''_{x^2} + 2xy \cdot F''_{xy} + y^2 \cdot F''_{y^2}.$$