CALCUL INTEGRAL
-culegere de probleme-

Alexandra Ciupa, Adrian Holhoş

5 Decembrie 2011

Cuprins

Prefaţă

Prezenta culegere de probleme se adresează studenţilor din anul întâi de la universităţile tehnice şi pune la îndemâna celor interesaţi un material aplicativ care să contribuie la o mai bună însuşire a cunoştinţelor teoretice.

Pornim de la faptul unanim recunoscut că teoria se fixează şi se aprofundează mai uşor prin rezolvarea unui număr mare de exerciţii şi probleme. Am consultat numeroase cursuri şi culegeri de probleme şi am căutat să realizăm un echilibru între calitatea ştiinţifică cerută unei astfel de lucrări şi cerinţele unei culegeri de probleme care să fie accesibilă studenţilor noştri.

Materialul este structurat în şase capitole şi acoperă materia predată în partea a doua a cursului de analiză matematică la facultatea de Inginerie Electrica. La începutul fiecărui capitol sunt prezentate sumar noţiunile elementare şi rezultatele teoretice ce urmează a fi aplicate în rezolvarea exerciţiilor. Sunt date apoi enunţurile, urmate de rezolvarea completă a fiecărui exerciţiu. Sperăm că modul de prezentare, exerciţiile alese şi faptul că fiecare problemă este însoţită de soluţii detaliate vor contribui la fixarea noţiunilor predate la curs.

Autorii adresează mulţumiri referenţilor ştiinţifici, prof. dr. Ioan Raşa şi prof. dr. Dorian Popa, pentru observaţiile şi sugestiile care au dus la îmbunătăţirea conţinutului şi prezentării materialului.

Cluj-Napoca,

Decembrie 2011 Autorii

Capitolul 1

Integrale improprii

1.1 Noţiuni teoretice

Integrala improprie este o extindere a noţiunii de integrală definită pentru cazul în care intervalul de integrare sau funcţia de integrat sunt nemărginite.

Integrale din funcţii definite pe intervale nemărginite

Definiţie 1.1. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nevid. O funcţie $f : I \to \mathbb{R}$ se numeşte local integrabilă pe I, dacă restricţia sa la orice compact conţinut în I este integrabilă.

Definiţie 1.2. Fie $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ local integrabilă pe $[a, \infty)$ şi fie $b > a$, oarecare. Dacă

$$\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

există şi este finită, spunem că integrala $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ este convergentă şi prin definiţie

$$\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Dacă limita precedentă nu există sau este infinită, atunci $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ este divergentă.

Observaţie 1.3. Analog se defineşte

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Definiţie 1.4. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ local integrabilă. Integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă există $A\in\mathbb{R}$ astfel încât $\int_{-\infty}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_{A}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sunt convergente. Atunci

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie 1.5. Folosind Definiţia 1.2 se demonstrează că

$$\int_{a}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}\,\mathrm{d}x,\ a>0$$

este convergentă pentru $\alpha>1$ şi divergentă pentru $\alpha\le 1$.

Teorema 1.6. [Criteriu de comparaţie]

Fie $f(x)\ge g(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,\infty)$, local integrabile.

a) Dacă integrala $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci şi $\int_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

b) Dacă integrala $\int_{a}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă, atunci şi $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Teorema 1.7. Fie $f:[a,\infty)\to\mathbb{R},\ a>0$, local integrabilă, $f(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[a,\infty)$.

Dacă $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}f(x) = A\in[0,\infty)$ şi $\alpha>1$, atunci $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Dacă $\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}f(x) = A\in(0,\infty)$ şi $\alpha\le 1$, atunci $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Observaţie 1.8. Fie P şi Q polinoame. Dacă Q nu se anulează pe $[a,\infty)$ şi dacă $\mathrm{grad}P\le \mathrm{grad}Q-2$, atunci

$$\int_{a}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

Teorema 1.9 (Criteriul lui Dirichlet)**.** Dacă $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ este local integrabilă şi există $M > 0$ astfel încât $\left|\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M$ pentru $\forall\, \beta > a$ şi dacă funcţia $g : [a, \infty) \to R$ este monoton descrescătoare la zero cînd $x \to \infty$, atunci $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Teorema 1.10 (Criteriul integral al lui Cauchy)**.** Dacă $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ este continuă şi descrescătoare, atunci integrala $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ şi seria $\sum_{n\geq 0} f(n)$ au aceeaşi natură.

Integrale din funcţii nemărginite în intervalul de integrare

Definiţie 1.11. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, local integrabilă şi nemărginită pe orice interval de forma $(b - \varepsilon, b)$, $0 < \varepsilon < b - a$. Punctul b se numeşte punct singular pentru funcţia f. Integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, dacă $\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită.

Observaţie 1.12. Analog, dacă $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ are pe a punct singular, se defineşte

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $c \in (a, b)$ este punct singular pentru f, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă integralele $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sunt convergente şi în acest caz:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Observaţie 1.13. Folosind Definiţia 1.11 se demonstrează că

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\lambda},\ \lambda \in R$$

este convergentă pentru $\lambda < 1$ şi divergentă pentru $\lambda \geq 1$.

Teorema 1.14. Fie $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$ având punctul singular b, local integrabile, cu $f(x) \geq g(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [a, b)$.

a) Dacă $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, rezultă că $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

b) Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă, rezultă că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Teorema 1.15. Fie $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ local integrabilă şi pozitivă pentru orice $x \in [a, b)$ cu b punct singular.
Dacă pentru $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to b}(b - x)^\alpha f(x) = A \in [0, \infty)$ atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
Dacă pentru $\alpha \geq 1$, $\lim\limits_{x \to b}(b - x)^\alpha f(x) = A \in (0, \infty)$, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

1.2 Exerciţii

Să se calculeze următoarele integrale improprii:

1.1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x+b)},\ a,b>0$

1.2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}.$

1.3. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2}.$

1.4. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)(x^2+1)}.$

1.5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}.$

1.6. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}.$

1.7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}.$

1.8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(x^4+1)\,\mathrm{d}x}{x^6+1}.$

1.9. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2}.$

1.10. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+1)^2}.$

1.11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}.$

1.12. $\displaystyle\int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}},\ a>0.$

1.13. $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^{10}+x^5+1}}.$

1.14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+1}.$

1.15. Calculaţi

$$I_n=\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n},\ n\in\mathbb{N}.$$

1.16. Să se studieze natura integralelor improprii:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^4-1}}$

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x}-1}$

c) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{x^2(x^2-\ln x)}$

d) $\displaystyle\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$

e) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{|x^3-8|}}$

f) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{|x^3-1|}}$

1.17. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}.$

1.18. $\displaystyle\int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}.$

1.19. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x+2}}.$

1.20. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}.$

1.21. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}}.$

1.22. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\mathrm{d}x.$

1.23. $\displaystyle\int_a^b \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

1.24. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+x-x^2}}.$

1.25. $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$

1.26. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}.$

1.27. $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(e+\sqrt{|x-1|})}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x.$

1.28. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{tg}^n x}.$

1.29. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}.$

1.30. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}.$

1.31. Să se calculeze

$$\int_{-a}^a \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},\ a>0,\ n\in\mathbb{N}.$$

1.32. Fie şirul $(L_n)_{n\geq 1}$, $\displaystyle L_n=\int_0^\pi \frac{1-\cos nx}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x.$

1. Să se demonstreze că termenii şirului sunt în progresie aritmetică.
2. Să se calculeze L_n.

1.33. Să se calculeze integrala $\displaystyle A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{N}.$

1.34. Să se calculeze integralele $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x.$

1.35. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$

1.3 Soluţii.

Integralele 1.1–1.10 sunt convergente conform Observaţiei 1.8. Convergenţa va rezulta şi prin calcul direct.

Soluţie 1.1. Descompunem funcţia în fracţii simple:

$$\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}.$$

Obţinem

$$I = \frac{1}{b-a}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+a} - \frac{1}{b-a}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+b} = \frac{1}{b-a}\ln\frac{x+a}{x+b}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b}.$$

Soluţie 1.2. Avem

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Rezultă că

$$I = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+2} = \ln\frac{x+1}{x+2}\bigg|_0^\infty = \ln 2.$$

Soluţie 1.3. Descompunem funcţia în fracţii simple:

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}.$$

Obţinem

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^2} \\ &= \ln\frac{x+2}{x+1}\bigg|_0^\infty - 2\,\frac{1}{x+2}\bigg|_0^\infty = -\ln 2 + 1. \end{aligned}$$

Soluţie 1.4. Descompunem funcţia în fracţii simple

$$\frac{1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x+2} - \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} + \frac{2}{5}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{5}\ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\bigg|_1^\infty + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x\bigg|_1^\infty \\ &= -\frac{1}{5}\ln\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{2}{5}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\ln\frac{3}{\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Soluţie 1.5. După descompunerea în fracţii simple, avem

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} - \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+b^2}\right) \\ &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\bigg|_0^\infty - \frac{1}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}\bigg|_0^\infty\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1}{ab(a+b)}.\end{aligned}$$

Soluţie 1.6. Căutăm o descompunere în fracţii simple. Avem

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)^2-x^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+1-x)(x^2+1+x)} = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.\end{aligned}$$

Se obţine

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \\ &+ \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\bigg|_0^\infty + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\bigg|_0^\infty \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Soluţie 1.7. Cu substituţia $x^2 = t$, obţinem

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

Soluţie 1.8. Avem

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty \frac{x^4+1}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{x^4+1-x^2+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x}_{x^3=t} = \operatorname{arctg} x\bigg|_0^\infty + \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} t\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Soluţie 1.9. Pentru studiul convergenţei aplicăm Teorema 1.7:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^2} = 1, \quad \text{pentru } \alpha + \frac{1}{2} = 2.$$

Pentru că $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ rezultă că integrala este convergentă.
Calculăm integrala. Cu substituţia $\sqrt{x} = t$, obţinem

$$\begin{aligned}
I &= \int_1^\infty \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_1^\infty \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)} - 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \\
&= 2\ \operatorname{arctg} t\bigg|_1^\infty - 2I_1 = 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2I_1 = \frac{\pi}{2} - 2I_1.
\end{aligned}$$

Pentru calculul integralei I_1, folosim substituţia $t = \operatorname{tg} u$. Avem

$$\mathrm{d}t = \frac{1}{\cos^2 u}\,\mathrm{d}u,\ (1+t^2)^2 = \frac{1}{\cos^4 u}$$

şi obţinem

$$I_1 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2u\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

Rezultă că $I = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

Soluţie 1.10. Notăm $x^2 = t,\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ şi avem

$$I = \int_1^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)^2}.$$

Descompunem funcţia in fracţii simple

$$\frac{1}{t(t+1)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} + \frac{C}{(t+1)^2}.$$

Rezultă $A = 1,\ B = -1,\ C = -1$. Integrala devine

$$I = \frac{1}{2}\left[\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2}\right] = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{t}{t+1}\bigg|_1^\infty + \frac{1}{t+1}\bigg|_1^\infty\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\ln\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

Soluţie 1.11. Conform Observaţiei 1.12 scriem integrala astfel:

$$I = \int_{-\infty}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} + \int_A^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2},\ \forall\, A \in \mathbb{R}.$$

Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{A} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} + \int_A^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} \\ &= \ \mathrm{arctg}(x+1)\bigg|_{-\infty}^{A} +\ \mathrm{arctg}(x+1)\bigg|_A^\infty \\ &= \mathrm{arctg}(A+1) + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(A+1) = \pi. \end{aligned}$$

Soluţie 1.12. Pentru studiul convergenţei aplicăm Teorema 1.7:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = 1, \quad \text{pentru } \alpha = 2.$$

Rezultă că integrala este convergentă.
Cu substituţia $\frac{1}{x} = t,\ -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, avem

$$I = \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int_0^{\frac{1}{a}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(t+\sqrt{1+t^2})\bigg|_0^{\frac{1}{a}} = \ln\frac{1+\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

Soluţie 1.13. Pentru studiul convergenţei aplicăm Teorema 1.6:

$$f(x) < \frac{1}{x\sqrt{x^{10}}} = \frac{1}{x^6}.$$

Cum

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^6}\,\mathrm{d}x \text{ este convergentă} \Longrightarrow \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \text{ este convergentă.}$$

Scriem integrala astfel

$$I = \underbrace{\int_1^\infty \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^{10}+x^5+1}}}_{x^5=t} = \frac{1}{5}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2+t+1}} = \frac{1}{5}\underbrace{\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}}}_{u=\frac{1}{t}}$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}} = \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{5}\ln\left(u+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(u+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{5}\left[\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\ln\frac{3+2\sqrt{3}}{3}.$$

Soluţie 1.14. La numitor se dă factor x^4 şi apoi folosim substituţia $t = \frac{1}{x}$. Avem

$$I = \int_0^\infty \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+t^2-t^2+1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t}_{I_1} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^\infty \frac{t^2-1}{1+t^4}}_{I_2}.$$

Pentru calculul integralelor I_1 şi I_2 dăm factor "forţat" t^2 şi apoi folosim o substituţie adecvată. Avem

$$\int \frac{1+t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t}_{u=t-\frac{1}{t}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}.$$

şi

$$\int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = \underbrace{\int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t}_{v=t+\frac{1}{t}} = \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{v-\sqrt{2}}{v+\sqrt{2}}\right|$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+1-t\sqrt{2}}{t^2+1+t\sqrt{2}}\right|.$$

Rezultă

$$I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}}\bigg|_0^\infty - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+1-t\sqrt{2}}{t^2+1+t\sqrt{2}}\bigg|_0^\infty = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Soluţie 1.15. Avem

$$I_n = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n} = 2J_n.$$

Pentru calculul integralei J_n, deducem o relaţie de recurenţă, integrând prin părţi. Avem

$$J_n = \int_0^\infty \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x = J_{n-1} - \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x.$$

Alegem $f(x)=x$ şi $g'(x)=\frac{x}{(x^2+1)^n}$, deci $g(x)=\frac{1}{2}\frac{-1}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}$ şi obţinem

$$J_n = J_{n-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(n-1)(x^2+1)^{n-1}}\bigg|_0^\infty - \frac{1}{2(n-1)}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n-1}}$$

$$= J_{n-1} - \frac{1}{2(n-1)}\cdot J_{n-1} = \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot J_{n-1}.$$

Rezultă că $J_n = \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot J_{n-1},\ n\geq 2$. Dăm valori lui n

$$n=2:\ J_2 = \frac{1}{1\cdot 2}\cdot J_1$$

$$n=3:\ J_3 = \frac{3}{2\cdot 2}\cdot J_2$$

....

$$n=p:\ J_p = \frac{2p-3}{2(p-1)}\cdot J_{p-1}.$$

Prin înmulţirea relaţiilor, rezultă:

$$J_p = \frac{(2p-3)!!}{2^{p-1}(p-1)!} \cdot J_1, \text{ cu } J_1 = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Soluţie 1.16. a) Aplicăm Teorema 1.7:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{x^2\left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{1-\frac{1}{x^4}}\right)} = 1, \quad \text{pentru } \alpha = 2.$$

Rezultă că $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

b)

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{x\sqrt{x}-1} = 1, \text{ pentru } \alpha = \frac{3}{2}.$$

Rezultă că $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

c) Fie

$$f(x) = \frac{\cos x}{x^2(x^2-\ln x)}.$$

Pentru orice $x \in (1,\infty)$, avem $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x^2(x^2-\ln x)}$.

Integrala $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2(x^2-\ln x)}$ este convergentă pentru că

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{1}{x^2(x^2-\ln x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{x^4\left(1-\frac{\ln x}{x^2}\right)} = 1, \quad \text{pentru } \alpha = 4.$$

Rezultă că $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este absolut convergentă.

d) Punctul $x = 2$ este singular. Avem

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} + \int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}.$$

Aplicăm Teorema 1.15:

$$\lim_{x\nearrow 2} (2-x)^\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x-2)^2}} = 1, \quad \text{pentru } \alpha = \frac{2}{3}.$$

Rezultă că $\displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ este convergentă.

Analog, $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$ este convergentă.

e) Funcţia $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x^3-8|}}$ are punctul singular $x = 2$. Avem

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{|x^3-8|}}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8-x^3}} + \int_2^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-8}} + \int_3^\infty \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3-8}} = I_1+I_2+I_3.$$

Studiem convergenţa integralei I_1:

$$\lim_{x\nearrow 2}(2-x)^\alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{(2-x)(4+2x+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{pentru } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că I_1 este convergentă.

Studiem convergenţa integralei I_2:

$$\lim_{x\searrow 2}(x-2)^\alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{(x-2)(4+2x+x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \text{pentru } \alpha = \frac{1}{2}.$$

Rezultă că I_2 este convergentă.

Studiem convergenţa integralei I_3:

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot \frac{x}{\sqrt{x^3-8}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha+1}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1-\frac{8}{x^3}}} = 1,\ \text{pentru } \alpha+1 = \frac{3}{2}.$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 1,\ \text{pentru } \alpha = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow I_3 \text{ este divergentă.}$$

În concluzie,

$$\int_1^\infty \frac{x}{\sqrt{|x^3-8|}}\,\mathrm{d}x$$

este divergentă.

f) Funcţia $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{|x^3-1|}}$ are punct singular $x = 1$. Avem

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{1-x^3}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x$$
$$+ \int_2^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^3-1}}\,\mathrm{d}x = I_1+I_2+I_3.$$

Studiem convergenţa integralei I_1. Avem

$$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot f(x)=\frac{1}{2\sqrt{3}},\ \text{pentru } \alpha=\frac{1}{2}.$$

Rezultă că I_1 este convergentă.
Analog se arată că I_2 este convergentă.
Studiem convergenţa integralei I_3. Avem

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}f(x)=\lim_{x\to\infty} x^{\alpha}\cdot\frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\frac{x^{\alpha}}{\sqrt{x^3-1}}=1,$$

pentru $\alpha=\dfrac{3}{2}$. Rezultă că I_3 este convergentă.

Soluţie 1.17. Funcţia f este nemărginită în $x=1$. Aplicăm Teorema 1.15:

$$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot f(x)=\frac{1}{5\sqrt{2}},\ \text{pentru } \alpha=\frac{1}{2}\Rightarrow\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)\sqrt{1-x^2}}\ \text{convergentă.}$$

Cu substituţia $x=\sin t$, rezultă:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(\sin^2 t+4)\cos t}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t+4}.$$

Cu substituţia $\operatorname{tg} t=u$, avem $\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, $\sin^2 t=\frac{u^2}{u^2+1}$ şi rezultă

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{5u^2+4}=\frac{1}{5}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{5}}{2}\Bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

Soluţie 1.18. Cu substituţia $\ln x=t$, avem

$$I=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}=2\sqrt{t}\Big|_0^1=2.$$

Soluţie 1.19. Punctul $x=1$ este singular. Aplicăm Teorema 1.15. Avem

$$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1-x)(2-x)}}=1,\ \text{pentru } \alpha=\frac{1}{2}.$$

Rezultă că integrala este convergentă.

Scriem funcţia de sub radical ca o diferenţă de pătrate. Avem

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} = \ln\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|\Bigg|_{-1}^{1} \\
&= \ln\left|-\frac{1}{2}\right| - \ln\left|-\frac{5}{2}+\sqrt{6}\right| = \ln\frac{1}{5-2\sqrt{6}} = \ln(5+2\sqrt{6}).
\end{aligned}
$$

Soluţie 1.20. Aplicăm Teorema 1.14.

$$
\left.\begin{array}{l}
f(x) \le \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}
\end{array}\right\} \Longrightarrow \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ convergentă.}
$$

Cu substituţia $x=\sin t$, rezultă

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{(\sin^2 u+1)\cos u}.
$$

Notăm

$$
\operatorname{tg} u = t \ \Rightarrow \ \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2},\ \sin^2 u = \frac{t^2}{t^2+1}.
$$

Obţinem

$$
I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\operatorname{arctg} t\sqrt{2}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}.
$$

Soluţie 1.21. Punctul $x=0$ este singular. Scriem integrala astfel:

$$
I = \underbrace{\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x}}}_{-x=t} + \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_1^0 \frac{-\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} = 2+2\sqrt{2}.
$$

Soluţie 1.22. Punctul $x=-1$ este punct singular. Aplicăm Teorema 1.15:

$$
\lim_{x\searrow -1} (1+x)^{\alpha}\cdot f(x) = \sqrt{2},\ \text{pentru } \alpha = \frac{1}{2}.
$$

Rezultă că integrala este convergentă. Avem

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Soluţie 1.23. Punctele $x = a$ şi $x = b$ sunt puncte singulare. Din Teorema 1.15 rezultă că integrala este convergentă.
Folosim substituţia lui Euler $\sqrt{(x-a)(b-x)} = t(x-a)$. Rezultă

$$x = \frac{at^2+b}{t^2+1}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2(a-b)\,\mathrm{d}t}{(t^2+1)^2}.$$

Schimbăm limitele de integrare

$$t = \sqrt{\frac{b-x}{x-a}}; \quad x \to a,\ x > a \Rightarrow t \to \infty; \quad x \to b,\ x < b \Rightarrow t \to 0.$$

Obţinem

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^\infty \frac{at^2+b}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^\infty \frac{at^2+a+b-a}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2a\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + 2(b-a)\int_0^\infty \frac{1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = 2a\cdot\frac{\pi}{2} + 2(b-a)\cdot I_1. \end{aligned}$$

Pentru calculul lui I_1, notăm $t = \operatorname{tg} u$ şi obţinem

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2u}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}.$$

Rezultă că $I = a\cdot\pi + 2(b-a)\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\cdot(a+b)$.

