

Seminar 13

Funcția β și Γ

Să se calculeze integralele:

Problema 13.1.

$$a) \int_0^{\infty} (x^3 - 2x^2 + 3)e^{-x^2} dx$$

$$c) \int_0^{\infty} x^4 e^{-3x^2} dx$$

$$b) \int_0^{\infty} x^{10} e^{-2x} dx$$

$$d) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Problema 13.2.

$$a) \int_a^b (x-a)^n (b-x)^m dx, m, n \in \mathbb{N}, b > a$$

$$c) \int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, b > a$$

$$b) \int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} dx, b > a$$

$$d) \int_1^3 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx$$

Problema 13.3.

$$a) \int_0^a x^m (a^n - x^n)^p dx, m, p > -1, n > 0$$

$$c) \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx$$

$$b) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^m}} dx, m, n \in \mathbb{N}$$

$$d) \int_0^2 x^4 \sqrt[3]{8-x^3} dx$$

Problema 13.4.

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x dx, a, b > -1$$

$$d) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx, n \in \mathbb{N}$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx$$

$$e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x \cos^{12} x dx$$

$$c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx, n \in \mathbb{N}$$

$$f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2t-1} 2x dx, t > 0$$

Problema 13.5.

$$a) \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx, 0 < m < n$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2} dx, p \in (-1, 1)$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx, n \in \mathbb{N}$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^3} dx$$

Indicații și răspunsuri

13.1. a) Se face substituția $x^2 = t$ și se desface în trei integrale. Se obține

$$I = \frac{1}{2}\Gamma(2) - \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{\pi}.$$

b) Se notează $2x = t$. Obținem $I = \frac{\Gamma(11)}{2^{11}} = 10!/2^{11}$.

c) Notăm $3x^2 = t$. Obținem $I = \frac{1}{18\sqrt{3}}\Gamma(5/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{24\sqrt{3}}$.

d) Folosim paritatea funcției de sub integrală și apoi facem schimbarea de variabilă $x^2 = t$.

$$I = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

13.2. a) Se face schimbarea de variabilă $x = a + t(b - a)$. Se obține

$$I = (b - a)^{n+m+1} \beta(n + 1, m + 1) = \frac{(b - a)^{n+m+1} n! m!}{(n + m + 1)!}.$$

b) Se folosește rezultatul precedent pentru $n = -1/2$ și $m = -1/2$. Obținem $I = \pi$.

c) Folosim rezultatul de la a) pentru $n = 1/2$ și $m = -1/2$. Rezultă $I = (b - a)\pi/2$.

d) Despărțim în două integrale care sunt de tipul de la b) și c).

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx = \int_1^3 \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx + \int_1^3 \frac{1}{\sqrt{(x-1)(3-x)}} dx = \pi + \pi = 2\pi.$$

13.3. a) Se face succesiv schimbarea de variabile $x^n = u$ și $u = a^n t$. Va rezulta

$$I = \int_0^a x^m (a^n - x^n)^p dx = \frac{1}{n} \int_0^{a^n} u^{\frac{m+1}{n}-1} (a^n - u)^p du = \frac{a^{m+1+np}}{n} \beta\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right).$$

b) Se folosește rezultatul de la a) și se obține $I = \frac{1}{m} \beta(1/m, 1 - 1/n)$.

c) Se folosește rezultatul de la a) pentru $a = 3$, $n = 2$, $m = 2$, $p = 1/2$. Rezultă $I = \frac{81\pi}{16}$.

d) Se folosește rezultatul de la a) pentru $a = 2$, $n = 3$, $m = 4$, $p = 1/3$. Rezultă $I = \frac{128\pi}{27\sqrt{3}}$.

13.4. a) Se folosesc succesiv schimbările de variabile $\sin x = u$ și $u^2 = t$. Obținem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cos^b x dx = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right).$$

b) Folosim formula pentru $a = 1/2$ și $b = -1/2$. $I = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

c) $I = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!}$.

d) $I = \frac{1}{2} \beta\left(n+1, \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.

e) $I = \frac{63\pi}{2^{20}}$.

f) $I = 2^{2t-2} \beta(t, t)$.

13.5. a) Se folosește reprezentarea

$$\beta(a, b) = \int_0^\infty \frac{t^{a-1} dt}{(1+t)^{a+b}}.$$

Notăm $x^n = t$. Avem $I = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$.

b) Notăm $x^2 = t$. Obținem $I = \frac{1}{2} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{2n+1}{2}\right)$.

c) Notăm $x^2 = t$. Se obține $I = \frac{\pi}{2 \cos \frac{\pi}{2}}$.

d) Notăm $x^3 = t$. Rezultă $I = \frac{2\pi}{27\sqrt{3}}$.