

Seminar 11

Primitive de forma $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Funcțiile R sunt funcții raționale de forma $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, unde P, Q sunt polinoame cu coeficienți reali.

Să se calculeze integralele:

Problema 11.1.

$$a) \int (\cos 5x - \sin 2x) dx$$

$$c) \int \sin 3x \cdot \sin 2x dx$$

$$b) \int \cos 2x \cdot \sin 3x dx$$

$$d) \int \cos x \cdot \cos 3x dx$$

Problema 11.2.

$$a) \int \cos^2 x dx,$$

$$c) \int \sin^4 x dx$$

$$b) \int \sin^2 3x dx$$

$$d) \int \cos^5 x dx$$

Problema 11.3.

$$a) \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

$$c) \int \frac{\sin x dx}{\cos 2x}$$

$$b) \int \frac{\sin x}{1 + \cos x + \cos^2 x} dx$$

$$d) \int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x}$$

Problema 11.4.

$$a) \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$c) \int \frac{dx}{\cos x \cos 2x}$$

$$b) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$$

$$d) \int \frac{\sin 2x dx}{(2 + \sin x)^2}$$

Problema 11.5.

$$a) \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$$

$$c) \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$$

$$b) \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$d) \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$$

Problema 11.6.

$$a) \int \frac{dx}{5 + 4 \sin x}$$

$$b) \int \frac{dx}{5 - 3 \cos x}$$

Indicații și răspunsuri

11.1. a) Se folosesc formulele

$$\int \sin ax \, dx = -\frac{\cos ax}{a}, \quad \int \cos ax \, dx = \frac{\sin ax}{a}, \quad a \neq 0.$$

Obținem

$$I = \int (\cos 5x - \sin 2x) \, dx = \int \cos 5x \, dx - \int \sin 2x \, dx = \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

b) Folosim formula

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

pentru $a = 3x$ și $b = 2x$. Se obține $I = -\frac{1}{10} \cos 5x - \frac{1}{2} \cos x + C$.

c) Se folosește formula

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

și se obține $I = \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{10} \sin 5x + C$.

d) Cu ajutorul formulei

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)]$$

și se obține $I = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$.

11.2. Cu $a = b$ în formulele din exercițiul anterior, rezultă noile formule

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}, \quad \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}.$$

a) Vom obține

$$I = \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$$

b) Rezultă

$$I = \int \sin^2 3x \, dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 6x) \, dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 6x}{6} \right) + C.$$

c) Reducem gradul succesiv.

$$\begin{aligned} I &= \int \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx \\ &= \frac{1}{4} \left(x - \sin 2x + \int \cos^2 2x \, dx \right) = \frac{1}{4} \left[x - \sin 2x + \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) \right] + C. \end{aligned}$$

d) Pentru a integra funcții trigonometrice la puteri impare procedăm în felul următor.

$$I = \int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \cdot \cos x \, dx.$$

Cu schimbarea de variabilă $u = \sin x$, avem $du = \cos x \, dx$ și

$$I = \int (1 - u^2)^2 du = \int (1 - 2u^2 + u^4) du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C.$$

11.3. Pentru integrale de forma $\int R(\sin x, \cos x) dx$, dacă se verifică condiția

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$

atunci se face schimbarea de variabilă $u = \cos x$. Toate integralele din acest exercițiu verifică această condiție. a) Avem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx = \int \frac{(1 - u^2)(-du)}{2 + u} = \int \frac{u^2 - 1}{u + 2} du = \int \frac{u^2 - 4 + 3}{u + 2} du \\ &= \int \left(u - 2 + \frac{3}{u + 2} \right) du = \frac{u^2}{2} - 2u + 3 \ln |u + 2| = \frac{\cos^2 x}{2} - 2 \cos x + 3 \ln(2 + \cos x) + C. \end{aligned}$$

b) Cu schimbarea de variabilă $u = \cos x$ avem

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin x}{1 + \cos x + \cos^2 x} = - \int \frac{du}{u^2 + u + 1} = - \int \frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1 + 2 \cos x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

c) Aplicând formula $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos 2x} = - \int \frac{du}{2u^2 - 1} = - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 - \frac{1}{2}} = - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{2} \cos x - 1}{\sqrt{2} \cos x + 1} \right| + C.$$

d) După schimbarea de variabilă $u = \cos x$ rezultă

$$I = \int \frac{dx}{\sin x + \sin 2x} = \int \frac{dx}{\sin x(1 + 2 \cos x)} = - \int \frac{du}{(1 - u^2)(1 + 2u)}.$$