Soluţie 1.24. Scriem funcţia de sub radical ca o diferenţă de pătrate. Avem

$$I = \int_{-1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4} - \left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{2x-1}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Soluţie 1.25. Cu substituţia $x = \sin t$, obţinem

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| - \ln|\sin t|\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2. \end{aligned}$$

Soluţie 1.26. Avem

$$\underbrace{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}}_{x=\sin u} = \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}u}{\sin u + 1}}_{\operatorname{tg}\frac{u}{2}=t} = \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2+2t+1}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2} = 2\cdot \left.\frac{-1}{t+1}\right|_0^1 = 1.$$

Soluţie 1.27. Punctul $x = 1$ este singular. Avem

$$\int_0^2 \frac{\ln\left(e+\sqrt{|x-1|}\right)}{\sqrt{|x-1|}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\ln\left(e+\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{\ln\left(e+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$$
$$= I_1 + I_2.$$

Calculăm I_1. Facem substituţia $\sqrt{1-x} = t$ şi apoi integrăm prin părţi. Obţinem

$$I_1 = 2\int_0^1 \ln(e+t)\,\mathrm{d}t = 2\left[t\ln(e+t)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{e+t}\,\mathrm{d}t\right]$$
$$= 2\left[\ln(e+1) - \int_0^1 \mathrm{d}t + e\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{e+t}\right]$$
$$= 2\left[\ln(e+1) - 1 + e\ln(e+1) - e\right] = 2(e+1)\ln\left(1+\frac{1}{e}\right).$$

Pentru calculul lui I_2, facem substituţia $\sqrt{x-1} = t$ şi obţinem $I_2 = I_1$. Rezultă

$$I = 4(e+1)\ln\left(1+\frac{1}{e}\right).$$

Soluţie 1.28. Vom nota $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\cos^n x + \sin^n x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n t}{\sin^n t + \cos^n t}\,\mathrm{d}t.$$

Rezultă că

$$2 \cdot I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^n x + \cos^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2},$$

deci $I = \frac{\pi}{4}$.

Soluţie 1.29. Avem $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$. Funcţia $\sin^2 x$ are perioada π, deci $\sin^2 2x$ are perioada $\frac{\pi}{2}$. Rezultă că

$$I = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$$

Facem substituţia $t = \operatorname{tg} x$ şi avem

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}; \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}.$$

Rezultă

$$I = 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{(t^2+1)^2}{t^4+1} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1}\,\mathrm{d}t = 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,\mathrm{d}t$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\left(t - \frac{1}{t}\right)'}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2 + 2} = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t - \frac{1}{t}}{\sqrt{2}}\Bigg|_0^{\infty} = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2\sqrt{2}\pi.$$

Soluţie 1.30. Cu substituţia lui Euler $\sqrt{(1-x)(1+x)} = t(x+1)$, obţinem

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \mathrm{d}x = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t, \quad t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

Pentru $x \to -1,\ x > -1 \ \Rightarrow t \to \infty$ şi pentru $x \to 1,\ x > 1 \ \Rightarrow t \to 0$. Rezultă

$$I = -2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3t^2+1} = -\frac{2}{3} \cdot \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{1}{3}} = -\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\operatorname{arctg} t\sqrt{3}\Big|_0^{\infty} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Soluţie 1.31. Vom deduce o relaţie de recurenţă, integrând prin părţi. Alegem

$$f(x) = x^{n-1},\ g'(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \Rightarrow f'(x) = (n-1)x^{n-2},\ g(x) = -\sqrt{a^2-x^2}.$$

Avem

$$\begin{aligned}
I_n &= -\, x^{n-1}\sqrt{a^2-x^2}\Big|_{-a}^{a} + (n-1)\int_{-a}^{a} x^{n-2}\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_{-a}^{a} \frac{x^{n-2}(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)a^2\int_{-a}^{a} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_{-a}^{a} \frac{x^{n}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)a^2\cdot I_{n-2} - (n-1)\cdot I_n.
\end{aligned}$$

Obţinem $I_n = \frac{n-1}{n}\cdot a^2\cdot I_{n-2}$. Pentru $n = 2k$, avem

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k}\cdot a^2\cdot I_{2k-2}.$$

Dăm valori lui k.

$$\begin{aligned}
k &= 1 \quad \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}a^2\cdot I_0 \\
k &= 2 \quad \Rightarrow I_4 = \frac{3}{4}a^2\cdot I_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
k &= p \quad \Rightarrow I_{2p} = \frac{2p-1}{2p}a^2\cdot I_{2p-2}
\end{aligned}$$

Prin înmulţirea relaţiilor rezultă

$$I_{2p} = \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!}\cdot a^{2p}\cdot I_0$$

unde

$$I_0 = \int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_{-a}^{a} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi.$$

Pentru $n = 2k+1$, se obţine $I_{2p+1} = 0$, pentru că

$$I_1 = \int_{-a}^{a}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0.$$

Soluţie 1.32. Vom demonstra că $L_n = \frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{2}$. Avem

$$\begin{aligned}\frac{L_{n-1}+L_{n+1}}{2} &= \int_0^\pi \frac{1-\cos(n-1)x+1-\cos(n+1)x}{2(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \frac{2-2\cos nx\cos x}{2(1-\cos x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{1-\cos nx\cos x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \frac{1-\cos nx+\cos nx-\cos nx\cos x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^\pi \frac{1-\cos nx+\cos nx(1-\cos x)}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= L_n + \int_0^\pi \cos nx\,\mathrm{d}x = L_n + \frac{1}{n}\sin nx\Big|_0^\pi = L_n.\end{aligned}$$

Rezultă că termenii sunt în progresie aritmetică. Calculăm raţia:

$$\begin{aligned}r = L_2 - L_1 &= \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x - \int_0^\pi \mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{2\sin^2 x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x - \pi\\ &= 2\int_0^\pi \frac{1-\cos^2 x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x - \pi = 2\int_0^\pi (1+\cos x)\,\mathrm{d}x - \pi = 2\pi - \pi = \pi.\end{aligned}$$

Rezultă că $L_n = L_1 + (n-1)r = \pi + (n-1)\pi = n\pi$.

Soluţie 1.33. Calculăm

$$\begin{aligned}A_n - A_{n-1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx - \sin^2(n-1)x}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[\sin nx + \sin(n-1)x]\,[\sin nx - \sin(n-1)x]}{\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cdot\sin\frac{(2n-1)x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{(2n-1)x}{2}}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2n-1)x\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{2n-1}\cos(2n-1)x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2n-1}.\end{aligned}$$

Rezultă relaţia de recurenţă $A_n - A_{n-1} = \frac{1}{2n-1}$. Dăm valori lui n:

$$\begin{aligned}
&n = 1 \quad \Rightarrow A_1 - A_0 = 1\\
&n = 2 \quad \Rightarrow A_2 - A_1 = \frac{1}{3}\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&n = p \quad \Rightarrow A_p - A_{p-1} = \frac{1}{2p-1}.
\end{aligned}$$

Prin adunarea relaţiilor, avem

$$A_p - A_0 = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1}, \quad A_0 = 0.$$

Soluţie 1.34. Studiem convergenţa în punctul singular $x = 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^\alpha \cdot |\ln(\sin x)| &= -\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x^\alpha}} = -\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{-\alpha x^{-\alpha-1}}\\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} \cdot x^\alpha = 0, \quad \text{pentru } \alpha > 0.
\end{aligned}$$

Deci, pentru $\alpha \in (0, 1)$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha f(x) = 0 \Longrightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x \text{ convergentă.}$$

Calculăm I_1. Notăm $x = 2t$ şi avem

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin t\cos t)\,\mathrm{d}t\\
&= 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,\mathrm{d}t + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + 2 \cdot \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t}_{t=\frac{\pi}{2}-u}\\
&= 2\ln 2 \cdot \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t - 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + 2 \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2 \cdot I_1.
\end{aligned}$$

Rezultă că $I_1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$.

Pentru calculul lui $I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)\,\mathrm{d}x$, facem substituţia $x = \frac{\pi}{2} - t$ şi obţinem $I_2 = I_1 = -\frac{\pi}{2} \cdot \ln 2$.

Soluţie 1.35. Cu substituţia $x = \sin t$, obţinem

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Capitolul 2

Integrale cu parametru

2.1 Noţiuni teoretice

Se vor studia integrale de forma $F(y) = \int_M f(x, y)\,\mathrm{d}x$, unde $y \in Y$, $Y \subset \mathbb{R}$ şi $M \subset \mathbb{R}$.

Definiţie 2.1. Se consideră $Y \subset \mathbb{R}$ o mulţime nevidă şi $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un interval compact. Fie $f : [a, b] \times Y \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea că pentru orice $y \in Y$, funcţia $f(\cdot, y)$ este integrabilă pe $[a, b]$. Atunci funcţia $F : Y \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

se numeşte integrală cu parametru.

Teorema 2.2 (Continuitatea integralei cu parametru)**.** Dacă funcţia de două variabile $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci funcţia $F : [c, d] \to \mathbb{R}$

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

este continuă.

Teorema 2.3 (Teorema de derivare a integralei cu parametru)**.** Considerăm funcţiile $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ şi $\alpha, \beta : [c, d] \to [a, b]$. Dacă f este continuă, dacă există $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi este continuă şi dacă funcţiile α ş β sunt derivabile, atunci integrala cu parametru

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

este derivabilă şi

$$F'(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x + \beta'(y) f(\beta(y),y) - \alpha'(y) f(\alpha(y),y).$$

Sunt importante cazurile particulare:
a) Dacă $F(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$, unde a şi b sunt constante, atunci

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

b) Dacă $F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x)\,\mathrm{d}x$, atunci

$$F'(y) = \beta'(y) f(\beta(y)) - \alpha'(y) f(\alpha(y)).$$

Teorema 2.4 (Teorema de integrare a integralelor cu parametru)**.** Dacă funcţia $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Integrale cu parametru pe domeniu nemărginit

Fie $f : [a,\infty) \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Dacă integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ este convergentă pentru orice $y \in [\alpha,\beta]$, atunci putem defini o funcţie $F : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$,

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Definiţie 2.5. Integrala $\int_a^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha,\beta]$ către funcţia F, dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există un număr $L(\epsilon) > a$ astfel încât pentru orice $A > L(\epsilon)$, avem

$$\left| \int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x - F(y) \right| < \epsilon, \quad \text{pentru orice } y \in [\alpha,\beta].$$

Teorema 2.6. Dacă există o funcţie $g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ pozitivă, astfel încât $|f(x, y)| \leq g(x)$, pentru orice $x \in [a, \infty)$ şi orice $y \in [\alpha, \beta]$ şi dacă $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci integrala $\int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă.

Teorema 2.7. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, continuă. Dacă integrala

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}x$$

este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$, atunci funcţia F este continuă pe $[\alpha, \beta]$.

Teorema 2.8. Fie $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, continuă. Dacă există $\frac{\partial f}{\partial y}$ şi este continuă şi dacă integrala $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$, atunci

$$F'(y) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pentru orice } y \in [\alpha, \beta].$$

Integrale de funcţii nemărginite care depind de un parametru

Definiţie 2.9. Fie $f : (a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în a. Integrala $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă către funcţia F, dacă oricare ar fi $\epsilon > 0$, există $\eta(\epsilon) > 0$ astfel încât pentru orice h, cu $0 < h < \eta(\epsilon)$, avem

$$\left| \int_{a+h}^b f(x, y)\,\mathrm{d}x - F(y) \right| < \epsilon, \quad \text{pentru orice } y \in [\alpha, \beta].$$

Teorema 2.10. Fie $g : (a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie pozitivă astfel încât

$$|f(x, y)| < g(x), \quad \text{pentru orice } x \in (a, b] \text{ şi orice } y \in [\alpha, \beta].$$

Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe intervalul $[\alpha, \beta]$.

Teorema 2.11. Fie $f : (a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Dacă integrala $\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[\alpha, \beta]$, atunci funcţia

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \ \text{ este continuă pe } [\alpha, \beta].$$

Teorema 2.12. Fie $f : (a,b] \times [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Dacă f şi f'_y sunt funcţii continue pe $(a,b] \times [\alpha,\beta]$ şi dacă integrala $F(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă pe $[\alpha,\beta]$, atunci

$$F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad \text{pentru orice } y \in [\alpha,\beta].$$

Funcţiile Beta şi Gamma ale lui Euler

Acestea sunt funcţii speciale care apar frecvent în aplicaţii. Sunt definite prin intermediul unor integrale improprii cu parametru:

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x, \quad a>0,\ b>0$$

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x}x^{a-1}\,\mathrm{d}x, \quad a>0.$$

Enumerăm câteva dintre proprietăţile lor. Pentru $a,b>0$ avem:

P.1. $B(a,b) = B(b,a)$

P.2. $B(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,\mathrm{d}t.$

P.3. $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \pi.$

P.4. $\Gamma(1) = 1.$

P.5. $\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a).$

P.6. $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in N.$

P.7. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)}{y^a},\ y>0.$

P.8. $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$

P.9. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

P.10. $\Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0<a<1.$

2.2 Exerciţii.

2.1. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$F(t)=\int_t^{t^2}\sin(tx)\,\mathrm{d}x.$$

Să se calculeze F' direct şi folosind formula de derivare a integralei cu parametru.

2.2. Să se calculeze $F'(y)$, unde $F:(1,\infty)\to\mathbb{R}$ este definită prin

$$F(y)=\int_1^{y}\frac{\ln(1+xy)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

2.3. Se dă integrala cu parametru

$$I(a)=\int_2^{a}\frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x,\quad a>0.$$

Să se calculeze $I'(a)$.

2.4. Pentru o funcţie f continuă, fie

$$F(x)=\int_0^{x}f(t)(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Să se calculeze $F^{(n)}$.

2.5. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(t)=\int_0^1 f(x)g(x,t)\,\mathrm{d}x$, unde $f\in C[0,1]$, iar

$$g(x,t)=\begin{cases} t(1-x), & \text{dacă } t\le x\\ x(1-t), & \text{dacă } t>x.\end{cases}$$

Să se calculeze F' şi F''.

2.6. Să se calculeze următoarele integrale folosind posibilitatea derivării în raport cu parametrul:

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, \mathrm{d}x,\ a > 0.$

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1 + a \sin x}{1 - a \sin x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\sin x},\ |a| < 1.$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x\right)\, \mathrm{d}x,\ m \geq 0.$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(1 - 2a \cos x + a^2\right)\, \mathrm{d}x,\ |a| < 1.$

2.7. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{2 - \sqrt{2}\cos x}{2 + \sqrt{2}\cos x}\, \mathrm{d}x.$

2.8. Să se calculeze $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(\sin x)}{\sin x}\, \mathrm{d}x.$

2.9. Pornind de la $I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha + \beta \cos x},\ \alpha > \beta > 0$, să se calculeze

$$I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(\alpha + \beta \cos x)^2}.$$

2.10. Determinaţi valoarea integralei cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(a^2 - \sin^2 x\right)\, \mathrm{d}x,\ a > 1.$$

2.11. Să se determine valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{a-1} - 1}{\ln x}\, \mathrm{d}x,\ a > 1.$

2.12. Calculaţi $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2xy)\, \mathrm{d}x.$

2.13. Să se arate că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x \cdot \cos^b x\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot B\left(\frac{a+1}{2}, \frac{b+1}{2}\right),\ a > -1,\ b > -1.$$

2.14. Să se afle valoarea integralei $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}^p x \, \mathrm{d}x, \ |p| < 1.$

2.15. Aflaţi $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \, \mathrm{d}x.$

2.16. Să se calculeze

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \, \mathrm{d}x, \ I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \, \mathrm{d}x, \ p > -1.$$

2.17. Folosind proprietatea P.2, să se calculeze integralele

a) $\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{1+x^n} \, \mathrm{d}x, \ 0 < m < n.$

b) $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n} \ \ n > 1.$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^3}{(1+x^3)^3} \, \mathrm{d}x.$

2.18. Să se demonstreze că

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2 \cos \frac{a\pi}{2}}, \ |a| < 1$$

şi să se calculeze apoi

$$\int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} \ln x \, \mathrm{d}x.$$

2.19. Să se calculeze $\int_0^a x^m \left(a^n - x^n\right)^p \, \mathrm{d}x, \ m > -1, \ n > 0, \ p > -1.$

2.20. Să se arate că $\int_0^{\infty} x^{2n} \cdot e^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a^n \sqrt{a}} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \sqrt{\pi}, \ a > 0.$

2.3 Soluţii

Soluţie 2.1. Calculând integrala, avem:

$$F(t) = -\frac{1}{t}\cos(tx)\Big|_t^{t^2} = -\frac{1}{t}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right),$$

de unde,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{t^2}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right) - \frac{1}{t}\left(-3t^2 \sin t^3 + 2t \sin t^2\right) \\ &= \frac{1}{t^2}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right) + 3t \sin t^3 - 2\sin t^2. \end{aligned}$$

Derivând integrala cu parametrul t, conform Teoremei 2.3, obţinem:

$$F'(t) = \int_t^{t^2} x\cos(tx)\,\mathrm{d}x + 2t\sin t^3 - \sin t^2.$$

Calculăm integrala prin părţi. Alegem

$$f(x) = x,\ g'(x) = \cos(tx) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1,\ g(x) = \frac{1}{t}\sin(tx).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{x}{t}\sin(tx)\Big|_t^{t^2} - \int_t^{t^2} \frac{1}{t}\sin(tx)\,\mathrm{d}x + 2t\sin t^3 - \sin t^2 \\ &= 3t\sin t^3 - 2\sin t^2 + \frac{1}{t^2}\left(\cos t^3 - \cos t^2\right). \end{aligned}$$

Soluţie 2.2. F este o integrală cu parametrul y. O derivăm conform Teoremei 2.3. Avem

$$\begin{aligned} F'(y) &= \int_1^y \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+xy}\cdot x\,\mathrm{d}x + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{1}{y}\ln(1+xy)\Big|_1^y + \frac{\ln(1+y^2)}{y} \\ &= \frac{1}{y}\left[\ln(1+y^2) - \ln(1+y)\right] + \frac{\ln(1+y^2)}{y} = \frac{2}{y}\ln(1+y^2) - \frac{1}{y}\ln(1+y). \end{aligned}$$

Soluţie 2.3. Avem

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_2^a \frac{1}{x}(-x)e^{-ax}\,\mathrm{d}x + \frac{e^{-a^2}}{a} = -\int_2^a e^{-ax}\,\mathrm{d}x + \frac{e^{-a^2}}{a} \\ &= \frac{1}{a}e^{-ax}\Big|_2^a + \frac{e^{-a^2}}{a} = \frac{1}{a}\left(e^{-a^2} - e^{-2a}\right) + \frac{1}{a}e^{-a^2} = \frac{2}{a}e^{-a^2} - \frac{1}{a}e^{-2a}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.4. Aplicăm în mod repetat Teorema 2.3.

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t)(n-1)(x-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t + 1\cdot f(x)(x-x) \\ &= (n-1)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-2}\,\mathrm{d}t \\ F''(x) &= (n-1)(n-2)\int_0^x f(t)(x-t)^{n-3}\,\mathrm{d}t \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n-1)}(x) &= (n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot[n-(n-1)]\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= (n-1)!\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\ F^{(n)}(x) &= (n-1)!f(x). \end{aligned}$$

Soluţie 2.5. Avem

$$F(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)t(1-x)\,\mathrm{d}x, & \text{dacă } t \le 0 \\ \displaystyle\int_0^1 f(x)x(1-t)\,\mathrm{d}x, & \text{dacă } t \ge 1 \\ \displaystyle\int_0^t f(x)x(1-t)\,\mathrm{d}x + \int_t^1 f(x)t(1-x)\,\mathrm{d}x, & \text{dacă } 0 < t < 1. \end{cases}$$

$$F'(t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^1 f(x)(1-x)\,\mathrm{d}x, & \text{dacă } t \le 0 \\ \displaystyle -\int_0^1 f(x)x\,\mathrm{d}x, & \text{dacă } t \ge 1 \\ \displaystyle -\int_0^t f(x)x\,\mathrm{d}x + \int_t^1 f(x)(1-x)\,\mathrm{d}x, & \text{dacă } 0 < t < 1. \end{cases}$$

$$F''(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \le 0 \\ 0, & \text{dacă } t \ge 1 \\ -f(t)t, & \text{dacă } 0 < t < 1. \end{cases}$$

Soluţie 2.6. a) Avem o integrală cu parametrul a. Pentru că

$$\lim_{x\searrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\searrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{a \operatorname{tg} x} \cdot a = a$$

şi

$$\lim_{x\nearrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = 0,$$

considerăm funcţia

$$f(x,a) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ a, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

care este continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}] \times (0, \infty)$.

