Tema 1

Problema 1.1. Să se calculeze limita şirurilor:

a) $a_n = \dfrac{7n^2 - \sqrt{5n^2+6n+1}}{2n^2+1+\ln(n+1)}$

b) $b_n = \left(\dfrac{3^n}{3^n+1}\right)^n$

c) $c_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-n+1}$,

d) $d_n = \left(\dfrac{n-1}{9n+1}\right)^{\frac{3n^2-1}{n+3}}$

Problema 1.2. Să se determine partea reală şi imaginară pentru:

a) $z = \dfrac{(-2)^i}{i}$

b) $z = \left(\sqrt{3} - i\right)^{2021}$

c) $z = \sin\left(\dfrac{4\pi}{3} + i\ln 2\right)$

d) $z = \sqrt{i}$

Problema 1.3. Să se calculeze suma seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}-3i^{n+1}}{3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin 3nx}{4^n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

Problema 1.4. Să se studieze natura seriilor:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^e}{e^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{4^n+n}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2\sin\frac{\pi}{2^n}$

Răspunsuri

1.1 a) 7/2; b) 1 c) 1/2 d) 0
1.2 a) $\operatorname{Re} z = e^{-\pi-2k\pi}\sin(\ln 2)$ şi $\operatorname{Im} z = -e^{-\pi-2k\pi}\cos(\ln 2)$
b) $\operatorname{Re} z = -\sqrt{3}2^{2020}$ şi $\operatorname{Im} z = -2^{2020}$ c) $\operatorname{Re} z = -\frac{5\sqrt{3}}{8}$ şi $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{8}$ d) $\operatorname{Re} z = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $\operatorname{Im} z = (-1)^k\frac{\sqrt{2}}{2}$.
1.3 a) -1 b) $\frac{19+3i}{10}$ c) $\frac{4\sin 3x}{(4-\cos 3x)^2+\sin^2 3x}$ d) 1/24
14. a) $L = 0$ serie convergentă b) $L = \frac{1}{e}$ serie convergentă c) $L = \frac{1}{4}$ serie convergentă d) $L = \frac{1}{2}$ serie convergentă.

Tema 2

Problema 2.1. Să se determine discul de convergenţă al seriilor de puteri

$$a)\ \sum_{n\geq 1}(-n)^{n-1}\frac{z^n}{n!} \qquad\qquad b)\ \sum_{n\geq 1}n^k(x+1)^n,\ k\in\mathbb{N}$$

Problema 2.2. Să se determine suma seriilor:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n+n}{3^n} \qquad b)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{n!2^n} \qquad c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)n!}$$

Problema 2.3. Să se dezvolte în serie Taylor în jurul punctelor indicate, stabilind şi mulţimea de valabilitate pentru dezvoltările obţinute:

$$a)\ f(x)=\frac{2x+1}{x^2-3x-4},\ x_0=1 \qquad b)\ f(x)=\sqrt{x+3},\ x_0=1$$

$$c)\ f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\ x_0=0 \qquad d)\ f(x)=\sin(2x)\sin(3x),\ x_0=\pi,$$

$$e)\ f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x},\ x_0=0.$$

Răspunsuri

2.1 a) $|z|<1/e$ b) $|x+1|<1$

2.2 a) $\frac{33}{80}$ b) $\frac{3\sqrt{e}}{4}$ c) $e-2$

2.3 a) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{-1}{5\cdot 3^{n-1}}+\frac{(-1)^n}{10\cdot 2^n}\right](x-1)^n$, $x\in(-1,3)$

b) $f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!4^{2n-1}}(x-1)^n$, $x\in(-3,5)$

c) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\cdot(2n+1)}x^{2n+1}$, $x\in\mathbb{R}$

d) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(5^{2n}-1)}{2\cdot(2n)!}(x-\pi)^{2n}$, $x\in\mathbb{R}$

e) $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{2n+1}x^{2n+1}$, $x\in(-1,1)$.

Tema 3

Problema 3.1. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, y, z) = zy^3 \ln(2x - 5y)$ în punctul $(0, -1, 2)$, unde $D \subset \mathbb{R}^3$ este un domeniu din semispaţiul $2x - 5y > 0$.

Problema 3.2. Să se determine $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y}(1, -1)$, unde $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x+2y}$, iar $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y \neq 0 \,\}$.

Problema 3.3. Să se calculeze Jacobianul transformării $F = (u, v, w) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v, w) = (x \cos y \sin z, x \sin y \sin z, x \cos z)$.

Problema 3.4. Să se calculeze $f''_{xy}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ pentru $f : D \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x, y) = 2yx^3 \arcsin(1 - x^2 - y^2)$, unde D este mulţimea punctelor (x, y) pentru care $0 < x^2 + y^2 \leq 1$.

Problema 3.5. Fie $F(x, y, z) = f(xyz^2, yz - x^2)$, unde $f(u, v)$ este o funcţie de clasă C^2 pe $\mathbb{R}^2$. Să se calculeze F'_x şi $F''_{xz}(1, 2, -1)$.