Acum se descompune în fracții simple

$$\frac{-1}{(1 - u^2)(1 + 2u)} = \frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u} + \frac{C}{1 + 2u},$$

cu $A = -1/6$, $B = 1/2$ și $C = -4/3$. Rezultă

$$I = \frac{1}{6} \ln(1 - \cos x) + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos x) - \frac{2}{3} \ln(1 + 2 \cos x) + C.$$

11.4. Când are loc condiția $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ atunci notăm $u = \sin x$. Toate integralele din acest exercițiu verifică această condiție. a) Avem

$$I = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |\sin x| + C.$$

b)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{1 - u^2}{u^4} du \\ &= \int u^{-4} du - \int u^{-2} du = \frac{u^{-3}}{-3} - \frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{\cos x \cos 2x} = \int \frac{du}{(1-u^2)(1-2u^2)} = \int \frac{du}{u^2-1} - \int \frac{2du}{2u^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sin x}{1+\sin x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\sin x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sin 2x dx}{(2+\sin x)^2} = \int \frac{2u du}{(2+u)^2} = 2 \int \frac{u+2-2du}{(2+u)^2} \\ &= 2 \ln(2+\sin x) + \frac{4}{2+\sin x} + C. \end{aligned}$$

11.5. Atunci când este îndeplinită condiția $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ se face substituția $u = \operatorname{tg} x$ și se ține cont că $dx = \frac{du}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$ și $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$.

a)

$$I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int \frac{\frac{u^2}{1+u^2}}{\frac{1}{(1+u^2)^3}} \frac{du}{1+u^2} = \int u^2(1+u^2) du = \int (u^2+u^4) du = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + \frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C.$$

b)

$$I = \int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2} = \int \frac{du}{(u+1)^2} = -\frac{1}{u+1} = -\frac{1}{1+\operatorname{tg} x} + C.$$

c)

$$I = \int \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} = \int \frac{(1+u^2) du}{1+u^4} = \int \frac{(1+\frac{1}{u^2}) du}{u^2+\frac{1}{u^2}}.$$

Cu schimbarea de variabilă $t = u - \frac{1}{u}$ avem $dt = (1 + \frac{1}{u^2}) du$ și $t^2 = u^2 + \frac{1}{u^2} - 2$. Așadar

$$I = \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u - \frac{1}{u}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}} + C.$$

d)

$$I = \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} = \int \frac{(1+u^2)^2 du}{u^2} = -\frac{1}{u} + 2u + \frac{u^3}{3} = -\operatorname{ctg} x + 2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

11.6. În cazul în care nici o condiție de la exercițiile anterioare nu este verificată se face substituția $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ și se ține cont de faptul că $dx = \frac{2du}{1+u^2}$, $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ și $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

a) Avem

$$I = \int \frac{dx}{5+4\sin x} = 2 \int \frac{du}{5+5u^2+8u} = \frac{2}{5} \int \frac{du}{(u+\frac{4}{5})^2 + \frac{9}{25}} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{4+5\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{3} + C.$$

b)

$$I = \int \frac{dx}{5-3\cos x} = \int \frac{2du}{5(1+u^2)-3(1-u^2)} = \int \frac{du}{1+4u^2} = \frac{\operatorname{arctg} 2u}{2} = \frac{\operatorname{arctg} (2\operatorname{tg} \frac{x}{2})}{2} + C.$$