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & \text{dacă } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \\ 0, & \text{dacă } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

este continuă pe $[0, \frac{\pi}{2}] \times (0, \infty)$. Conform Teoremei 2.3, integrala

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$$

este derivabilă. Avem

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial f}{\partial a}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+a^2\operatorname{tg}^2 x}.$$

Pentru a calcula integrala, facem substituţia

$$\operatorname{tg} x = t \;\Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

şi apoi descompunem funcţia în fracţii simple. Obţinem

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1+a^2t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{1-a^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{a^2}{1-a^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+a^2t^2} \\ &= \frac{1}{1-a^2}\operatorname{arctg} t\Big|_0^{\infty} - \frac{a^2}{1-a^2}\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{1}{a^2}} \\ &= \frac{1}{1-a^2}\frac{\pi}{2} - \frac{a}{1-a^2}\operatorname{arctg}(at)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1-a^2}\frac{\pi}{2} - \frac{a}{1-a^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}. \end{aligned}$$

Din

$$I'(a) = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+a}$$

obţinem

$$I(a) = \frac{\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}a}{1+a} = \frac{\pi}{2}\ln(1+a) + C.$$

Pentru calculul constantei C facem $a=0$. Avem din enunţ $I(0)=0$ şi din rezultat, $I(0)=C$. Rezultă $C=0$.

b) Avem

$$\begin{aligned} \lim_{x\searrow 0} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x} &= \lim_{x\searrow 0}\left[\frac{1}{\sin x}\ln(1+a\sin x) - \frac{1}{\sin x}\ln(1-a\sin x)\right] \\ &= \ln e^a - \ln e^{-a} = 2a. \end{aligned}$$

Considerăm funcţia

$$f(x,a) = \begin{cases} \ln\dfrac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\cdot\dfrac{1}{\sin x}, & \text{dacă } x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right] \\ 2a, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}$$

care este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (-1, 1)$. Avem pentru $x \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1 - a\sin x}{1 + a\sin x} \cdot \frac{\sin x(1 - a\sin x) + \sin x(1 + a\sin x)}{(1 - a\sin x)^2} = \frac{2}{1 - a^2\sin^2 x}$$

care este continuă pe $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times (-1, 1)$. Rezultă că $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, a)\,\mathrm{d}x$ este o funcţie derivabilă. Avem

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{1 - a^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru calculul integralei, notăm

$$\operatorname{tg} x = t \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} t,\ \ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2},\ \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}.$$

Rezultă

$$I'(a) = 2\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2(1 - a^2)} = \frac{2}{1 - a^2}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{1}{1-a^2}}$$
$$= \frac{2}{1 - a^2}\sqrt{1 - a^2} \cdot \operatorname{arctg} t\sqrt{1 - a^2}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{1 - a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Obţinem

$$I(a) = \pi \int \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1 - a^2}} = \pi \cdot \arcsin a + C.$$

Din $I(0) = 0$ rezultă $C = 0$.

c) Avem o integrală cu parametrul m.

$$I'(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2m\,\sin^2 x}{\cos^2 x + m^2\,\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2m\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1 + m^2\,\operatorname{tg}^2 x}\,\mathrm{d}x}_{\operatorname{tg} x = t,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}}$$
$$= 2m\int_0^{\infty} \frac{t^2}{1 + m^2\,t^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2}.$$

Descompunem fracţia în fracţii simple

$$\frac{t^2}{(1 + t^2)(1 + m^2\,t^2)} = \frac{At + B}{1 + t^2} + \frac{Ct + D}{1 + m^2\,t^2}.$$

Obţinem $A = C = 0$, $B = \frac{1}{m^2-1}$, $D = \frac{-1}{m^2-1}$. Rezultă

$$\begin{aligned} I'(m) &= \frac{2m}{m^2-1}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \frac{2m}{m^2-1}\int_0^\infty \frac{1}{1+m^2\,t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2m}{m^2-1}\ \operatorname{arctg} t\Big|_0^\infty - \frac{2m}{m^2-1}\cdot\frac{1}{m^2}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+\frac{1}{m^2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{m}{m^2-1}\,\pi - \frac{2\operatorname{arctg}(mt)}{m^2-1}\Big|_0^\infty = \frac{m}{m^2-1}\cdot\pi - \frac{2}{m^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{m+1}. \end{aligned}$$

Rezultă

$$I(m) = \pi\int\frac{\mathrm{d}m}{m+1} = \pi\,\ln(m+1) + C.$$

Pentru calculul constantei, facem $m = 1$. Din enunţ, avem $I(1) = 0$, iar din rezultatul obţinut avem

$$I(1) = \pi\,\ln 2 + C \ \Rightarrow \pi\,ln2 + C = 0 \ \Rightarrow C = -\pi\,\ln 2.$$

Rezultă că $I(m) = \pi\,\ln\frac{m+1}{2}$.

d) Avem o integrală cu parametrul a. O derivăm

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^\pi \frac{-2\cos x + 2a}{1-2a\,\cos x + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int_0^\pi \frac{-2a\,\cos x + 2a^2 + 1 - 1}{1-2a\,\cos x + a^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\pi \mathrm{d}x + \frac{a^2-1}{a}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1-2a\,\cos x + a^2} = \frac{1}{a}\pi + \frac{a^2-1}{a}\,I_1. \end{aligned}$$

Pentru calculul lui I_1 facem substituţia $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$. Avem

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \frac{1}{1-2a\,\frac{1-t^2}{1+t^2}+a^2}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2(1+a)^2+(1-a)^2} \\ &= \frac{2}{(1+a)^2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2} = \frac{2}{(1+a)^2}\cdot\frac{1+a}{1-a}\ \operatorname{arctg}\left(t\,\frac{1+a}{1-a}\right)\Big|_0^\infty \\ &= \frac{2}{1-a^2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{1-a^2}. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$I'(a) = \frac{\pi}{a} + \frac{a^2-1}{a}\,\frac{\pi}{1-a^2} = 0 \Rightarrow I(a) = C.$$

Pentru a determina constanta, considerăm $a = 0$ şi obţinem $I(0) = 0$, deci $C = 0$, adică $I(a) = 0$.

Soluţie 2.7. Considerăm integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{2 - a\,\cos x}{2 + a\,\cos x}\,\mathrm{d}x,\ \ |a| < 2.$$

O derivăm şi apoi facem subtituţia $\operatorname{tg} x = t$. Avem

$$\begin{aligned}
I'(a) &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4 - a^2\,\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = -4 \int_0^{\infty} \frac{1}{4 - a^2\,\frac{1}{1+t^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\
&= -4 \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4t^2 + 4 - a^2} = -\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{4-a^2}{4}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{4-a^2}}t\right)\Bigg|_0^{\infty} = -\frac{2}{\sqrt{4-a^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{\sqrt{4-a^2}}.
\end{aligned}$$

Va rezulta că

$$I(a) = -\pi \int \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{4-a^2}} = -\pi\ \arcsin\frac{a}{2} + C.$$

Din $I(0) = 0$, rezultă $C = 0$. Pentru $a = \sqrt{2}$, avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} \ln \frac{2 - \sqrt{2}\,\cos x}{2 + \sqrt{2}\,\cos x}\,\mathrm{d}x = I(\sqrt{2}) = -\pi\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi\,\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi^2}{4}.$$

Soluţie 2.8. Considerăm integrala cu parametru

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(a\,\sin x)}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

O derivăm şi apoi facem substituţia $\operatorname{tg} x = t$. Avem

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin x} \cdot \frac{1}{1 + a^2\,\sin x} \cdot \sin x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 + a^2\,\sin^2 x} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + a^2 \frac{t^2}{1+t^2}}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^2 + a^2t^2} \\
&= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+a^2)t^2 + 1} = \frac{1}{1+a^2} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{1}{1+a^2}} \\
&= \frac{1}{1+a^2}\ \sqrt{1+a^2}\,\operatorname{arctg}\left(t\,\sqrt{1+a^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\,\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Rezultă că

$$I(a)=\frac{\pi}{2}\int\frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{\pi}{2}\,\ln(a+\sqrt{1+a^2})+C.$$

Din $I(0)=0$, rezultă $C=0$, şi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{arctg}(\sin\,x)}{\sin\,x}\,\mathrm{d}x=I(1)=\frac{\pi}{2}\,\ln(1+\sqrt{2}).$$

Soluţie 2.9. Observăm că derivata lui I_1 în raport cu α este egală cu

$$\frac{\partial I_1}{\partial\alpha}=-\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(\alpha+\beta\,\cos\,x)^2}=-I_2.$$

Calculăm I_1. Cu substituţia

$$\operatorname{tg}\,\frac{x}{2}=t,\ \ x=2\,\operatorname{arctg}\,t,\ \ \mathrm{d}x=\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2},$$

avem

$$\begin{aligned}I_1&=\int_0^{\infty}\frac{1}{\alpha+\beta\,\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2(\alpha-\beta)+\alpha+\beta}\\&=\frac{2}{\alpha-\beta}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}}=\frac{2}{\alpha-\beta}\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\,\operatorname{arctg}\left(t\,\sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}\right)\Bigg|_0^{\infty}\\&=\frac{2}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}.\end{aligned}$$

Rezultă că

$$I_2=-\frac{\partial I_1}{\partial\alpha}=\frac{\alpha}{(\alpha^2-\beta^2)\,\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\cdot\pi.$$

Soluţie 2.10. Derivăm integrala în raport cu parametrul şi apoi facem substituţia $\operatorname{tg}x=t$:

$$\begin{aligned}I'(a)&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\,a}{a^2-sin^2\,x}\,\mathrm{d}x=2a\int_0^{\infty}\frac{1}{a^2-\frac{t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=2a\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2(a^2-1)+a^2}=\frac{2a}{a^2-1}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+\frac{a^2}{a^2-1}}\\&=\frac{2a}{a^2-1}\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\,\operatorname{arctg}\left(t\,\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}\right)\Bigg|_0^{\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

Va rezulta că

$$I(a) = \pi \int \frac{\mathrm{d}a}{\sqrt{a^2-1}} = \pi \, \ln(a+\sqrt{a^2-1}) + C.$$

Pentru calculul constantei, vezi rezultatul din Problema 1.34:

$$\begin{aligned}\lim_{a\searrow 1} I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos^2 x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x = 2\left(-\frac{\pi}{2}\,\ln 2\right) = -\pi\ln 2.\end{aligned}$$

Cu aceasta obţinem

$$I(a) = \pi \, \ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}.$$

Soluţie 2.11. Funcţiile

$$f(x,a) = \frac{x^{a-1}-1}{\ln x} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial f}{\partial a} = x^{a-1}$$

sunt continue pe $(0,1)\times(1,\infty)$. Avem $\left|\frac{\partial f}{\partial a}\right| = x^{a-1}$, şi $\int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x$ este o integrală convergentă. Aplicând Teorema 2.10 rezultă că $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a}\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă. Din Teorema 2.12 rezultă că I este derivabilă şi

$$I'(a) = \int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \quad \Rightarrow \quad I(a) = \int \frac{\mathrm{d}a}{a} = \ln a + C.$$

Din $I(1) = 0$, obţinem $C = 0$.

Soluţie 2.12. Este integrală pe domeniu nemărginit. Vom aplica Teorema 2.8. Fie

$$f(x,y) = e^{-x^2}\cos(2xy),\ (x,y)\in[0,\infty)\times R.$$

Derivata

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x\,e^{-x^2}\sin(2xy)$$

este continuă. Avem

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 2xe^{-x^2} \ \text{şi} \ \int_0^\infty 2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Din Teorema 2.6 rezultă că $\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x$ este uniform convergentă, iar funcţia $I(y) = \int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ este derivabilă.

$$I'(y) = \int_0^\infty -2xe^{-x^2}\,\sin(2xy)\,\mathrm{d}x.$$

Integrăm prin părţi

$$\begin{aligned} I'(y) &= \int_0^\infty \left(e^{-x^2}\right)' \sin(2xy)\,\mathrm{d}x \\ &= e^{-x^2}\sin(2xy)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty 2y\,\cos(2xy)\,e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -2y\int_0^\infty e^{-x^2}\,\cos(2xy)\,\mathrm{d}x = -2y\,I(y). \end{aligned}$$

Am ajuns la ecuaţia diferenţială $I'(y) = -2y\,I(y)$. Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}y} = -2y\,I \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{I} = -2y\,\mathrm{d}y \quad \Rightarrow \quad I(y) = C\,e^{-y^2}.$$

Vom determina constanta C. Avem

$$I(0) = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Pe de altă parte $I(0) = C$, ceea ce ne dă $C = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Va rezulta $I(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-y^2}$.

Soluţie 2.13. Pentru calculul integralei facem substituţia

$$u = \sin\,x \Rightarrow x = \arcsin u,\;\; \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,\mathrm{d}u$$

Avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a\,x\,\cos^b\,x\,\mathrm{d}x = \int_0^1 u^a(1-u^2)^{\frac{b}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^1 u^a(1-u^2)^{\frac{b-1}{2}}\,\mathrm{d}u.$$

Notăm $u = \sqrt{t}$ şi avem

$$I = \int_0^1 t^{\frac{a}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{a-1}{2}}(1-t)^{\frac{b-1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,B\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right).$$

Soluţie 2.14. Avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos^{-p} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{-p+1}{2}\right).$$

De aici rezultă

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{p+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{p+1}{2}\pi\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{p}{2}\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\cos\left(p\frac{\pi}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.15. Avem, folosind Problema 2.13,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}.$$

Dar $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ şi $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)$. Rezultă

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{2\pi\sqrt{\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi\sqrt{2\pi}}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.16. Avem, folosind Problema 2.13,

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 &= \frac{1}{2} B\left(\frac{p+1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\frac{p}{2}\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{p\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Soluţie 2.17. Reamintim că

$$B(a,b) = \int_0^{\infty} \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}} \, \mathrm{d}t$$

a) Facem substituţia $x = \sqrt[n]{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$. Rezultă

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-1}{n}}}{1+t} \cdot \frac{1}{n}\, t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n} B\left(\frac{m}{n}, 1-\frac{m}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\left(\frac{m}{n}\pi\right)}.$$

b) Facem substituţia $x = \sqrt[n]{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{n} t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$. Rezultă

$$I = \frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\, B\left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

c) Facem substituţia $x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t$. Avem

$$I = \int_0^\infty \frac{t}{(1+t)^3}\,\frac{1}{3}\, t^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{3}}}{(1+t)^3}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{3} B\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3}\, \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma(3)}$$
$$= \frac{1}{6}\,\frac{1}{3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\,\frac{2}{3}\,\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^3}\,\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{3^3}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\,\pi}{3^3\sqrt{3}}.$$

Soluţie 2.18. Facem substituţia $x = \sqrt{t} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\, t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t$. Avem

$$I = \int_0^\infty \frac{t^{\frac{a}{2}}}{1+t}\,\frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{a-1}{2}}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\, B\left(\frac{a+1}{2}, 1-\frac{a+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{a+1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{a+1}{2}\,\pi\right)} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}}.$$

Derivăm în raport cu a relaţia

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{a\pi}{2}}.$$

Obţinem
$$\int_0^\infty \frac{x^a \ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\sin\frac{a\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)} = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{\sin\frac{a\pi}{2}}{\cos^2\left(\frac{a\pi}{2}\right)}.$$

Soluţie 2.19. Facem substituţia $x = at$. Avem
$$I = \int_0^1 a^m t^m \left(a^n - a^n t^n\right)^p a\,\mathrm{d}t = a^{m+1}a^{np}\int_0^1 t^m \left(1-t^n\right)^p \,\mathrm{d}t$$

Facem substituţia $t = \sqrt[n]{u} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{n}\cdot u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u$. Obţinem
$$\begin{aligned} I &= a^{m+1+np}\int_0^1 u^{\frac{m}{n}}\left(1-u\right)^p\cdot\frac{1}{n}\cdot u^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{n}a^{m+1+np}\int_0^1 u^{\frac{m+1}{n}-1}\left(1-u\right)^p\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}a^{m+1+np}\cdot B\left(\frac{m+1}{n}, p+1\right). \end{aligned}$$

Soluţie 2.20. Facem substituţia
$$ax^2 = t \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot t^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Rezultă
$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{1}{a^n}t^n e^{-t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a}}t^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a^n\sqrt{a}}\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{n-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2a^n\sqrt{a}}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Aplicăm în mod repetat relaţia $\Gamma(a+1) = a\cdot\Gamma(a)$.
$$\begin{aligned} \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \Gamma\left(n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{(2n-1)\,(2n-3)\ldots 1}{2^n}\cdot\sqrt{\pi} = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Capitolul 3

Integrale curbilinii

3.1 Noţiuni teoretice

INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU COORDONATELE

Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t))\,,\ t \in [a,b]$, un drum neted şi

$$\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$$

un câmp vectorial având componentele $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definite pe un domeniu ce conţine traiectoria (γ). Fie punctul $M(x,y,z) \in (\gamma)$, cu vectorul de poziţie $\vec{r} = x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\,\vec{k}$.
Lucrul mecanic efectuat de forţa $\vec{F}$ într-o deplasare de-a lungul traiectoriei (γ) este

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_\gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Integrala $\int_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$ se numeşte *circulaţia* forţei $\vec{F}$ de-a lungul traiectoriei (γ).
Integrala

$$\int_\gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

se numeşte *integrală curbilinie în raport cu coordonatele* (de speţa a doua).
Dacă funcţiile $P, Q, R : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sunt continue atunci are loc formula

de calcul

$$\int_\gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z=\int_a^b\{P[f(t),g(t),h(t)]\cdot f'(t)+$$
$$+Q[f(t),g(t),h(t)]\cdot g'(t)+R[f(t),g(t),h(t)]\cdot h'(t)\}\,\mathrm{d}t. \quad (3.1)$$

Integrala curbilinie în plan

Fie $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma(t)=(f(t),g(t))\,,\ t\in[a,b]$ un drum neted în plan. Dacă $P,Q:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},(\gamma)\subset D$, sunt funcţii continue, atunci

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\{P\,[f(t),g(t)]\cdot f'(t)+Q\,[f(t),g(t)]\cdot g'(t)\}\ \mathrm{d}t. \quad (3.2)$$

Observaţie 3.1. Fie $A=\gamma(a),\ B=\gamma(b)$. Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ are ecuaţia explicită $y=f(x),\ x\in[a,b]$, atunci integrala curbilinie în plan se poate calcula astfel:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\{P\,[x,f(x)]+Q\,[x,f(x)]\cdot f'(x)\}\ \mathrm{d}x. \quad (3.3)$$

FORME DIFERENŢIALE EXACTE

Fie $D\subset\mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă, $P,Q,R:D\to\mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1.

Definiţie 3.2. Forma diferenţială $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ se numeşte formă diferenţială exactă, dacă există o funcţie $\Phi\in C^1(D)$, numită primitiva lui ω, astfel încât $\mathrm{d}\Phi=\omega$.

O primitivă a formei diferenţiale exacte ω este

$$\Phi(x,y,z)=\int_{x_0}^x P(t,y_0,z_0)\,\mathrm{d}t+\int_{y_0}^y Q(x,t,z_0)\,\mathrm{d}t+\int_{z_0}^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t, \quad (3.4)$$

unde $M(x_0,y_0,z_0)\in D$ este un punct oarecare, fixat. Cunoscând primitiva formei diferenţiale exacte ω, se poate calcula integrala $\int_\gamma\omega$, folosind

Teorema 3.3. Dacă $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ este un drum de clasă C^1, iar $\Phi : D \to \mathbb{R}$ este o primitivă a formei diferenţiale exacte ω, atunci

$$\int_\gamma \omega = \Phi\left[\gamma(b)\right] - \Phi\left[\gamma(a)\right].$$

Teorema 3.4. Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulţime deschisă şi conexă şi fie $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ o formă diferenţială cu $P, Q, R \in C^1(D)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1. ω este diferenţială exactă.
2. pentru orice drum închis $\gamma, (\gamma) \subset D$, avem $\int_\gamma \omega = 0$.
3. $\int_\gamma \omega$ nu depinde de drum.

Dacă $D \subset \mathbb{R}^3$ este deschisă şi convexă şi $P, Q, R \in C^2(D)$, atunci

$$\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

este diferenţială exactă, dacă şi numai dacă

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \quad ; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \tag{3.5}$$

INTEGRALA CURBILINIE ÎN RAPORT CU ARCUL

Considerăm $\gamma : [a,b] \to D,\ D \subset \mathbb{R}^3$, un drum neted, având ecuaţiile parametrice

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ t \in [a,b].$$

Fie $F : D \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Integrala

$$\int_\gamma F(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

se numeşte *integrală curbilinie în raport cu arcul* (de speţa întâia).
Expresia diferenţială

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \cdot \mathrm{d}t \tag{3.6}$$

se numeşte *element de arc.*

Avem formula de calcul

$$\int_\gamma F(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b F\left[x(t),y(t),z(t)\right]\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\cdot\,\mathrm{d}t. \tag{3.7}$$

Aplicaţii

1. Lungimea drumului este $\ell(\gamma)=\int_\gamma \mathrm{d}s$.

2. Dacă $\rho:(\gamma)\to\mathbb{R}$ este densitatea unui fir material având forma traiectoriei (γ), de grosime neglijabilă în raport cu lungimea, atunci masa firului este

$$M=\int_\gamma \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

3. Coordonatele centrului de greutate al firului sunt

$$x_G=\frac{1}{M}\int_\gamma x\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$y_G=\frac{1}{M}\int_\gamma y\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$z_G=\frac{1}{M}\int_\gamma z\cdot\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

Integrala curbilinie în plan

Dacă $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma(t)=(x(t),y(t)),\ t\in[a,b]$ este un drum neted în plan, atunci

$$\int_\gamma F(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b F\left[x(t),y(t)\right]\cdot\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\cdot\,\mathrm{d}t. \tag{3.8}$$

Observaţie 3.5. Fie $A=\gamma(a),\ B=\gamma(b)$. Dacă arcul $\overset{\frown}{AB}$ are ecuaţia explicită $y=f(x),\ x\in[a,b]$, atunci integrala curbilinie se poate calcula astfel

$$\int_\gamma F(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b F\left[x,f(x)\right]\cdot\sqrt{1+(f'(x))^2}\cdot\,\mathrm{d}x.$$

3.2 Exerciţii

3.1. Să se calculeze $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{y}\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$, unde γ are reprezentarea parametrică

$$\gamma : \begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]\,.$$

3.2. Să se calculeze $\displaystyle\int_C (x+3y)\,\mathrm{d}x + 4y\,\mathrm{d}y$, unde C are reprezentarea vectorială

$$C\colon\ \vec{r} = (t^2+1)\,\vec{\imath} + (t^3 - t)\,\vec{\jmath}, \quad t \in [0,2].$$

3.3. Să se calculeze $\displaystyle\int_C (5x^2 - xy)\,\mathrm{d}x + (y^3 + 2xy)\,\mathrm{d}y$, unde C este curba $y = x^3$, cu originea în punctul $A(-1,1)$ şi extremitatea în $B(1,1)$.