Problema 3.6. Să se calculeze gradientul câmpului scalar $f(x, y, z) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ în punctul $(1, 1, -2)$, unde $\vec{u} = z^3\vec{\imath} + z\vec{\jmath} + \operatorname{tg}(2y + z)\vec{\kappa}$ şi $\vec{v} = xe^{2y-x^2}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{y}}\vec{\jmath} + \cos(2y + z)\vec{\kappa}$.

Problema 3.7. Să se calculeze divergenţa câmpului vectorial $\vec{v} = (2x - y^3)\vec{\imath} + (2y^2 - xz^2)\vec{\jmath} + (2z - x^2)\vec{\kappa}$.

Problema 3.8. $\operatorname{rot}(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) =?$, unde $\overrightarrow{u} = 2xy\vec{\imath} + y^2\vec{\jmath} + yz\vec{\kappa}$ şi $\overrightarrow{v} = y\vec{\imath} + \frac{z^2}{y}\vec{\jmath} - 2x\vec{\kappa}$.

Problema 3.9. $\Delta(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) =?$, unde $\overrightarrow{u} = x^4\vec{\imath} + (2yz - 3)\vec{\jmath} + z\vec{\kappa}$ şi $\overrightarrow{v} = \frac{1}{xy}\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \ln x\vec{\kappa}$, iar Δ este operatorul lui Laplace.

Problema 3.10. $\operatorname{div}[(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{r})r^3 \operatorname{grad} r] =?$, unde $\overrightarrow{a}$ este un vector constant, $\overrightarrow{r}$ este vectorul de poziţie, iar r lungimea lui $\overrightarrow{r}$.

Răspunsuri

1. $f'_x = -4/5$, $f'_y = 6 \ln 5 + 2$, $f'_z = -\ln 5$. 2. -48
3. $J = x^2 \sin z$ 4. $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{3}}$
5. $F'_x = f'_u(xyz^2, yz - x^2) \cdot yz^2 - 2x \cdot f'_v(xyz^2, yz - x^2)$,
$F''_{xz}(1, 2, -1) = -8 \cdot f''_{u^2}(2, -3) + 12 \cdot f''_{uv}(2, -3) - 4 \cdot f''_{v^2}(2, -3) - 4 \cdot f'_u(2, -3)$
6. $8e\vec{\imath} + (3 - 16e)\vec{\jmath} + (2 + 12e)\vec{\kappa}$ 7. $4 + 4y$.
8. $-4y^2\vec{\imath} - 5z^2\vec{\jmath} + 12xy\vec{\kappa}$
9. $\frac{6x}{y} - \frac{z}{x^2} + \frac{2x^3}{y^3} + 4z$.
10. $6r^2(\vec{a} \cdot \vec{r})$

Tema 4

Problema 4.1. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{x^4}{x+1}\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.2. Să se determine $\int_0^2 \frac{x+2}{(x^2+4)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.3. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x^2 \sin 3x\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(3x)\cos^2 x\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.5. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin^2 x + \cos x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^4 x}{\sin^6 x + 1}\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.7. $\int_0^{\pi} \frac{1}{2-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.8. $\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

Problema 4.9. $\int_0^2 \frac{1}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x$.

Răspunsuri

1. $\ln 2 - \frac{7}{12}$.
2. $\frac{7}{25}\ln 3 - \frac{7}{50}\ln 2 + \frac{2}{15} + \frac{\pi}{100}$.
3. $\frac{\pi^2-4}{27}$.
4. $\frac{7}{15}$.
5. $\frac{\ln 2}{3}$.
6. $\frac{\sqrt{2}}{6}\operatorname{arctg}\sqrt{2} - \frac{1}{6}\ln 3$.
7. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
8. $\frac{\pi}{2} - 1$.
9. $\frac{\sqrt{8}}{2}$.

Tema 5

Să se studieze convergenţa integralelor şi în caz de convergenţă, să se determine valoarea lor:

Problema 5.1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{(x+3)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.2. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{(x^2+3)(3x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$

Să se calculeze valoarea integralelor folosind funcţia Gamma şi Beta:

Problema 5.3. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^2\sqrt{x}\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.4. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-3x^2}(2x^2-x+4)\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.5. $\displaystyle\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x\cos^6 x\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^{10}}\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$

Problema 5.10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3}{(1+x^3)^3}\,\mathrm{d}x.$

Răspunsuri

1. $\frac{\pi}{20}+\frac{3}{10}\ln 3$. 2. $\frac{\pi}{48\sqrt{3}}$.
3. $\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$. 4. $\frac{13\sqrt{\pi}}{6\sqrt{3}}-\frac{1}{6}$.
5. π. 6. $\frac{\pi}{4}$.
7. $\frac{5\pi}{2^{12}}$. 8. $\frac{18!\pi}{(9!)^2 2^{19}}$.
9. $\frac{\pi}{4\sin\frac{3\pi}{8}}$. 10. $\frac{2\pi}{27\sqrt{3}}$.