

# Seminar 10

## Primitivele funcțiilor raționale

Toate integralele sunt de forma  $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ , unde  $P, Q$  sunt polinoame cu coeficienți reali.

Să se calculeze integralele:

### Problema 10.1.

$$a) \int (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x - 2) dx$$

$$d) \int \frac{dx}{x^2 + 2}$$

$$b) \int \frac{dx}{x + 2}$$

$$e) \int \frac{x dx}{x^2 + 6}$$

$$c) \int \frac{dx}{(x - 3)^5}$$

$$f) \int \frac{x dx}{2x^2 + x + 1}$$

### Problema 10.2.

$$a) \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx,$$

$$b) \int \frac{2x + 1}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)} dx.$$

### Problema 10.3.

$$a) \int \frac{dx}{(x - 1)^2(x - 2)}$$

$$b) \int \frac{(3x + 2) dx}{x(x + 1)^3}.$$

### Problema 10.4.

$$a) \int \frac{x^3 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx$$

$$b) \int \frac{dx}{(x + 1)^2(x^2 + 1)}.$$

### Problema 10.5.

$$a) \int \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}$$

$$b) \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 2)^2} dx.$$

## Indicații și răspunsuri

10.1. a) Se integrează cu formula  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$ ,  $a \neq -1$ . Obținem

$$I = \frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - \frac{5x^2}{2} - 2x + C.$$

b) Se folosește formula  $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln|x + a| + C$ . Rezultă  $I = \ln|x + 2| + C$ .

c) Avem

$$\int \frac{dx}{(x - 3)^5} = \int (x - 3)^{-5} dx = \frac{(x - 3)^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{(x - 3)^4} + C.$$

d) Folosim formula  $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ ,  $a \neq 0$ . Obținem  $I = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C$ .

e) Fiindcă  $(x^2 + 6)' = 2x$  putem scrie

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 6} = \int \frac{(x^2 + 6)' dx}{x^2 + 6} = \int \frac{d(x^2 + 6)}{x^2 + 6} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C = \ln(x^2 + 6) + C.$$

f) Fiindcă  $(2x^2 + x + 1)' = 4x + 1$ , desfacem integrala în două

$$I = \frac{1}{4} \int \frac{4x dx}{2x^2 + x + 1} = \frac{1}{4} \int \frac{4x + 1 dx}{2x^2 + x + 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2x^2 + x + 1}.$$

Pentru a doua integrală folosim forma canonică  $ax^2 + bx + c = a \left[ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ . Obținem

$$I = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + x + 1) - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} = \frac{1}{4} \ln(2x^2 + x + 1) - \frac{1}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x + 1}{\sqrt{7}} + C.$$

**10.2.** a) Fiindcă polinomul de la numărător are gradul mai mare decât cel de la numitor, facem împărțirea de polinoame. Se obține câtul  $x^2 + x + 4$  și restul  $4x^2 + 16x - 8$ . Cu teorema împărțirii cu rest  $D = \hat{I} \cdot C + R$ , rezultă

$$x^5 + x^4 - 8 = (x^3 - 4x)(x^2 + x + 4) + 4x^2 + 16x - 8.$$

Așadar,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \frac{(x^3 - 4x)(x^2 + x + 4) + 4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx \\ &= \int (x^2 + x + 4) dx + \int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx. \end{aligned}$$

Pentru că  $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2)$  putem face descompunerea în fracții simple

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{x + 2}.$$

Înmulțind cu numitorul comun  $x(x - 2)(x + 2)$ , rezultă

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x - 2)(x + 2) + Bx(x + 2) + Cx(x - 2).$$

Dând valoarea lui  $x = 0$ , obținem  $A = 2$ . Pentru  $x = 2$ , avem  $B = 5$ , iar pentru  $x = -2$  se obține  $C = -3$ . Deci

$$\int \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} dx = \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{5}{x - 2} dx + \int \frac{-3}{x + 2} dx.$$

În final,

$$I = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln |x| + 5 \ln |x - 2| - 3 \ln |x + 2| + C.$$

b)  $I = -\frac{3}{4} \ln |x - 1| + \ln |x - 2| - \frac{1}{4} \ln |x + 3| + C$ .

**10.3.** a) Se descompune în fracții simple sub forma

$$\frac{1}{(x - 1)^2(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x - 2},$$

cu  $A = -1$ ,  $B = -1$  și  $C = 1$ . Obținem  $I = -\ln|x-1| + \frac{1}{x-1} + \ln|x-2|$ .

b) Are loc descompunerea  $\frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$ . Atunci  
 $I = 2\ln|x| - 2\ln|x+1| + \frac{4x+3}{2(x+1)^2} + C$ .

**10.4.** a) Are loc descompunerea

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4},$$

cu  $A = -4/3$ ,  $B = 1/3$ ,  $C = 7/3$ ,  $D = -1/3$ . Integrala va fi

$$I = -\frac{2}{3}\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x + \frac{7}{6}\ln(x^2 + 4) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

b) Expresia de sub integrală se descompune

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1},$$

cu  $A = 1/2$ ,  $B = 1/2$ ,  $C = -1/2$ ,  $D = 0$ . Integrala va fi

$$I = \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + C.$$

**10.5.** a) Scriem

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+4)^2} &= \frac{1}{4} \int \frac{4dx}{(x^2+4)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+4} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx. \end{aligned}$$

Folosim integrarea prin părți. Avem

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2+4)^2} dx &= \frac{1}{2} \int x \cdot \frac{2x}{(x^2+4)^2} dx = \frac{1}{2} \int x \cdot \left( \frac{-1}{x^2+4} \right)' dx \\ &= -\frac{x}{2(x^2+4)} - \frac{1}{2} \int x' \cdot \frac{-1}{x^2+4} dx = -\frac{x}{2(x^2+4)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Atunci

$$I = \frac{x}{8(x^2+2)} + \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

b) Are loc descompunerea

$$\frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{Cx+D}{(x^2+2)^2},$$

cu  $A = 1$ ,  $B = 0$ ,  $C = -1$ ,  $D = -1$ . Integrala va fi

$$I = \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + \frac{-x+2}{4(x^2+2)} - \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$