3.4. Să se calculeze $\displaystyle\int_{AB} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r}$, unde $\vec{v} = e^{x+2y}\,\vec{\imath} + (x^2 - y)\,\vec{\jmath}$ şi AB este segmentul cu originea în $A(1,2)$ şi extremitatea în $B(3,-1)$.

3.5. Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{v} = y^2\,\vec{\imath} - \frac{8x^2}{y}\,\vec{\jmath}$ pe curba închisă aflată în primul cadran, parcursă în sens direct, obţinută prin intersectarea dreptei $10x - 3y - 28 = 0$ cu hiperbola $xy = 2$ şi cu parabola de ecuaţie $y^2 = 4x$.

3.6. Să se calculeze $\displaystyle\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y$, unde C este curba închisă obţinută prin intersecţia curbelor

$$C : \begin{cases} xy = 2 \\ y = 2x \quad\quad x \geq 0, \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

iar sensul de parcurgere al curbei C este cel trigonometric.

3.7. Să se calculeze $\displaystyle\int_C y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, unde C este cercul unitate, parcurs în sens trigonometric.

3.8. Să se calculeze $\int_C y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y$, unde C este cercul de rază 1 şi centru $(1,1)$, parcurs în sens trigonometric.

3.9. Să se calculeze $\int_C \frac{\mathrm{d}x}{y} - \sqrt{2x}\,\mathrm{d}y$, unde C este curba de ecuaţie

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y \geq 0, \end{cases}$$

parcursă de la $A(2,0)$ la $B(0,0)$.

3.10. Să se calculeze

$$\int_C \frac{y\,\mathrm{d}y - x\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2},$$

unde C este arcul astroidei $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, cuprins între $A(a,0)$ şi $B(0,a)$, parcurs de la A la B pe drumul cel mai scurt.

3.11. Să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes: $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.

3.12. Să se calculeze aria domeniului mărginit de curba $x^4 + y^4 - 2y^3 = 0$.

3.13. Să se calculeze aria domeniului mărginit de trifoiul reprezentat în coordonate polare prin ecuaţia $\rho = -\cos 3\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$.

3.14. Să se calculeze

$$\int_\gamma (x - y)\,\mathrm{d}x + (z + x)\,\mathrm{d}y + 2y\,\mathrm{d}z,$$

unde γ este

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t^2 + 1 \qquad t \in [0,1]. \\ z = t^2 - t \end{cases}$$

3.15. Să se calculeze $\int_{AB} x\,\mathrm{d}x + y^2\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}z$, unde AB este segmentul cu extremităţile $A(1,-1,3)$ şi $B(2,1,0)$.

3.16. Să se calculeze

$$\int_{\widehat{AB}} (yz + 2x)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + (xy + 2z)\,\mathrm{d}z,$$

unde $\widehat{AB} \subset \Gamma$, parcurs din $A(1,0,1)$ la $B(0,1,1)$, iar Γ este curba de ecuaţie

$$\Gamma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 = 1,\ z = 1 \right\}.$$

3.17. Să se calculeze $\displaystyle\int_C \left(y^2 + z^2\right)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}z$, unde C este curba

$$C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4ax \\ x^2 + y^2 = 2ax, \end{cases} \qquad z \geq 0$$

parcursă în sens invers acelor de ceasornic, dacă este privită din partea pozitivă a axei Oz.

3.18. Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{v} = x^2\,\vec{\imath} + xy\,\vec{\jmath} - yz\,\vec{k}$ de-a lungul curbei de intersecţie a conului $y^2 + z^2 = (x-2)^2$ cu planele de coordonate, situată în primul octant, având sensul de parcurgere al acelor de ceasornic, dacă este privită din originea axelor de coordonate.

3.19. Să se calculeze lucrul mecanic al forţei $\vec{F} = y\,\vec{\imath} + z^2\,\vec{\jmath} + x\,\vec{k}$, care acţionează asupra unui punct ce se deplasează pe curba aflată la intersecţia conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ cu paraboloidul $z = 6 - (x^2 + y^2)$. Deplasarea se face în sensul acelor de ceasornic, dacă se priveşte din originea axelor de coordonate.

3.20. Să se afle lucrul mecanic efectuat de $\vec{F} = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + \frac{2}{9}(x+y)\,\vec{k}$, ce acţionează asupra unei particule ce se mişcă pe curba de ecuaţie

$$C\colon \begin{cases} x = 5\cos 2t + \cos 9t \\ y = 5\sin 2t + \cos 9t \quad t \in [0, 2\pi]. \\ z = \sin 9t \end{cases}$$

3.21. Să se calculeze

$$\int_C \frac{\mathrm{d}x}{(y+x)(y+2x+1)},$$

unde C este arcul din primul cadran al parabolei $y^2 = x$.

3.22. Să se calculeze
$$\int_C \frac{\ln y \, \mathrm{d}y}{\sqrt{y}(x^2+y+1)},$$
unde C este arcul de parabolă $y = x^2$ din primul cadran.

3.23. Să se calculeze
$$\int_{(0,0,1)}^{\left(1,\pi,\frac{\pi}{2}\right)} (e^x \cos y + yz)\,\mathrm{d}x + (xz - e^x \sin y)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z.$$

3.24. Să se calculeze
$$\int_{(0,0,0)}^{(1,2,5)} yz(2x+y+z)\,\mathrm{d}x + zx(x+2y+z)\,\mathrm{d}y + xy(x+y+2z)\,\mathrm{d}z.$$

3.25. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât integrala
$$I = \int_{\widehat{AB}} 2x \ln z \,\mathrm{d}x + \frac{1}{z} e^y \,\mathrm{d}y + \frac{1}{z^2}(ax^2 z + be^y)\,\mathrm{d}z,$$
să nu depindă de drum. Arcul $\widehat{AB}$ este o curbă din semispaţiul $z > 0$ cu extremităţile $A(1,0,1)$ şi $B(-1,1,e)$. Determinaţi valoarea lui I.

3.26. Să se calculeze integrala
$$\int_C \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$
pe o curbă care nu trece prin originea axelor de coordonate şi are ca origine punctul $(0,4)$ şi ca extremitate punctul $(3,0)$.

3.27. Calculaţi integrala curbilinie
$$\int_\gamma e^{yz}\,\mathrm{d}x + (xze^{yz} + y)\,\mathrm{d}y + (xye^{yz} + 3z^2)\,\mathrm{d}z,$$
unde γ are ecuaţiile parametrice
$$\gamma\colon \begin{cases} x = 1 - \cos t, \\ y = \sin 2t, & t \in [0, 1000\pi]. \\ z = \dfrac{2t}{2 + \sin 2t}, \end{cases}$$

3.28. Să se calculeze $\int_\gamma ye^{-x}\,\mathrm{d}s$, unde γ are ecuaţia

$$\gamma\colon \begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = 2\operatorname{arctg} t - t \end{cases} \qquad t \in [0,1].$$

3.29. Să se calculeze lungimea drumului

$$\gamma\colon \begin{cases} x = e^{at}\,(a\sin bt - b\cos bt) \\ y = e^{at}\,(a\cos bt + b\sin bt) \end{cases} \qquad t \in [0,1], a, b > 0.$$

3.30. Să se calculeze masa spiralei logaritmice omogene

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{5}\,e^{\frac{t}{10}}\cos t \\ y = \dfrac{1}{5}\,e^{\frac{t}{10}}\sin t \end{cases} \qquad t \in [-4\pi, 4\pi].$$

3.31. Să se calculeze lungimea drumului parabolic $y = x^2$, $x \in [0,3]$.

3.32. Să se calculeze lungimea cardioidei, reprezentată în coordonate polare prin $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, unde $a > 0$.

3.33. Să se calculeze $\int_C (x+z)\,\mathrm{d}s$, unde curba C are reprezentarea vectorială

$$C\colon\ \vec{r} = t^2\cos t\,\vec{\imath} + t^2\sin t\,\vec{\jmath} + 2t\,\vec{k}, \quad t \in [0,\pi].$$

3.34. Să se calculeze $\int_C (x^2 - 2y + z)\,\mathrm{d}s$, unde C este cercul

$$C\colon \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y + z = 0. \end{cases}$$

3.35. Să se calculeze masa şi centrul de greutate pentru firul material cu densitatea $\rho(x,y) = xy$, de grosime neglijabilă în raport cu lungimea, care are forma arcului din primul cadran al elipsei $3x^2 + 4y^2 = 1$.

3.3 Soluţii

Soluţie 3.1. Este o integrală curbilinie în plan. Aplicăm (3.2)

$$\begin{aligned}
I &= \int_\gamma \sqrt{y}\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\pi \left[\sqrt{1-\cos t}\cdot(1-\cos t) - (t-\sin t)\cdot \sin t\right]\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi [\sqrt{2}\,\sin\frac{t}{2}\cdot(1-\cos t) - t\sin t + \sin^2 t]\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2}\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t - \sqrt{2}\int_0^\pi \sin\frac{t}{2}\cos t\,\mathrm{d}t - \int_0^\pi t\sin t\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \sin^2 t\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Folosind formulele

$$\sin\frac{t}{2}\cos t = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{3t}{2} + \sin\frac{t}{2}\right) \text{ şi } \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$$

obţinem $I = 2\sqrt{2} + \dfrac{2\sqrt{2}}{3} - \pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} - \dfrac{\pi}{2}$.

Soluţie 3.2. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

$$C\colon \begin{cases} x = t^2+1 \\ y = t^3 - t \end{cases},\ t\in[0,2]\,.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
\int_C (x+3y)\,\mathrm{d}x + 4y\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 (t^2+1+3t^3-3t)\cdot 2t + 4(t^3-t)(3t^2-1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^2 (12t^5+6t^4-14t^3-6t^2+6t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2t^6\Big|_0^2 + \frac{6t^5}{5}\Big|_0^2 - \frac{7t^4}{2}\Big|_0^2 - 2t^3\Big|_0^2 + 3t^2\Big|_0^2 = \frac{532}{5}.
\end{aligned}$$

Soluţie 3.3. Curba are ecuaţia explicită

$$AB\colon\quad y = x^3,\ x\in[-1,1].$$

Aplicăm formula (3.3). Avem

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma (5x^2 - xy)\,\mathrm{d}x + (y^3 + 2xy)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^{1} [(5x^2 - x \cdot x^3) + ((x^3)^3 + 2x \cdot x^3) \cdot 3x^2]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} (3x^{11} + 6x^6 - x^4 + 5x^2)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Folosind paritatea funcţiei de sub integrală, obţinem

$$I = 2\int_0^1 (6x^6 - x^4 + 5x^2)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{6}{7} - \frac{1}{5} + \frac{5}{3}\right) = \frac{488}{105}.$$

Soluţie 3.4. Avem

$$\int_{AB} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{AB} e^{x+2y}\,\mathrm{d}x + (x^2 - y)\,\mathrm{d}y.$$

Ecuaţia dreptei AB se scrie

$$AB\colon \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = t.$$

Atunci parametrizarea segmentului AB este

$$[AB]\colon \quad \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 3t \end{cases}, \ t \in [0,1]\,.$$

Valoarea integralei este

$$\int_{AB} e^{x+2y}\,\mathrm{d}x + (x^2 - y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 [2e^{5-4t} - 3(4t^2 + 7t - 1)]\,\mathrm{d}t = \frac{e^5 - e - 23}{2}.$$

Soluţie 3.5. Intersecţia din primul cadran dintre dreaptă şi hiperbolă este punctul $A(3, \frac{2}{3})$, intersecţia din primul cadran dintre dreaptă şi parabolă este punctul $B(4,4)$ şi intersecţia dintre hiperbolă şi parabolă este punctul $C(1,2)$, vezi Figura 3.1. Circulaţia lui $\vec{v}$ pe drumul γ este

$$\int_\gamma \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x - \frac{8x^2}{y}\,\mathrm{d}y,$$

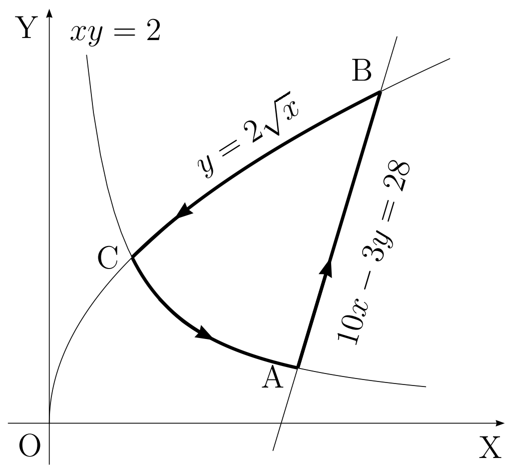


Figura 3.1: Curba $ABCA$

unde γ este juxtapunerea a trei drumuri. Ecuaţiile explicite ale acestor drumuri sunt

$$AB \quad : \quad y = \frac{10x-28}{3},\ x \in [3,4],$$

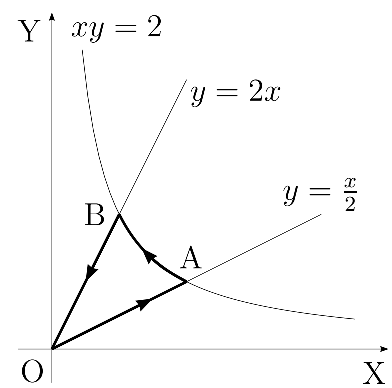
$$CB \quad : \quad y = 2\sqrt{x},\ x \in [1,4],$$

$$CA \quad : \quad y = \frac{2}{x}, x \in [1,3].$$

Aşadar

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} &= \int_{AB} y^2\,\mathrm{d}x - \frac{8x^2}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{BC} y^2\,\mathrm{d}x - \frac{8x^2}{y}\,\mathrm{d}y + \int_{CA} y^2\,\mathrm{d}x - \frac{8x^2}{y}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_3^4 \left[\left(\frac{10x-28}{3}\right)^2 - \frac{80x^2}{10x-28}\right]\mathrm{d}x + \int_4^1 0\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\frac{4}{x^2} + 8x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{10}\left(\frac{10x-28}{3}\right)^3 - 4x^2 - \frac{224x}{10} - \frac{6272}{100}\ln(10x-28)\Big|_3^4 - \frac{4}{3} + 36 \\
&= -\frac{1264}{135} - \frac{1568}{25}\ln 6.
\end{aligned}$$

Soluţie 3.6. Intersectăm hiperbola $xy = 2$ cu cele două drepte. Cele două puncte din primul cadran au coordonatele $A(2,1)$ şi $B(1,2)$. Pentru drumuri, avem ecuaţiile explicite:



$$OA\colon \quad y = \frac{x}{2},\ x \in [0,2]\,,$$
$$BA\colon \quad y = \frac{2}{x},\ x \in [1,2]\,,$$
$$OB\colon \quad y = 2x,\ x \in [0,1]\,.$$

Integrala curbilinie se calculează astfel

$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = \int_{OA} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + \int_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y + \int_{BO} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y.$$

Avem

$$\int_{OA} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(x + \frac{x}{2} - \frac{x}{4}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}.$$
$$\int_{AB} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = \int_2^1 \left(x + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x = -3 - 2\ln 2.$$
$$\int_{BO} (x+y)\,\mathrm{d}x - y\,\mathrm{d}y = \int_1^0 (3x - 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

având ca sumă $-2\ln 2$.

Soluţie 3.7. Cercul γ de centru $(0,0)$ şi rază 1, are ecuaţia $x^2 + y^2 = 1$. Pentru a-l parametriza, folosim coordonatele polare

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia cercului, obţinem $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1$, adică $\rho = 1$. Curba γ are parametrizarea

$$\gamma\colon \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Acum putem calcula valoarea integralei

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} (-\sin^2\varphi + \cos^3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^{2\pi} \cos\varphi(1-\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -\pi. \end{aligned}$$

Soluţie 3.8. Cercul γ are ecuaţia $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. Pentru a-l parametriza, folosim coordonatele polare cu polul $(1,1)$

$$\begin{cases} x - 1 = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y - 1 = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia cercului, obţinem $\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = 1$, adică $\rho = 1$. Cercul γ are parametrizarea

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 1 + \cos\varphi \\ y = 1 + \sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Acum putem calcula valoarea integralei

$$I = \int_\gamma y^2\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} (-(1+\sin\varphi)^2\sin\varphi - (1+\cos\varphi)^2\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -4\pi.$$

Soluţie 3.9. Ecuaţia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ se poate scrie sub forma echivalentă $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ceea ce împreună cu $y \geq 0$, reprezintă ecuaţia semicercului de rază 1 şi centru $(1,0)$. Vom rezolva problema în două feluri.

I. Folosim coordonatele polare cu originea în punctul $(1,0)$ (vezi Figura 3.2)

$$\begin{cases} x - 1 &= \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y &= \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia semicercului dat $(x-1)^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$, se obţine $\rho = 1$ şi $\varphi \in [0, \pi]$. Semicercul γ se parametrizează astfel:

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 1 + \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases} \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Cu aceasta, integrala dată, devine

$$\begin{aligned} I &= -\int_0^{\pi}\left[1+\cos\varphi\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\right]\,\mathrm{d}\varphi = -\pi - \int_0^{\pi} 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -\pi - \int_0^{\pi}\left(\cos\frac{3\varphi}{2}+\cos\frac{\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\varphi = -\pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

II. Folosim coordonatele polare cu originea în punctul $(0,0)$ (vezi Figura 3.3)

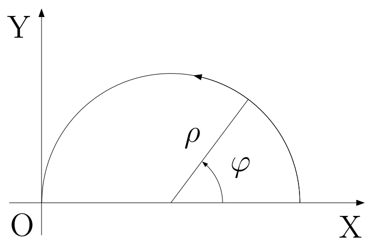


Figura 3.2: Metoda I

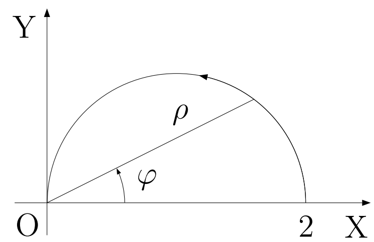


Figura 3.3: Metoda II

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia semicercului dat $x^2 + y^2 - 2x = 0$, $y \geq 0$, se obţine $\rho = 2\cos\varphi$ şi $\varphi \in [0, \pi/2]$. Parametrizarea semicercului este:

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos^2\varphi \\ y = 2\cos\varphi\sin\varphi \end{cases} \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-4\cos\varphi\sin\varphi}{2\cos\varphi\sin\varphi} - 4\cos^3\varphi + 2\cos\varphi\cdot 2\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi = -\pi - \frac{4}{3}.$$

Se observă că valoarea integralei este aceeaşi, indiferent de modul în care parametrizăm curba.

Soluţie 3.10. Arcul AB se parametrizează în felul următor:

$$\gamma\colon \begin{cases} x = a\cos^3\varphi \\ y = a\sin^3\varphi \end{cases}, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Cu aceasta, valoarea integralei este:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3a^2\cos\varphi\cdot\sin^5\varphi + 3a^2\sin\varphi\cdot\cos^5\varphi}{a^2\left(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi\right)}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\varphi\sin\varphi(\sin^4\varphi+\cos^4\varphi)}{\sin^4\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\cos^4\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sin 2\varphi}{2}\left(1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right)}{1-3\frac{\sin^2 2\varphi}{4}}\,\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}
$$

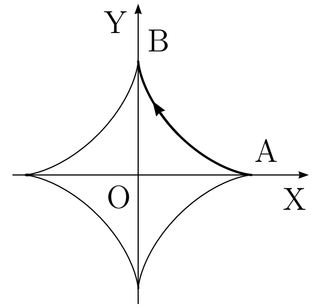


Figura 3.4: Astroida

Prin schimbarea de variabilă $u = \cos 2\varphi$, obţinem

$$
I = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u^2+1}{3u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{3u^2+1+2}{3u^2+1}\,\mathrm{d}u = 1+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} u\sqrt{3}\Big|_0^1 = 1+\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.
$$

Soluţie 3.11. Foliul lui Descartes este curba de ecuaţie $x^3+y^3 = 3axy$ şi are reprezentarea grafică din Figura 3.5. Pentru a parametriza această curbă o intersectăm cu o dreaptă $y = tx$. Curba are punct dublu în origine, iar axele OX şi OY sunt tangente buclei. Cum t este panta dreptei, rezultă că $t\in[0,\infty)$. Se obţine

$$
C\colon \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\[2ex] y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t\in[0,\infty).
$$

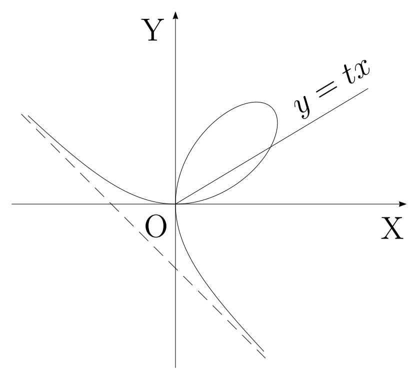


Figura 3.5: Foliul lui Descartes

Aria unui domeniu care are ca şi frontieră curba C se poate calcula prin formula

$$
\mathcal{A}ria = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.
$$

Aria foliului lui Descartes va fi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{2t^2-t^5-t^2+2t^5}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{-1}{1+t^3}\Big|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$

Soluţie 3.12. Considerăm $y = tx$. Parametrul t are semnificaţia de pantă şi pentru că C se găseşte în primele două cadrane, $t \in \mathbb{R}$. Se obţine următoarea parametrizare a curbei date

$$C\colon \begin{cases} x = \dfrac{2t^3}{1+t^4} \\ y = \dfrac{2t^4}{1+t^4} \end{cases} \qquad t \in (-\infty,\infty)\,.$$

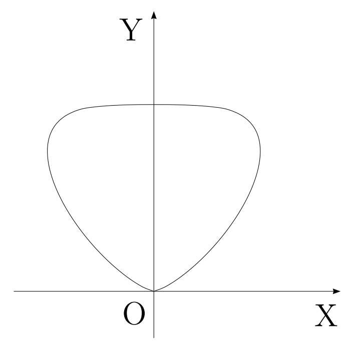


Figura 3.6: Curba $x^4 + y^4 = 2y^3$

Aria domeniului mărginit de curba C este

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria &= \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{2t^3}{1+t^4}\cdot\frac{8t^3}{(1+t^4)^2} - \frac{2t^4}{1+t^4}\cdot\frac{6t^2-2t^6}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 4\int_0^\infty \frac{t^6}{(1+t^4)^2}\,\mathrm{d}t \underset{x=1/t}{=} 4\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^4)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\int_0^\infty \frac{x^4+1-x^4}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty x\frac{4x^3}{(x^4+1)^2}\,\mathrm{d}x\\ &= 4\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty x\left(\frac{1}{1+x^4}\right)'\,\mathrm{d}x\\ &= 3\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

În ultima integrală, facem schimbarea de variabilă $u = 1/x$ şi obţinem că

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{u^2}{u^4+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Acum dacă notăm $v = x - \frac{1}{x}$, obţinem

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}v}{v^2+2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Cu aceasta, aria căutată este $\frac{3\pi}{2\sqrt{2}}$.

Soluţie 3.13. Calculăm aria cu formula

$$\mathcal{A}ria = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

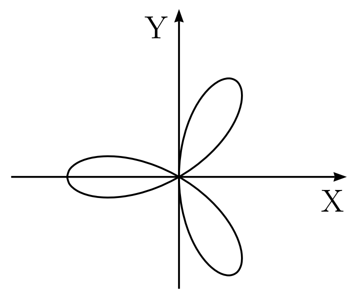


Figura 3.7: Trifoiul

Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt:

$$C\colon \begin{cases} x = \rho(\varphi)\cdot\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\cdot\sin\varphi \end{cases}, \ \varphi \in [0,\pi],$$

unde $\rho(\varphi) = -\cos 3\varphi$. Deducem că aria se exprimă cu formula

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho\cos\varphi(\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi) - \rho\sin\varphi(\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

Cu această formulă, obţinem aria trifoiului $\mathcal{A}ria = \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos^2 3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Soluţie 3.14. Este integrală curbilinie în spaţiu. Aplicăm formula (3.1)

$$\begin{aligned}&\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (z+x)\,\mathrm{d}y + 2y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 [(2t-1-2t^2-1)\cdot 2 + (t^2-t+2t-1)\cdot 4t + 2(2t^2+1)(2t-1)]\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (12t^3-4t^2+4t-6)\,\mathrm{d}t = -\frac{7}{3}.\end{aligned}$$

Soluţie 3.15. Ecuaţiile dreptei AB sunt

$$AB\colon \quad \frac{x-1}{2-1} = \frac{y+1}{1+1} = \frac{z-3}{0-3} = t.$$

Parametrizarea segmentului AB este

$$[AB]\colon \quad \begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = -3t+3 \end{cases}, \ t \in [0,1].$$

Valoarea integralei este

$$I = \int_0^1 [t+1+2(2t-1)^2 - 3(t+1)(-3t+3)]\,\mathrm{d}t = -\frac{23}{6}.$$

Soluţie 3.16. Curba Γ este intersecţia cilindrului $x^2+y^2=1$ cu planul $z=1$. Folosim coordonatele cilindrice (ρ,φ,z) introduse prin relaţiile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Din ecuaţia $x^2+y^2=1$ se obţine $\rho=1$. Drumul AB se parametrizează prin

$$AB\colon \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = 1 \end{cases} \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

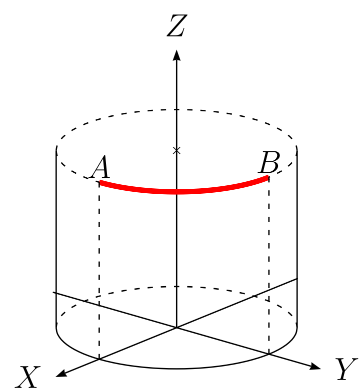


Figura 3.8: Drumul Γ

Cu această parametrizare, integrala dată se calculează astfel

$$\begin{aligned}\int_{AB} (yz+2x)\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + (xy+2z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-(\sin\varphi + 2\cos\varphi)\sin\varphi + \cos^2\varphi + 0\right]\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2\varphi - \sin 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \left.\frac{\sin 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + \left.\frac{\cos 2\varphi}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -1.\end{aligned}$$

Soluţie 3.17. Ecuaţia $x^2+y^2+z^2=4ax$ se rescrie $(x-2a)^2+y^2+z^2=4a^2$ şi reprezintă o sferă cu centrul în $(2a,0,0)$ şi rază $2a$. Ecuaţia $x^2+y^2=2ax$ se poate aduce la forma $(x-a)^2+y^2=a^2$, ecuaţie care descrie un cilindru. Curba aflată la intersecţia dintre sferă şi cilindru se numeşte *curba lui Viviani*, vezi Figura 3.9. Pentru a parametriza curba folosim coordonate cilindrice

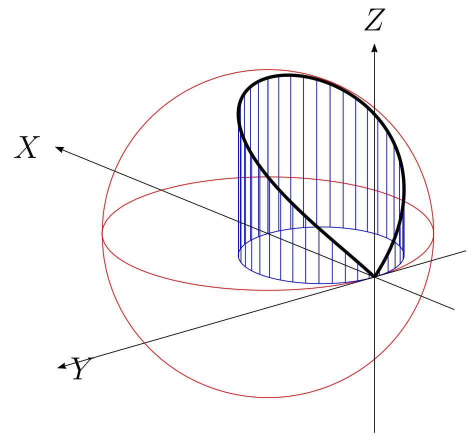


Figura 3.9: Curba lui Viviani

(ρ,φ,z). Avem

$$\begin{cases} x-a= & \rho\cos\varphi,\\ y= & \rho\sin\varphi,\\ z= & z.\end{cases}$$

Un punct de coordonate (x,y,z) trebuie să verifice ecuaţiile cilindrului şi sferei. Din $(x-a)^2+y^2=a^2$, obţinem $\rho=a$. Înlocuind x,y în ecuaţia sferei rezultă $z=2a\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$. Ecuaţiile parametrice ale curbei sunt

$$C\colon \begin{cases} x=a+a\cos\varphi,\\ y=a\sin\varphi, & \varphi\in[0,2\pi].\\ z=2a\left|\cos\dfrac{\varphi}{2}\right| \end{cases}$$

Integrala de calculat devine

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C (y^2+z^2)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}z \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} [a^2\sin^2\varphi + a^2(2+2\cos\varphi)](-a\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi}_{=0} \\
&\quad - \int_0^{\pi} (a + a\cos\varphi + a\sin\varphi)\cdot a\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\
&\quad + \int_{\pi}^{2\pi} (a + a\cos\varphi + a\sin\varphi)\cdot a\sin\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}
$$

de unde cu ajutorul formulelor

$$
\cos a\sin b = \frac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2} \qquad \sin a\sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2},
$$

obţinem

$$
\begin{aligned}
I = {}& 2a^2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3}\cos\frac{3\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{a^2}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\Big|_0^{\pi} \\
& - 2a^2\cos\frac{\varphi}{2}\Big|_{\pi}^{2\pi} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{2}{3}\cos\frac{3\varphi}{2} - 2\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi} + \frac{a^2}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2} - \frac{2}{3}\sin\frac{3\varphi}{2}\right)\Big|_{\pi}^{2\pi}
\end{aligned}
$$

având rezultatul $I = -8a^2/3$.

Soluţie 3.18. Vârful conului are coordonatele $V(2,0,0)$. Intersecţia conului cu planul YOZ este cercul de ecuaţie $x=0$ şi $y^2+z^2=4$. Notăm cu A intersecţia acestui cerc cu axa OY şi cu B, intersecţia cu axa OZ. Aceste puncte au coordonatele $A(0,2,0)$ şi $B(0,0,2)$.

Avem

$$
I = \int_{VABV} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{VA} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r} + \int_{AB} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r} + \int_{BV} \vec{v}\,\mathrm{d}\,\vec{r}.
$$

Ecuaţiile parametrice ale segmentului VA sunt

$$
VA\colon \begin{cases} x = 2-2t, \\ y = 2t, & t\in[0,1]. \\ z = 0. \end{cases}
$$

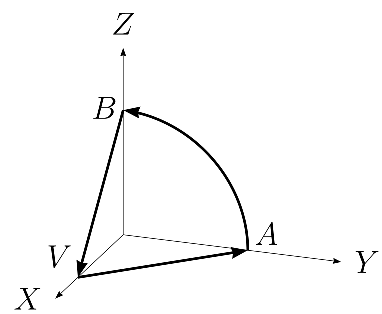


Figura 3.10: Intersecţia conului $y^2 + z^2 = (x-2)^2$ cu planele de coordonate

Astfel

$$\int_{VA} x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y - yz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 [4(1-t)^2(-2) + 8t(1-t)]\,\mathrm{d}t = -\frac{4}{3}.$$

Arcul AB se parametrizează prin

$$AB\colon \begin{cases} x = 0, \\ y = 2\cos\varphi, \quad \varphi \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = 2\sin\varphi. \end{cases}$$

Avem

$$\int_{AB} x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y - yz\,\mathrm{d}z = -8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{8}{3}.$$

Segmentul BV se parametrizează prin

$$BV\colon \begin{cases} x = 2t, \\ y = 0, \qquad t \in [0,1]. \\ z = 2 - 2t. \end{cases}$$

Se obţine

$$\int_{BV} x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y - yz\,\mathrm{d}z = \int_0^1 8t^2\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}.$$

Rezultă că circulaţia vectorului dat pe curba considerată este $-\dfrac{4}{3}$.

Soluţie 3.19. Intersectăm conul cu paraboloidul, rezolvând sistemul

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 6 - (x^2 + y^2). \end{cases}$$

Obţinem $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$, vezi Figura 3.11. Parametrizarea acestui cerc

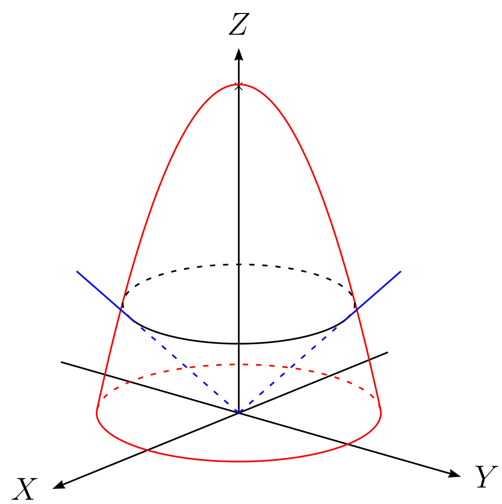


Figura 3.11: Intersecţia conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ cu $z = 6 - (x^2 + y^2)$

este

$$C\colon \begin{cases} x = 2\cos\varphi \\ y = 2\sin\varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi]\,. \\ z = 2 \end{cases}$$

Lucrul mecanic se calculează prin integrala curbilinie

$$L = \int_C \vec{F} \mathrm{d}\,\vec{r}.$$

Aşadar

$$L = \int_C y\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (-4\sin^2\varphi + 8\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = -4\pi.$$

Soluţie 3.20. Traiectoria particulei are forma unui nod toric, vezi Figura 3.12. Avem de calculat

$$L = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y + \frac{2}{9}(x + y)\,\mathrm{d}z$$

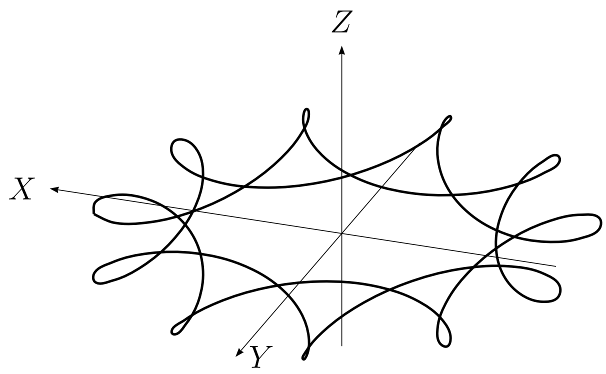


Figura 3.12: Nod toric

$$
\begin{aligned}
L = \int_0^{2\pi} & \big[(5\sin 2t + \cos 9t)(-10\sin 2t - 9\sin 9t) \\
& - (5\cos 2t + \cos 9t)(10\cos 2t - 9\sin 9t) \\
& + 2(5\cos 2t + 5\sin 2t + 2\cos 9t)\cos 9t\big]\,\mathrm{d}t \\
= \int_0^{2\pi} & \left[-50 + 4\cos^2 9t - 45\sin 9t(\sin 2t - \cos 2t)\right]\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Se obţine $L = -96\pi$.

Soluţie 3.21. Arcul parabolei $y^2 = x$ situat în primul cadran are reprezentarea parametrică

$$C\colon \begin{cases} x = t^2 \\ y = t \end{cases} \quad t \in (0, \infty)\,.$$

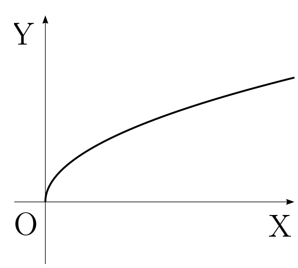


Figura 3.13: Parabola $y^2 = x$

Valoarea integralei curbilinii este

$$
\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{\mathrm{d}x}{(y+x)(y+2x+1)} \\
&= \int_0^\infty \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t+t^2)(2t^2+t+1)} \\
&= \int_0^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)(2t^2+t+1)}.
\end{aligned}
$$

Descompunând în fracţii simple expresia de sub integrală

$$\frac{2}{(t+1)(2t^2+t+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{2t^2+t+1},$$

se obţin $A = 1$, $B = -2$ şi $C = 1$. Cu aceştia, rezultă

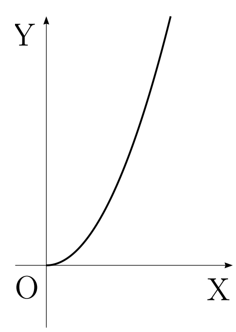
$$\begin{aligned}
I &= \lim_{u\to\infty} \int_0^u \frac{2\,\mathrm{d}t}{(t+1)(2t^2+t+1)} \\
&= \lim_{u\to\infty} \left(\int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{t+1} - \int_0^u \frac{2t-1}{2t^2+t+1} \right) \\
&= \lim_{u\to\infty} \left(\ln(u+1) - \frac{1}{2}\ln(2u^2+u+1) + \frac{3}{4}\int_0^u \frac{\mathrm{d}t}{(t+\frac{1}{4})^2+\frac{7}{16}} \right) \\
&= \lim_{u\to\infty} \left(\ln\frac{u+1}{\sqrt{2u^2+u+1}} + \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{t+\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} \Bigg|_0^u \right) \\
&= \ln\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{2\sqrt{7}} - \frac{3}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{7}}.
\end{aligned}$$

Soluţie 3.22. Curba are ecuaţia explicită

$$y = x^2, \quad x \in [0, \infty).$$

Putem aplica formula (3.3). Valoarea integralei este

$$\begin{aligned}
I &= \int_C \frac{\ln y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y}(x^2+y+1)} \\
&= \int_0^\infty \frac{\ln t^2 \cdot 2t\,\mathrm{d}t}{t(2t^2+1)} \\
&= 4\int_0^\infty \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{2t^2+1}.
\end{aligned}$$



Facem o schimbare de variabilă

$$I \overset{u=\sqrt{2}t}{=} 4\int_0^\infty \frac{\ln\frac{u}{\sqrt{2}}}{u^2+1}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\underbrace{\int_0^\infty \frac{\ln u\,\mathrm{d}u}{u^2+1}}_{=I_1} - \underbrace{\frac{4\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1}}_{=I_2}.$$

Făcând schimbarea de variabilă $t = 1/u$, integrala I_1 devine

$$I_1 = \int_{\infty}^{0} \frac{\ln\frac{1}{t}}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1} \frac{\mathrm{d}t}{-t^2} = \int_0^{\infty} \frac{\ln\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{1+t^2} = -I_1,$$

ceea ce arată că $I_1 = 0$. Integrala I_2 are valoarea

$$I_2 = \frac{4\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} u\Big|_0^{\infty} = \frac{4\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\ln 2}{\sqrt{2}}.$$

Valoarea integralei curbilinii este $-\pi\ln 2/\sqrt{2}$.

Soluţie 3.23. Arătăm că $\omega = (e^x\cos y + yz)\,\mathrm{d}x + (xz - e^x\sin y)\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ este formă diferenţială exactă. Fie

$$P(x,y,z) = e^x\cos y + yz, \quad Q(x,y,z) = xz - e^x\sin y, \quad R(x,y,z) = xy.$$

Verificăm condiţiile (3.5).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= -e^x\sin y + z = \frac{\partial Q}{\partial x}\\
\frac{\partial Q}{\partial z} &= x = \frac{\partial R}{\partial y}\\
\frac{\partial R}{\partial x} &= y = \frac{\partial P}{\partial z},
\end{aligned}$$

ceea ce arată că ω este formă diferenţială exactă şi integrala dată nu depinde de drum. Calculăm primitiva formei diferenţiale exacte ω, aplicând (3.4), unde $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$.

$$\begin{aligned}
\phi(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,1)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,1)\,\mathrm{d}t + \int_1^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^x e^t\,\mathrm{d}t + \int_0^y (x - e^x\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_1^z xy\,\mathrm{d}t\\
&= e^x - 1 + xy + e^x(\cos y - 1) + xy(z-1) = xyz + e^x\cos y - 1.
\end{aligned}$$

Din Teorema 3.3 obţinem valoarea integralei

$$\int_{(0,0,1)}^{\left(1,\pi,\frac{\pi}{2}\right)} \omega = \phi\left(1,\pi,\frac{\pi}{2}\right) - \phi(0,0,1) = \frac{\pi^2}{2} - e - 1.$$

Soluţie 3.24. Pentru a arăta independenţa de drum a integralei considerate, arătăm că $\omega = yz(2x+y+z)\,\mathrm{d}x + zx(x+2y+z)\,\mathrm{d}y + xy(x+y+2z)\,\mathrm{d}z$ este diferenţială exactă. Verificăm condiţiile (3.5).

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xz + 2yz + z^2,$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x^2 + 2xy + 2xz,$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = 2xy + y^2 + 2yz.$$

Calculăm o primitivă cu formula (3.4), unde $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \int_0^x P(t,0,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,0)\,\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + 0 + xy(xz + yz + z^2) = xyz(x+y+z).\end{aligned}$$

Valoarea integralei este $\phi(1,2,5) - \phi(0,0,0) = 80$.

Soluţie 3.25. Fie $P = 2x\ln z$, $Q = \frac{1}{z}e^y$ şi $R = \frac{1}{z^2}(ax^2z + be^y)$. Din Teorema 3.4, rezultă că $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ trebuie să fie diferenţială exactă. Impunem condiţiile (3.5). Avem $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{be^y}{z^2}$, $\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{e^y}{z^2}$, de unde $b = -1$. Avem $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{2x}{z}$ şi $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{2axz}{z^2}$, de unde $a = 1$. Funcţia ϕ se calculează prin

$$\begin{aligned}\phi(x,y,z) &= \int_1^x P(t,0,1)\,\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,1)\,\mathrm{d}t + \int_1^z R(x,y,t)\,\mathrm{d}t \\ &= e^y - 1 + x^2\ln z + \frac{e^y}{z} - e^y = x^2\ln z + \frac{e^y}{z} - 1.\end{aligned}$$

Valoarea integralei date este $I = \phi(-1,1,e) - \phi(1,0,1) = 1$.

Soluţie 3.26. Vom arăta că integrala dată este independentă de drum. Avem

$$P = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ şi } Q = \frac{y}{x^2+y^2}, \text{ de unde } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Primitiva formei diferenţiale $\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ este

$$\begin{aligned}\phi(x,y) &= \int_0^x P(t,4)\,\mathrm{d}t + \int_4^y Q(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+16} + \int_4^y \frac{t\,\mathrm{d}t}{x^2+t^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+16}{16} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2+16} = \ln\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{4}.\end{aligned}$$

Rezultă că
$$\int_C \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \phi(3,0) - \phi(0,4) = \ln\frac{3}{4}.$$

Soluţie 3.27. Forma diferenţială $\omega = e^{yz}\,\mathrm{d}x + (xze^{yz}+y)\,\mathrm{d}y + (xye^{yz}+3z^2)\,\mathrm{d}z$ este exactă, pentru că notând

$$P(x,y,z) = e^{yz}, \qquad Q(x,y,z) = xze^{yz}+y, \qquad R(x,y,z) = xye^{yz}+3z^2,$$

avem egalităţile

$$\frac{\partial P}{\partial y} = ze^{yz} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = xe^{yz} + xyze^{yz} = \frac{\partial R}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R}{\partial x} = ye^{yz} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Rezultă că integrala nu depinde de drum, ci numai de capetele sale $A(0,0,0)$ şi $B(0,0,1000\pi)$. O primitivă a sa este

$$\phi(x,y,z) = \int_0^x \mathrm{d}t + \int_0^y t\,\mathrm{d}t + \int_0^z (xye^{yt}+3t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}y^2 + xe^{yz} + z^3.$$

Rezultă că $\displaystyle\int_\gamma \omega = \phi(0,0,1000\pi) - \phi(0,0,0) = 1\,000\,000\,\pi = 10^6\pi.$

Soluţie 3.28. Calculăm derivatele lui x şi y în funcţie de parametrul t

$$\begin{aligned}x'(t) &= \frac{2t}{1+t^2}\\ y'(t) &= \frac{2}{1+t^2} - 1.\end{aligned}$$

Cu formula $\mathrm{d}s = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$ se obţine elementul de arc

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \left(\frac{2}{1+t^2} - 1\right)^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{4t^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(1-t^2)^2}{(1+t^2)^2}}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t.$$

Atunci, conform (3.8)

$$\begin{aligned}\int_\gamma ye^{-x}\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 (2\operatorname{arctg} t - t)\cdot\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= 2\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= (\operatorname{arctg} t)^2\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Soluţie 3.29. Lungimea drumului C se calculează cu formula $\ell = \int_C \mathrm{d}s$. Calculăm mai întâi derivatele lui x şi y în raport cu parametrul t.

$$\begin{aligned}x'(t) &= ae^{at}\left(a\sin bt - b\cos bt\right) + e^{at}\left(ab\cos bt + b^2\sin bt\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)e^{at}\sin bt,\\ y'(t) &= ae^{at}\left(a\cos bt + b\sin bt\right) + e^{at}\left(-ab\sin bt + b^2\cos bt\right)\\ &= \left(a^2+b^2\right)e^{at}\cos bt.\end{aligned}$$

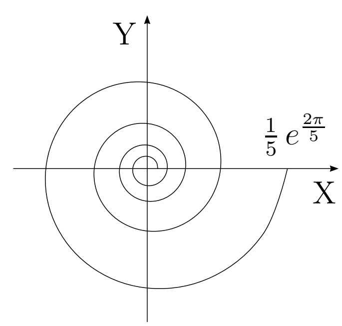
Acum calculăm elementul de arc $\mathrm{d}s$ cu formula (3.6)

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left(a^2+b^2\right)^2 e^{2at}\sin^2 bt + \left(a^2+b^2\right)^2 e^{2at}\cos^2 bt}\,\mathrm{d}t = \left(a^2+b^2\right)e^{at}\,\mathrm{d}t.$$

Lungimea drumului va fi

$$\ell = \int_0^1 \left(a^2+b^2\right)e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{a^2+b^2}{a}\left(e^a - 1\right).$$

Soluţie 3.30. Masa curbei C cu densitatea ρ se calculează cu $M = \int_C \rho\,\mathrm{d}s$. Pentru problema noastră densitatea este o funcţie constantă $\rho = \rho_0$. Calculăm derivatele lui x şi y şi obţinem



$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{50}e^{\frac{t}{10}}\cos t - \frac{1}{5}e^{\frac{t}{10}}\sin t,\\ y' &= \frac{1}{50}e^{\frac{t}{10}}\sin t + \frac{1}{5}e^{\frac{t}{10}}\cos t\end{aligned}$$

şi cu acestea elementul de arc este egal cu

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{101}}{50}\, e^{\frac{t}{10}}\,\mathrm{d}t.$$

Masa va fi

$$M = \rho_0 \int_{-4\pi}^{4\pi} \frac{\sqrt{101}}{50}\, e^{\frac{t}{10}}\,\mathrm{d}t = \frac{\rho_0\sqrt{101}}{5}\left(e^{\frac{2\pi}{5}} - e^{-\frac{2\pi}{5}}\right) \approx 6.49\rho_0.$$

Soluţie 3.31. Elementul de arc se va exprima cu ajutorul formulei

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

Lungimea drumului parabolic va fi

$$\begin{aligned}\ell = \int_\gamma \mathrm{d}s &= \int_0^3 \sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \frac{4x^2+1}{\sqrt{4x^2+1}}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^3 x\cdot\frac{4x}{\sqrt{4x^2+1}}\,\mathrm{d}x + \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Calculând prin părţi prima din cele două integrale, obţinem

$$\begin{aligned}\ell &= \int_0^3 x\cdot\left(\sqrt{4x^2+1}\right)'\,\mathrm{d}x + \int_0^3 \frac{1}{2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}\,\mathrm{d}x\\ &= x\sqrt{4x^2+1}\Big|_0^3 - \int_0^3 \sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}\right)\Bigg|_0^3\\ &= 3\sqrt{37} - \ell + \frac{1}{2}\ln\left(3 + \frac{\sqrt{37}}{2}\right) + \frac{\ln 2}{2},\end{aligned}$$

de unde rezultă valoarea lungimii

$$\ell = \frac{3\sqrt{37}}{2} + \frac{1}{4}\ln\left(3 + \frac{\sqrt{37}}{2}\right) + \frac{\ln 2}{4} \approx 9.747.$$

Soluţie 3.32. Avem nevoie de ecuaţiile parametrice pentru drum. Folosim coordonatele polare (ρ, φ), date prin transformarea

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

unde $\rho = a(1+\cos\varphi)$. Va rezulta

$$\gamma\colon \begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Derivatele lui x şi y în raport cu parametrul φ vor fi

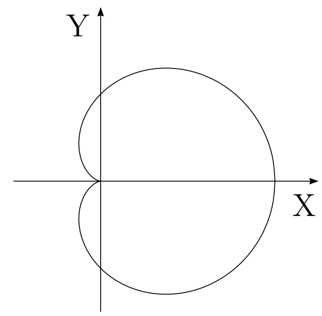


Figura 3.14: Cardioida

$$x' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,$$
$$y' = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi.$$

Folosind formula $\mathrm{d}s = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,\mathrm{d}\varphi$, deducem că formula generală a elementul de arc în coordonate polare va fi descrisă prin

$$\mathrm{d}s = \sqrt{[\rho'(\varphi)]^2 + \rho^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi.$$

În cazul nostru $\rho(\varphi) = a(1+\cos\varphi)$ şi $\rho'(\varphi) = -a\sin\varphi$. Aşadar

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = a\sqrt{2 + 2\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Lungimea cardioidei, datorită simetriei, va fi dublul lungimii curbei aflată în semiplanul superior.

$$\ell = 2\int_0^\pi a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = 8a.$$

Soluţie 3.33. Avem $x(t) = t^2\cos t$, $y(t) = t^2\sin t$ şi $z(t) = 2t$. Calculăm elementul de arc

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(2t\cos t - t^2\sin t)^2 + (2t\sin t + t^2\cos t)^2 + 4}\,\mathrm{d}t = (t^2+2)\,\mathrm{d}t.$$

Va rezulta că

$$\int_C (x+z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{\pi} (t^2\cos t + 2t)(t^2+2)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^4}{2} - 4\pi^3 + 2\pi^2 + 20\pi.$$

Soluţie 3.34. Înlocuind pe $z=-y$ în ecuaţia sferei, obţinem $x^2+2y^2=9$. Parametrizând această elipsă prin $x=3\cos t$ şi $y=\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t$, cu $t\in[0,2\pi)$,

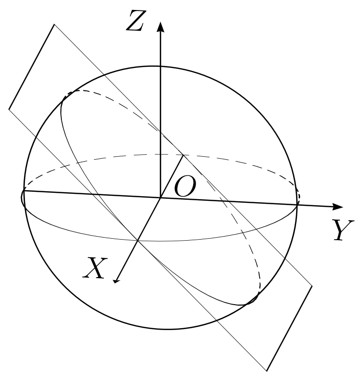


Figura 3.15: Intersecţia planului $y+z=0$ cu sfera $x^2+y^2+z^2=9$

obţinem parametrizarea cercului C

$$C\colon \begin{cases} x = 3\cos t \\ y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin t \qquad t\in[0,2\pi). \\ z = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sin t \end{cases}$$

Elementul de arc este

$$\mathrm{d}s = \sqrt{(-3\sin t)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2 + \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2}\,\mathrm{d}t = 3\,\mathrm{d}t.$$

Avem

$$\int_C (x^2-2y+z)\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\left(9\cos^2 t - \frac{9}{\sqrt{2}}\sin t\right)3\,\mathrm{d}t = 27\pi.$$

Soluţie 3.35. Masa M se calculează prin $M = \int_C \rho(x,y)\,\mathrm{d}s$, iar coordonatele centrului de greutate cu formulele

$$x_G = \frac{1}{M}\int_C x\cdot\rho(x,y)\,\mathrm{d}s \quad \text{şi} \quad y_G = \frac{1}{M}\int_C y\cdot\rho(x,y)\,\mathrm{d}s.$$

Parametrizând arcul de elipsă prin

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cos t \\ y = \dfrac{1}{2}\sin t, \end{cases} \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

obţinem

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\cos t}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{24\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\sqrt{7-\cos 2t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{\cos 2t=u}{=} \frac{1}{48\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\sqrt{7-u}\,\mathrm{d}u = \frac{8-3\sqrt{3}}{36}. \end{aligned}$$

Abscisa centrului de greutate este

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{3}\cos^2 t\cdot\frac{1}{2}\sin t\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{u=\cos t}{=} \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^1 u^2\sqrt{4-u^2}\,\mathrm{d}u \\ &\overset{u=2\sin t}{=} \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 16\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 4\sin^2 2t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{9+8\sqrt{3}}{37}\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2(1-\cos 4t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi(9+8\sqrt{3})}{37}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right). \end{aligned}$$

Ordonata centrului de greutate se calculează la fel

$$\begin{aligned}
y_G &= \frac{1}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{3}}\cos t\cdot\frac{1}{4}\sin^2 t\cdot\sqrt{\frac{1}{3}\sin^2 t+\frac{1}{4}\cos^2 t}\,\mathrm{d}t\\
&\overset{u=\sin t}{=} \frac{3(8+3\sqrt{3})}{74}\int_0^1 u^2\sqrt{3+u^2}\,\mathrm{d}u\\
&\overset{u=\sqrt{3}\operatorname{tg} t}{=} \frac{27(8+3\sqrt{3})}{74}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}\,\mathrm{d}t\\
&\overset{u=\sin t}{=} \frac{27(8+3\sqrt{3})}{74}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u^2}{(1-u^2)^3}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Desfăcând în fracţii simple expresia de sub integrală

$$\frac{u^2}{(1-u^2)^3}=\frac{A}{1-u}+\frac{B}{(1-u)^2}+\frac{C}{(1-u)^3}+\frac{D}{1+u}+\frac{E}{(1+u)^2}+\frac{F}{(1+u)^3},$$

cu coeficienţii $A=B=D=E=-\frac{1}{16}$ şi $C=F=\frac{1}{8}$, obţinem

$$y_G=\frac{27(8+3\sqrt{3})}{74}\cdot\frac{20-9\ln 3}{144}=\frac{3(8+3\sqrt{3})(20-9\ln 3)}{1184}.$$

Capitolul 4

Integrale duble

4.1 Noţiuni teoretice

Integrale duble pe domenii simple

Pentru calculul integralei duble se disting două tipuri de domenii de integrare.
a) Să presupunem că domeniul este simplu în raport cu axa OY. Un astfel de domeniu se defineşte după cum urmează: fie $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii continue, cu proprietatea că $g_1(x) \le g_2(x)$ pentru orice $x \in [a, b]$. Mulţimea

$$D = \{ (x, y) |\, a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

se numeşte *domeniu simplu faţă de axa* OY.

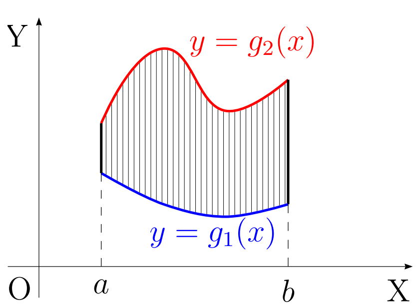


Figura 4.1: Domeniu simplu în raport cu axa OY

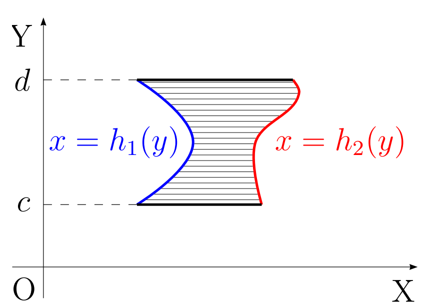


Figura 4.2: Domeniu simplu în raport cu axa OX

Teorema 4.1. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.1}$$

b) Să presupunem că domeniul este simplu în raport cu axa OX. Un astfel de domeniu se defineşte astfel: fie $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ funcţii continue. Mulţimea

$$D = \{(x,y) |\, c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

se numeşte *domeniu simplu faţă de axa* OX.

Teorema 4.2. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D, atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x. \tag{4.2}$$

Aplicaţii

1. Aria unui domeniu plan D se calculează cu formula

$$\mathcal{A}ria = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. Masa unei suprafeţe plane D cu densitatea punctuală ρ se calculează prin

$$M = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

3. Coordonatele centrului de greutate al unei suprafeţe plane D cu densitatea punctuală ρ se calculează cu ajutorul formulelor

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\cdot\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
$$y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\cdot\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde M este masa suprafeţei.

Schimbarea de variabile în integrala dublă

Uneori, pentru calculul integralei duble este necesară o schimbare de variabile. Aceasta se realizează printr-o transformare regulată $T : \Delta \to D$

$$T : \begin{cases} x = \varphi(u,v) \\ y = \psi(u,v) \end{cases}, (u,v) \in \Delta,$$

unde $\Delta, D \subseteq \mathbb{R}^2$ au frontiera netedă pe porţiuni şi funcţiile φ şi ψ sunt de clasă C^1 cu jacobianul

$$J(u,v) = \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \neq 0, \ \forall (u,v) \in \Delta.$$

Formula schimbării de variabile în integrala dublă este

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\left(\varphi(u,v), \psi(u,v)\right) \left| \frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

În cazul în care frontiera domeniului este cerc sau arc de cerc, este utilă folosirea coordonatelor polare ρ, φ. Se face schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

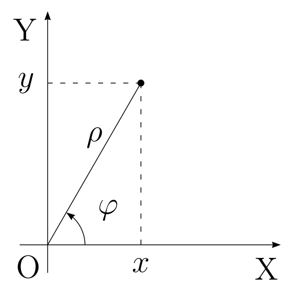


Figura 4.3: Coordonate polare

Formula lui Green

Fie $M \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu compact, simplu în raport cu ambele axe de coordonate. Dacă funcţiile $P, Q : M \to \mathbb{R}$ sunt continue şi admit derivate parţiale $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continue, atunci

$$\int_{\mathrm{fr}(M)} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_M \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde curba $\mathrm{fr}(M)$ este parcursă în sens trigonometric.

4.2 Exerciţii

4.1. Să se transforme integrala dublă $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ într-o integrală iterată, într-o ordine arbitrară, pentru următoarele domenii:

a) $D = \left\{ (x,y) | \, y^2 \le x, \ y \ge \dfrac{x}{2} \right\}.$

b) D este $\Delta\ ABC$, cu vârfurile de coordonate: $A(0,-2),\ B(2,0),\ C(0,1)$.

c) D este $\Delta\ ABC$, cu vârfurile de coordonate: $A(0,-2),\ B(3,1),\ C(0,2)$.

d) D este $\Delta\ ABC$, cu vârfurile de coordonate: $A(-1,0),\ B(2,-1),\ C(0,1)$.

e) $D = \left\{ (x,y) | \, \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1, \ x^2 + y^2 \ge 1, \ x \le 0 \right\}.$

f) $D = \left\{ (x,y) | \, y^2 \le 2x, \ 4 \le x + y \le 12 \right\}.$

g) $D = \left\{ (x,y) | \, x^2 + y^2 \le 2, \ y \le x^2, \ y \ge -x^2 \right\}.$

Să se calculeze integralele următoare pe domeniile indicate.

4.2. $\displaystyle\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \{ (x,y) | \, x^2 + y^2 \le 2a^2, \ x^2 \le ay, \ a > 0 \}$.

4.3. $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, D fiind limitat de $x = y^2, \ x = 0, \ y = 1$.

4.4. $\displaystyle\iint_D (1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \{ (x,y) | \, x^2 + y^2 \le 2y, \ y \le x^2, \ x \ge 0 \}$.

4.5. $\displaystyle\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \{ (x,y) | \, y \ge x^2, \ 2x - y + 3 \ge 0, \ x - 2y + 6 \ge 0 \}$.

4.6. $\displaystyle\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = \{ (x,y) | \, x^2 + y^2 \le 2y, \ y \le 2x \}$.

4.7. $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+1}$, unde D este domeniul plan mărginit de parabola $y = x^2$ şi dreptele $y = 2|x| - 1$.

4.8. $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \left\{ (x,y) | \, x^2 \le y, \ y \ge 2x, \ x + 2 \ge y \right\}$.

4.9. $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+3}$, $\quad D = \{(x,y) | \, 0 \leq y \leq \ 4 - x^2, \ y \leq 4 + 2x, \ y \leq 6 - 3x\}$.

4.10. Să se treacă de la coordonate carteziene la coordonate polare, în integrala dublă $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, pentru următoarele domenii:

a) $D = \left\{ (x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2, \, y + x\sqrt{3} \geq 0, \, y \geq 0 \right\}$

b) $D = \{ (x,y) \,|\, x^2 + y^2 \leq a^2, \, -x \leq y \leq x, \, x \geq 0 \}$

c) $D = \left\{ (x,y) \,|\, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \, 0 \leq x \leq y \leq x\sqrt{3} \right\}$

d) $D = \{ (x,y) \,|\, a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2, \, y \geq x, \, y \geq 0 \}$.

4.11. Să se calculeze

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \text{unde } D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \, 0 \leq x \leq y \right\}.$$

4.12. Să se calculeze

$$\iint_D \frac{y\ln(x^2+y^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \ \text{unde } D: \ 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2, \ 2x \leq y \leq x \leq 0.$$

4.13. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D: \ x^2 + y^2 \leq 2ay$, $a > 0$.

4.14. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D: \ x^2 + y^2 \leq 2ay$, $a > 0$.

4.15. Calculaţi $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, cu $D: \ 2y \leq x^2 + y^2 \leq 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0$.

4.16. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul plan descris prin $D = \{ (x,y) \,|\, (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \, x^2 + (y-1)^2 \geq 1, \, x \geq 0, \, y \geq 0 \}$.

4.17. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D 2x(2x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul plan care verifică inegalităţile $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$, $x \geq 0$.

4.18. Să se demonstreze că aria unei elipse de semiaxe a şi b este πab.

4.19. Să se calculeze
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
unde $D = \{\,(x,y) \in [0,R]\times[0,R] \mid x^2+y^2 \geq R^2\,\}$, cu $R > 0$.

4.20. Calculaţi
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \qquad D : \begin{cases} x^2+y^2 \geq \dfrac{1}{4}, \\ x^2+y^2-x \leq 0. \end{cases}$$

4.21. Calculaţi $\displaystyle\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D:\ x^2+y^2 \geq 1,\ 0 \leq y \leq x \leq 1$.

4.22. Calculaţi $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este trapezul cu vârfurile $A(2,0)$, $B(4,0)$, $C(2,2)$ şi $D(1,1)$.

4.23. Calculaţi $\displaystyle\iint_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D:\ \dfrac{1}{a} \leq x+y \leq a,\ \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{y}{x} \leq b,\ a,b > 1$.

4.24. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este interiorul triunghiului cu vârfurile de coordonate $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

4.25. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D : |x|+|y| \leq 1$.

4.26. Să se calculeze
$$\iint_D \frac{e^{x+y}}{(2x+y-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \text{unde } D : \begin{cases} 2 \leq x+y \leq 3, \\ -2 \leq 2x+y \leq 0. \end{cases}$$

4.27. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul din primul cadran mărginit de curbele $xy=1$, $xy=3$, $y=x$ şi $y=2x$.

Folosind formula lui Green, să se calculeze:

4.28. $\displaystyle\int_C \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, unde C este frontiera domeniului

$$D = \left\{ (x,y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1,\ x \geq 0 \right\},$$

parcursă în sens trigonometric.

4.29. $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x + (x+y)^2\,\mathrm{d}y$, unde C este triunghiul cu vârfurile $A(1,1)$, $B(2,2)$ şi $C(1,3)$, parcurs în sens trigonometric.

4.30. $\displaystyle\int_C (y^2 - y + 3xy + x^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + x + 3xy - y^3)\,\mathrm{d}y$, unde C este frontiera domeniului plan

$$D = \left\{ (x,y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\},\ a > 0,\ b > 0,$$

parcursă în sens trigonometric.

4.31. $\displaystyle\int_C (xy + y^2)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, unde C este frontiera domeniului mărginit de curbele $y = x^2$ şi $y = x$, parcursă în sens trigonometric.

4.32. $\displaystyle\int_C (x - y^2)\,\mathrm{d}x + 2xy\,\mathrm{d}y$, unde C este frontiera domeniului

$$D = \left\{ (x,y) \mid 9x^2 + y^2 \leq 1,\ y^2 \geq 8x \right\},$$

parcursă în sens trigonometric.

4.3 Soluţii

Soluţie 4.1. a). Dreapta şi parabola se intersectează în originea axelor de coordonate şi în punctul $A(4,2)$, vezi Figura 4.4. Domeniul este simplu în

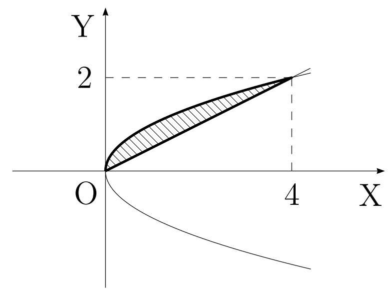


Figura 4.4: Domeniul definit de $y^2 \leq x$ şi $2y \geq x$

raport cu ambele axe de coordonate. Dacă aplicăm formula (4.1), atunci avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Dacă aplicăm (4.2), atunci putem scrie

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

b). Ecuaţiile dreptelor care mărginesc domeniul sunt:

$$AB: \; x - y = 2, \quad BC: \; x + 2y = 2, \quad AC: \; x = 0 \qquad \text{(vezi Figura 4.5)}$$

Conform relaţiei (4.1), avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{1-\frac{x}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Dacă aplicăm relaţia (4.2), avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^0 \mathrm{d}y \int_0^{2+y} f(x,y) + \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{2-2y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

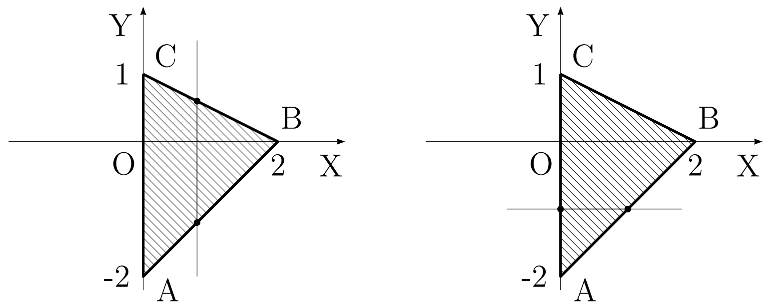


Figura 4.5: Triunghiul ABC - domeniu simplu în raport cu ambele axe

c). Ecuaţiile dreptelor care mărginesc domeniul sunt:

$$AB:\ x-y=2,\quad BC:\ x+3y=6,\quad AC:\ x=0 \qquad \text{(vezi Figura 4.6)}$$

Avem

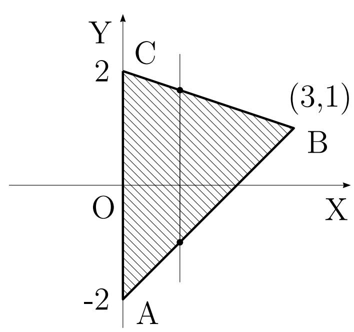


Figura 4.6: Triunghiul ABC - domeniu simplu în raport cu axa OY

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \mathrm{d}x \int_{x-2}^{\frac{6-x}{3}} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

sau

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{1} \mathrm{d}y \int_0^{2+y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{6-3y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

d). Ecuaţiile dreptelor care mărginesc domeniul sunt:

$$AB:\ x+3y+1=0,\quad AC:\ -x+y=1,\quad BC:\ x+y=1 \quad \text{(vezi Figura 4.7)}$$

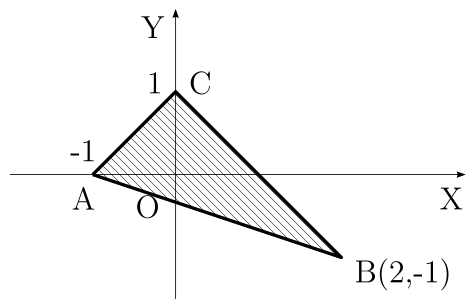


Figura 4.7: Triunghiul ABC - domeniu simplu în raport cu axa OY

Avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{3}}^{1+x} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{0}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{1-x}{3}}^{1-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

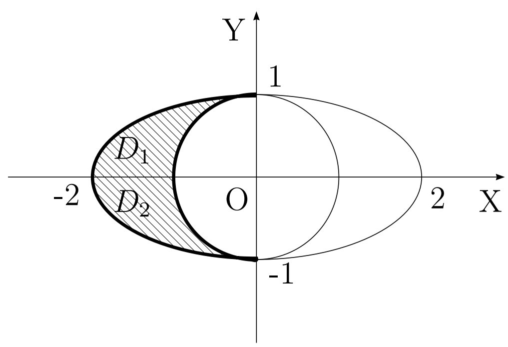
sau

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{-3y-1}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y-1}^{1-y} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

e). Domeniul este simplu în raport cu axa Ox. Aplicînd relaţia (4.2), avem

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-4y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Domeniul nu este simplu în raport cu axa Oy. Pentru a integra în ordinea



y, x, considerăm $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 şi D_2 sunt simple în raport cu axele de coordonate. Avem

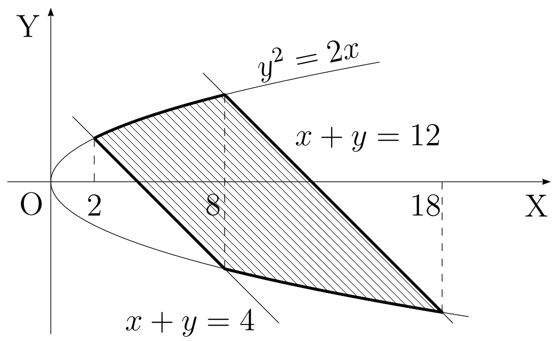
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde

$$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-2}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{0} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

f). Avem



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_2^8\mathrm{d}x\int_{4-x}^{\sqrt{2x}} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_8^{18}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

g). Vezi Figura 4.8. Putem scrie

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\sqrt{2}}^{-1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\\ + \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\\ + \int_{1}^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

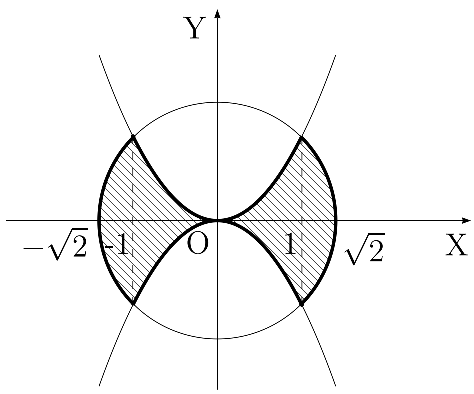


Figura 4.8: Problema 4.1 g)

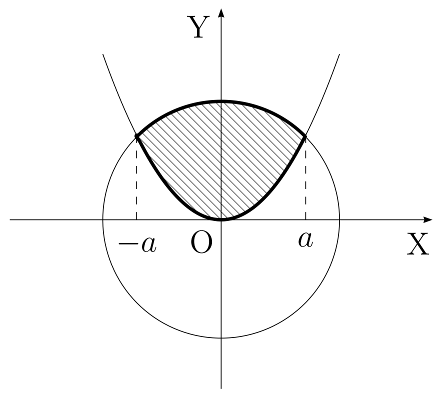


Figura 4.9: Problema 4.2

Soluţie 4.2. Domeniul este reprezentat grafic în Figura 4.9.

$$\begin{aligned}&\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &\quad = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}}(x+y)\,\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\left(x\,y\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}} + \frac{1}{2}y^2\Big|_{\frac{x^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2}}\right)\\ &\quad = \underbrace{\int_{-a}^{a} x\left(\sqrt{2a^2-x^2}-\frac{x^2}{a}\right)\,\mathrm{d}x}_{=0} + \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(2a^2-x^2-\frac{x^4}{a^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{22}{15}a^3.\end{aligned}$$

Soluţie 4.3. Domeniul D este reprezentat în Figura 4.10.

$$\begin{aligned}\iint_D e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}y\left[y\,e^{\frac{x}{y}}\Big|_0^{y^2}\right]\\ &= \int_0^1 y\left(e^y-1\right)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 ye^y\,\mathrm{d}y - \int_0^1 y\,\mathrm{d}y\\ &= y\,e^y\Big|_0^1 - e^y\Big|_0^1 - \frac{1}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

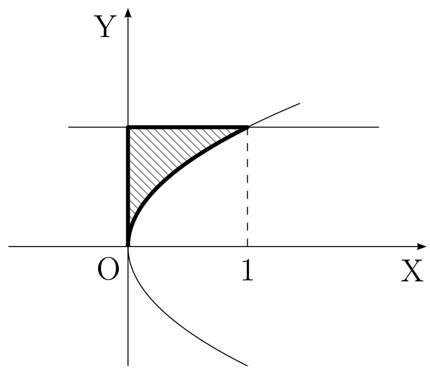


Figura 4.10: Problema 4.3

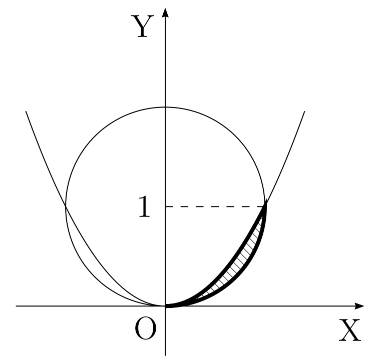


Figura 4.11: Problema 4.4

Soluţie 4.4. Domeniul D din problemă este fâşia haşurată din Figura 4.11. Inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 2y$ reprezintă interiorul cercului $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Integrala dublă se calculează astfel:

$$\begin{aligned}\iint_D (1-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^1 (1-y)\,\mathrm{d}y \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-y)\left[\sqrt{1-(y-1)^2} - \sqrt{y}\right] \mathrm{d}y = \\ &= \int_0^1 (1-y)\sqrt{1-(y-1)^2}\,\mathrm{d}y - \int_0^1 (1-y)\sqrt{y}\,\mathrm{d}y = I_1 - I_2.\end{aligned}$$

Pentru calculul lui I_1, notăm $1-y=u$ şi avem

$$I_1 = \int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-u^2}(-2u\,\mathrm{d}u) = -\frac{1}{3}(1-u^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$I_2 = \int_0^1 (\sqrt{y} - y\sqrt{y})\,\mathrm{d}y = \frac{4}{15}.$$

Rezultă $I = \frac{1}{3} - \frac{4}{15} = \frac{1}{15}$.

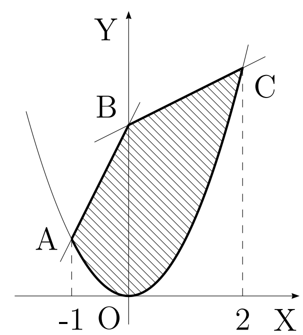
Soluţie 4.5. Intersectăm dreptele

$$AB\colon 2x - y + 3 = 0$$

şi

$$BC\colon x - 2y + 6 = 0$$

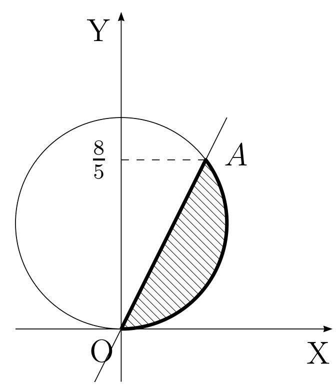
cu parabola $y = x^2$ şi obţinem punctele $A(-1,1)$ şi $C(2,4)$.



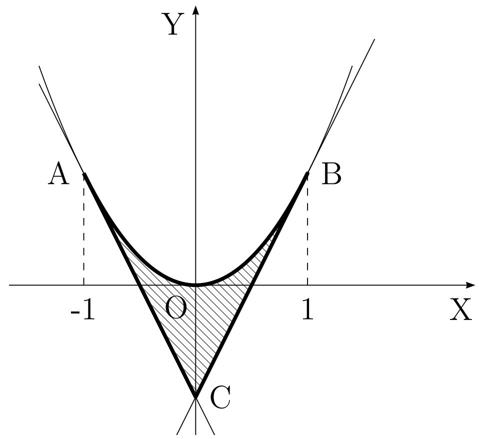
$$\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x \int_{x^2}^{2x+3} \mathrm{d}y + \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \int_{x^2}^{\frac{x+6}{2}} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^{0} x(2x+3-x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^2 x\left(\frac{x}{2}+3-x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{33}{12}.$$

Soluţie 4.6. Dreapta intersectează cercul $x^2 + (y-1)^2 = 1$ în punctul $A\left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$. Avem

$$\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{8}{5}} y^2\,\mathrm{d}y \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{8}{5}} y^2\,\mathrm{d}y x^2\Big|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{2y-y^2}}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{8}{5}} y^2\left(2y - y^2 - \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y$$
$$= \frac{2^{10}}{5^5}.$$



Soluţie 4.7. Dreptele $AC\colon y = -2x-1$ şi $BC\colon y = 2x - 1$ sunt tangente parabolei $y = x^2$ respectiv în punctele $A(-1,1)$, $B(1,1)$. Avem



$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+1} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \int_{-2x-1}^{x^2} \mathrm{d}y + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+1} \int_{2x-1}^{x^2} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}(x^2+2x+1) + \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}(x^2-2x+1)$$
$$= \int_{-1}^{0} (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} \left(x - 3 + \frac{4}{x+1}\right) \mathrm{d}x = -2 + 4\ln 2.$$

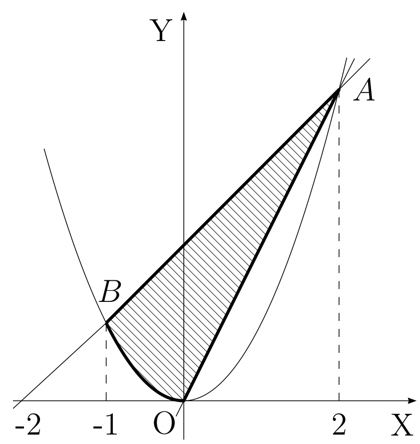
Soluţie 4.8. Intersectăm parabola $y = x^2$ cu cele două drepte date. Din sistemul

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x, \end{cases}$$

rezultă $O(0,0)$ şi $A(2,4)$. Din

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x+2, \end{cases}$$

rezultă $B(-1,1)$ şi $A(2,4)$. Domeniul D este reprezentat alături, unde $AB\colon x + 2 = y$ şi $OA\colon y = 2x$. Integrala dublă va



fi

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x \int_{x^2}^{x+2} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y + \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \int_{2x}^{x+2} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x \left(\frac{-1}{y}\Big|_{x^2}^{x+2} \right) + \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x \left(\frac{-1}{y}\Big|_{2x}^{x+2} \right)$$
$$= \int_{-1}^{0} x^2 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x^2} \right) \mathrm{d}x + \int_0^2 x^2 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{2x} \right) \mathrm{d}x.$$

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{-1}^{2} \frac{x^2}{x+2}\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{-1}^{2} \left(x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{13}{2} - 8\ln 2.$$

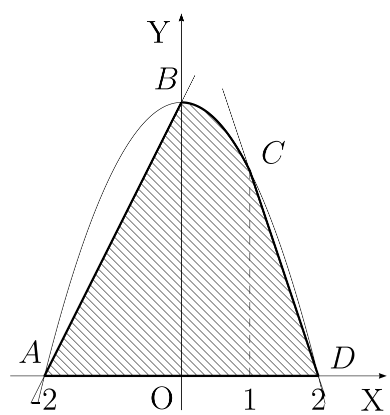
Soluţie 4.9. Intersectăm parabola $y = 4 - x^2$ cu cele două drepte date. Din sistemul

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 4 + 2x, \end{cases}$$

rezultă $B(0,4)$ şi $A(-2,0)$. Din

$$\begin{cases} y = 4 - x^2, \\ y = 6 - 3x, \end{cases}$$

rezultă $C(1,3)$ şi $D(2,0)$. Domeniul D este reprezentat alături, unde $AB\colon y = 4 + 2x$ şi $CD\colon y = 6 - 3x$. Avem de calculat



$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+3} = \int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \int_0^{4+2x} \mathrm{d}y + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \int_0^{4-x^2} \mathrm{d}y + \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x+3} \int_0^{6-3x} \mathrm{d}y$$
$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

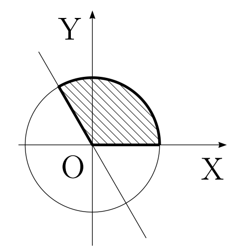
Calculăm separat cele trei integrale.

$$I_1 = \int_{-2}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x+3}\, y\Big|_0^{4+2x} = \int_{-2}^{0} \frac{4+2x}{x+3}\,\mathrm{d}x = 4 - 2\ln 3.$$

$$I_2 = \int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x+3}\, y\Big|_0^{4-x^2} = \int_{0}^{1} \frac{4-x^2}{x+3}\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(x - 3 + \frac{5}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{2} - 5\ln\frac{4}{3}.$$

$$I_3 = \int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x+3}\, y\Big|_0^{6-3x} = 3\int_{1}^{2} \frac{2-x}{x+3}\,\mathrm{d}x = -3\int_1^2 \left(1 - \frac{5}{x+3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= -3 + 15\ln\frac{5}{3}.$$

Soluţie 4.10. a) Domeniul este reprezentat alături. După schimbarea de variabile, noul domeniu va fi

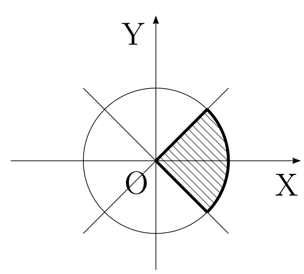


$$\Delta = \left\{ (\rho,\varphi) \,|\, 0 \le \rho \le a,\ 0 \le \varphi \le \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

Integrala dublă devine

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \iint_\Delta f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_0^a f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

b) Noul domeniu este $\Delta = \left\{ (\rho,\varphi) \,|\, 0 \le \rho \le a,\ -\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \right\}$. Integrala



dublă devine

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^a f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho.$$

c) Domeniul este reprezentat în Figura 4.12. Noul domeniu este

$$\Delta : \begin{cases} \rho \in [a,b] \\ \varphi \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]. \end{cases}$$

Integrala devine

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho.$$

d) Domeniul este reprezentat în Figura 4.13. Noul domeniu este

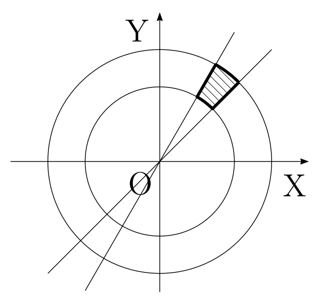


Figura 4.12: Domeniul de la c)

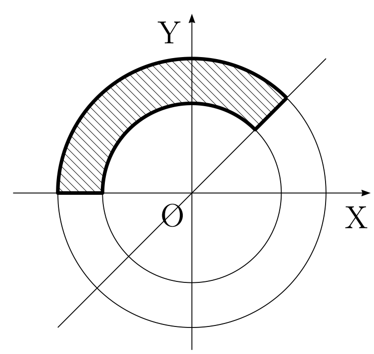


Figura 4.13: Domeniul de la d)

$$\Delta = \left\{(\rho,\varphi) \,|\, \rho \in [a,b],\ \varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]\right\}.$$

Integrala

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \mathrm{d}\varphi \int_a^b f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\rho.$$

Soluţie 4.11. Domeniul D este reprezentat în Figura 4.14. Noul domeniu este $\Delta = \left\{ (\rho, \varphi) \,|\, 1 \le \rho \le 2,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

$$\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta e^\rho \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int_1^2 \rho e^\rho \,\mathrm{d}\rho \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\rho e^\rho \big|_1^2 - \int_1^2 e^\rho \,\mathrm{d}\rho \right) = \frac{\pi}{4} \left(2e^2 - e - e^\rho \Big|_1^2 \right) = \frac{e^2 \pi}{4}.$$

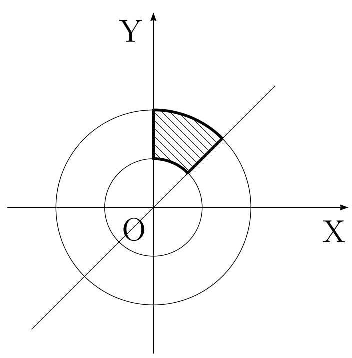


Figura 4.14: Problema 4.11.

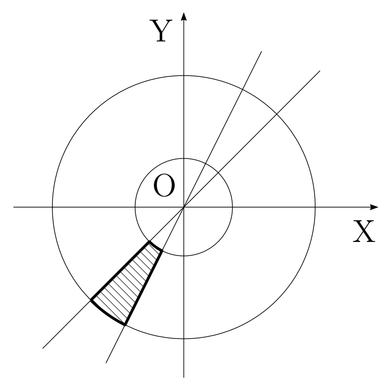


Figura 4.15: Problema 4.12.

Soluţie 4.12. Domeniul D este reprezentat în Figura 4.15. Noul domeniu este $\Delta = \{ (\rho, \varphi) \,|\, 1 \le \rho \le e,\ 5\pi/4 \le \varphi \le \pi + \operatorname{arctg} 2 \}$.

$$\iint_D \frac{y \ln(x^2+y^2)}{x^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \frac{\rho \sin\varphi \ln(\rho^2)}{\rho^2 \cos^2\varphi} \rho \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \left(\int_{\frac{5\pi}{4}}^{\pi + \operatorname{arctg} 2} \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \,\mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int_1^e 2 \ln\rho \,\mathrm{d}\rho \right)$$

$$= 2 \left(\rho \ln\rho \big|_1^e - \int_1^e \mathrm{d}\rho \right) \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \Bigg|_{\frac{5\pi}{4}}^{\pi + \operatorname{arctg} 2}$$

$$= 2\left[e - (e-1) \right] \cdot \left(\frac{1}{\cos(\pi + \operatorname{arctg} 2)} - \frac{1}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)} \right).$$

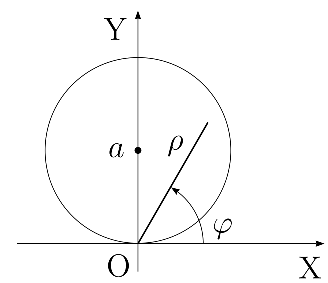
Întrucât $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ şi

$$\cos(\pi + \operatorname{arctg} 2) = -\cos(\operatorname{arctg} 2) = -\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2) + 1}} = -\frac{1}{\sqrt{5}},$$

valoarea integralei va fi $2(-\sqrt{5} + \sqrt{2})$.

Soluţie 4.13. Inegalitatea $x^2+y^2 \leq 2ay$ se rescrie $x^2+(y-a)^2 \leq a^2$, ceea ce ne arată că D este discul cu centrul în $(0,a)$ şi rază a. Trecem la coordonate polare.

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$



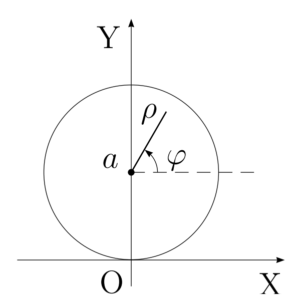
Inegalitatea $x^2 + y^2 \leq 2ay$ se transformă în $\rho^2 \leq 2a\rho\sin\varphi$. Pentru că $\rho \geq 0$, va rezulta $0 \leq \rho \leq 2a\sin\varphi$. Pentru că $\sin\varphi \geq 0$, rezultă $\varphi \in [0, \pi]$. Noul domeniu este

$$\Delta : \begin{cases} 0 \leq \rho \leq 2a\sin\varphi, \\ 0 \leq \varphi \leq \pi. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Delta \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2a\sin\varphi} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{8a^3}{3}\int_0^\pi \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{8a^3}{3}\int_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{8a^3}{3}\left(-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\right)\Big|_0^\pi = \frac{32a^3}{9}.\end{aligned}$$

Soluţie 4.14. La fel ca şi în problema anterioară D este discul cu centrul în $(0,a)$ şi rază a. Trecem la coordonate polare cu polul în $(0,a)$. Schimbarea de variabile este

$$T : \begin{cases} x &= \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y - a &= \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$



Atunci noul domeniu este

$$\Delta : \begin{cases} \rho \in [0, a], \\ \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Integrala devine

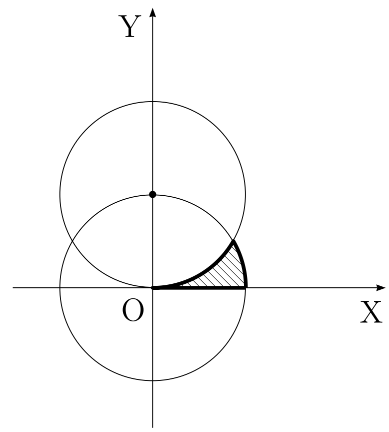
$$\begin{aligned}\iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Delta (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + a)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \left[\rho^2(\cos\varphi + \sin\varphi) + a\rho\right] \mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi) + a\cdot\frac{a^2}{2}\right] \mathrm{d}\varphi = \pi a^3.\end{aligned}$$

Soluţie 4.15. Facem schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x &= \rho\cos\varphi, \quad \rho \ge 0 \\ y &= \rho\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$

Din inegalitatea $x^2 + y^2 \ge 2y$ se obţine $\rho \ge 2\sin\varphi$, iar din $x^2 + y^2 \le 1$, deducem $\rho \le 1$. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$



obţinem $y = \frac{1}{2}$ şi $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ceea ce corespunde unghiului $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Noul domeniu este

$$\Delta : \begin{cases} 2\sin\varphi \le \rho \le 1, \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

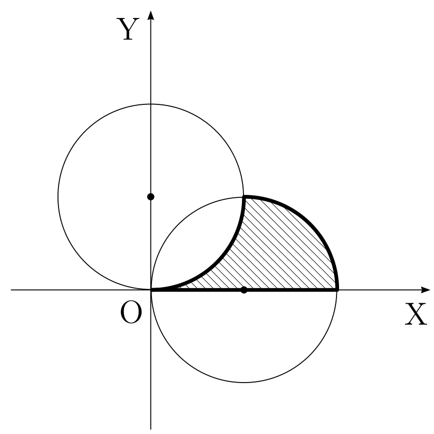
Atunci, integrala dublă se calculează astfel

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Delta \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_{2\sin\varphi}^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \cdot \frac{1}{3}\rho^3\Big|_{2\sin\varphi}^1 = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - 8\sin^3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

Avem

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{18} - \frac{8}{3}\left[-\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{6}}\right]$$
$$= \frac{\pi}{18} - \frac{8}{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{\pi}{18} - \frac{16}{9} + \sqrt{3}.$$

Soluţie 4.16. Frontiera domeniului este formată din arce de cerc, cu centrul în punctele $(1,0)$ şi $(0,1)$. Inegalitatea $(x-1)^2+y^2 \le 1$ este echivalentă cu inegalitatea $x^2+y^2-2x \le 0$. Trecând la coordonate polare ea devine $\rho \le 2\cos\varphi$. Inegalitatea $x^2+(y-1)^2 \ge 1$ este echivalentă cu $x^2+y^2-2y \ge 0$ şi după schimbarea de variabile ea devine $\rho \ge 2\sin\varphi$. Rezolvând sistemul



$$\begin{cases} x^2+y^2-2x=0 \\ x^2+y^2-2y=0 \end{cases}$$

obţinem $x=y$, ceea ce corespunde unghiului $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Ecuaţiile noului domeniu sunt

$$\Delta : \begin{cases} 2\sin\varphi \le \rho \le 2\cos\varphi, \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Integrala dublă devine

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \rho^2\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_{2\sin\varphi}^{2\cos\varphi} \rho^2\,\mathrm{d}\rho$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \cdot \frac{1}{3}\rho^3\Big|_{2\sin\varphi}^{2\cos\varphi} = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^3\varphi - \sin^3\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi - \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

Avem

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\left[\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}\sin^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\right]$$
$$= \frac{8}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - \frac{1}{3}\left(\frac{2\sqrt{2}}{8} - 1\right)\right]$$
$$= \frac{8}{3}\left(\sqrt{2} - \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}\left(5\sqrt{2}-4\right).$$

Soluţie 4.17. Trecem la coordonate polare generalizate

$$T : \begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, \\ y = b\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi \\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi \end{vmatrix} = ab\rho.$$

Noul domeniu va fi

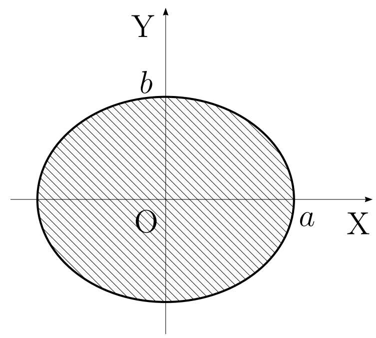
$$\Delta : \begin{cases} \rho \in [0,1], \\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Atunci

$$\iint_D 2x\left(2x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta 2a\rho\cos\varphi(2a^2\rho^2\cos^2\varphi + b^2\rho^2\sin^2\varphi)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2a^2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi(2a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^4\,\mathrm{d}\rho$$
$$= \frac{2a^2b}{5}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi[2a^2(1-\sin^2\varphi) + b^2\sin^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4a^2b}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2a^2\cos\varphi + (b^2-2a^2)\sin^2\varphi\cos\varphi]\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \frac{4a^2b}{5}\left[2a^2\sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3}(b^2-2a^2)\sin^3\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$
$$= \frac{4a^2b}{5}\left[2a^2 + \frac{1}{3}(b^2-2a^2)\right] = \frac{4}{15}a^2b(4a^2+b^2).$$

Soluţie 4.18. Ecuaţia elipsei de semiaxe a şi b cu centrul în originea axelor de coordonate este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Avem de calculat aria domeniului

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}.$$



Aria va fi egală cu $\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Trecând la coordonate polare generalizate

$$T:\begin{cases} x &= a\rho\cos\varphi,\\ y &= b\rho\sin\varphi,\end{cases}$$

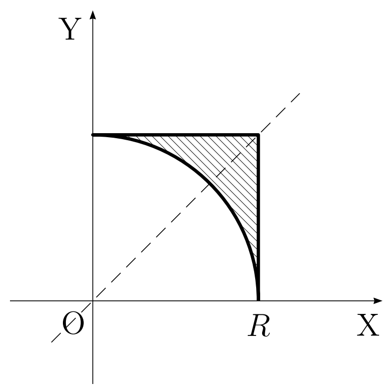
obţinem $\Delta:\ \rho\in[0,1],\ \varphi\in[0,2\pi]$ şi

$$\mathcal{A}_{\text{elipsă}}=\iint_\Delta\left|\frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)}\right|\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi=\int_0^1 ab\rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=2\pi ab\left.\frac{\rho^2}{2}\right|_0^1=\pi ab.$$

Soluţie 4.19. Trecem la coordonate polare. Din inegalitatea $x^2+y^2\geq R^2$ se obţine $\rho\geq R$. Dacă $x=R$, atunci avem $\rho\cos\varphi=R$, adică $\rho=\frac{R}{\cos\varphi}$. Iar dacă $y=R$, atunci $\rho\sin\varphi=R$, adică $\rho=\frac{R}{\sin\varphi}$. Obţinem

$$\Delta_1:\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4},\quad R\leq\rho\leq\frac{R}{\cos\varphi},$$

$$\Delta_2:\quad \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2},\quad R\leq\rho\leq\frac{R}{\sin\varphi}.$$



Integrala devine

$$\iint_D\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\iint_{\Delta_1\cup\Delta_2}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\rho}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_R^{\frac{R}{\cos\varphi}}\mathrm{d}\rho+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_R^{\frac{R}{\sin\varphi}}\mathrm{d}\rho$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\left(\frac{R}{\cos\varphi}-R\right)+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\left(\frac{R}{\sin\varphi}-R\right)$$

Făcând schimbarea de variabilă $\varphi = \frac{\pi}{2} - t$ în prima din cele două integrale obţinem

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t\left(\frac{R}{\sin t} - R\right) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\left(\frac{R}{\sin\varphi} - R\right)$$
$$= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi\left(\frac{R}{\sin\varphi} - R\right) = -R\cdot\frac{\pi}{2} + R\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin\varphi}$$
$$= -R\cdot\frac{\pi}{2} + 2R\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -R\cdot\frac{\pi}{2} - 2R\ln\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Folosind formula

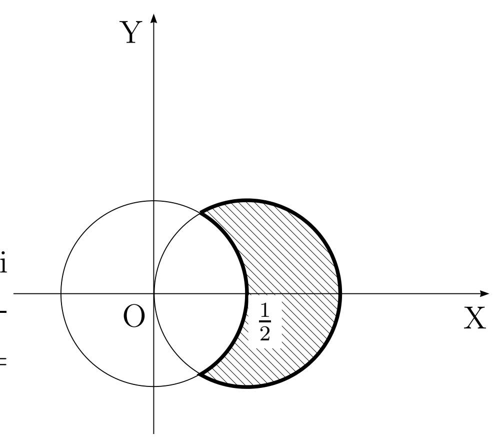
$$1 = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}},$$

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$ este soluţia pozitivă a ecuaţiei $1 = \frac{2x}{1-x^2}$, adică $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} = -1+\sqrt{2}$. Valoarea integralei va fi $-R\cdot\frac{\pi}{2} - 2R\ln(\sqrt{2}-1)$.

Soluţie 4.20. Ecuaţia $x^2+y^2-x=0$ se rescrie $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}$. Domeniul D este exteriorul cercului cu centrul în origine şi de rază $\dfrac{1}{2}$ intersectat cu interiorul cercului de centru $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right)$ şi rază $\dfrac{1}{2}$. Trecând la coordonate polare

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \end{cases}$$

cele două cercuri au ecuaţiile $\rho = \dfrac{1}{2}$ şi $\rho = \cos\varphi$. Cele două cercuri se intersectează pentru $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$, adică $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$. Noul domeniu este



$$\Delta : \begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3} \\ \frac{1}{2} \le \rho \le \cos\varphi. \end{cases}$$

Valoarea integralei duble va fi

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \iint_\Delta \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-\rho^2}} = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\varphi \int_{\frac{1}{2}}^{\cos\varphi} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} -\sqrt{1-\rho^2}\Big|_{\frac{1}{2}}^{\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\sin^2\varphi}\right) \mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - |\sin\varphi|\right) \mathrm{d}\varphi = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right)$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} - 1\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - 1.$$

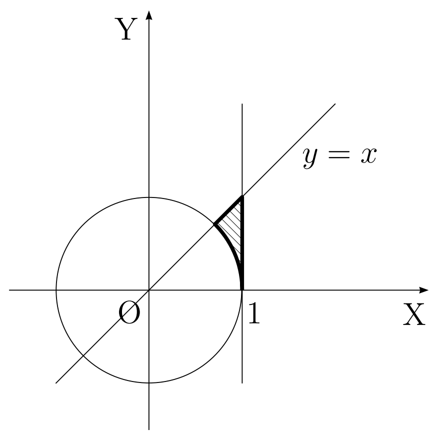


Figura 4.16: Problema 4.21.

Soluţie 4.21. În coordonate polare inegalitatea $x^2 + y^2 \geq 1$ se transcrie $\rho \geq 1$. Din condiţia $x \leq 1$, deducem că $\rho\cos\varphi \leq 1$ sau $\rho \leq \frac{1}{\cos\varphi}$. Condiţia $0 \leq y \leq x$ ne dă $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Cu acestea, integrala dublă se calculează astfel:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_1^{\frac{1}{\cos\varphi}} \mathrm{d}\rho.$$

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\varphi\left(\frac{1}{\cos\varphi} - 1\right) \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4} - \sin\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

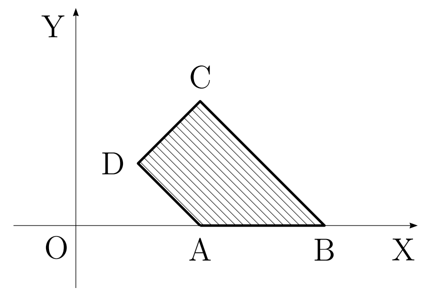
Soluţie 4.22. Scriem ecuaţiile dreptelor suport ale laturilor trapezului.

$$AB: \quad y = 0$$

$$BC: \quad x + y - 4 = 0$$

$$CD: \quad y = x$$

$$DA: \quad x + y - 2 = 0.$$



Domeniul delimitat de trapez este:

$D = \{ (x, y) \,|\, 0 \le y \le x, \; 2 \le x + y \le 4 \}$.

Notând

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = u \\ x + y = v \end{cases} \quad \text{rezultă} \quad \Delta: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 2 \le v \le 4. \end{cases}$$

Avem $x = \frac{v}{u+1}$ şi $y = \frac{uv}{u+1}$. Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{v}{(u+1)^2} & \frac{1}{u+1} \\ \frac{v}{(u+1)^2} & \frac{u}{u+1} \end{vmatrix} = \frac{-vu}{(u+1)^3} - \frac{v}{(u+1)^3} = \frac{-v}{(u+1)^2}.$$

Avem de calculat

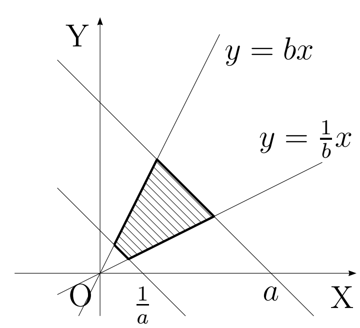
$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x+y} = \iint_\Delta \frac{1}{v} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_2^4 \mathrm{d}v \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2} = 2 \left. \frac{-1}{1+u} \right|_0^1 = 1.$$

Soluţie 4.23. Facem aceeaşi schimbare de variabile ca şi în problema de mai sus.

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = u \\ x + y = v, \end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases} x = \dfrac{v}{u+1}, \\ y = \dfrac{vu}{u+1}. \end{cases}$$



Noul domeniu este

$$\Delta : \begin{cases} \dfrac{1}{b} \leq u \leq b \\ \dfrac{1}{a} \leq v \leq a. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este: $\dfrac{-v}{(u+1)^2}$. Atunci, integrala dublă se calculează astfel:

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy} = \iint_\Delta \frac{(u+1)^2}{uv^2} \cdot \frac{v}{(u+1)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\frac{1}{b}}^{b} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u \int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{1}{v}\,\mathrm{d}v$$

$$= \ln u\Big|_{\frac{1}{b}}^{b} \cdot \ln v\Big|_{\frac{1}{a}}^{a} = \left(\ln b - \ln\frac{1}{b}\right)\left(\ln a - \ln\frac{1}{a}\right) = 2\ln b \cdot 2\ln a.$$

Soluţie 4.24. Pentru a obţine o formă mai simplă a funcţiei de integrat facem următoarea schimbare de variabile:

$$\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + y. \end{cases}$$

De aici rezultă că

$$\begin{cases} x = \frac{u+v}{2}, \\ y = \frac{v-u}{2}. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $\frac{1}{2}$. Domeniul D este reprezentat în Figura 4.17 şi verifică relaţiile

$$D \begin{cases} x + y \leq 1, \\ x \geq 0,\ y \geq 0. \end{cases}$$

Determinăm domeniul Δ:

$$x \geq 0 \implies u + v \geq 0$$

$$y \geq 0 \implies v - u \geq 0$$

$$x + y \leq 1 \implies v \leq 1.$$

Avem

$$\Delta\colon \begin{cases} u + v \geq 0, \\ v \geq u, \\ v \leq 1. \end{cases}$$

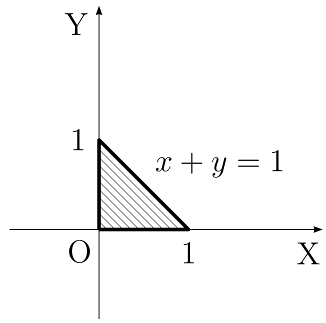


Figura 4.17: Domeniul D

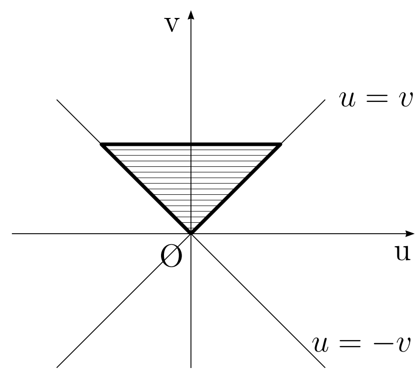


Figura 4.18: Domeniul Δ

Integrala dublă se calculează astfel:

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta e^{\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v \int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}v \cdot v e^{\frac{u}{v}}\Big|_{-v}^{v}$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v\,\mathrm{d}v(e - e^{-1}) = \frac{1}{2}(e - e^{-1}) \cdot \frac{v^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\left(e - \frac{1}{e}\right).$$

Soluţie 4.25. Explicitând modulele, domeniul D este intersecţia semiplanelor

$$x + y \leq 1, \quad -x + y \leq 1, \quad -x - y \leq 1, \quad x - y \leq 1.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u = x - y, \\ v = x + y. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este $1/2$. Atunci noul domeniu este mulţimea perechilor $(u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Integrala dublă va fi

$$\iint_D (x + y)e^{x^2 - y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta v e^{uv} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v\,\mathrm{d}v \int_{-1}^{1} e^{uv}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} v\,\mathrm{d}v\left(\frac{e^v}{v} - \frac{e^{-v}}{v}\right) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(e^v - e^{-v})\,\mathrm{d}v = 0.$$

Soluţie 4.26. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} u = x + y, \\ v = 2x + y - 1. \end{cases}$$

Atunci avem

$$\begin{cases} x = -u + v + 1, \\ y = 2u - v - 1. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este -1, iar noul domeniu se scrie

$$\Delta : \begin{cases} 2 \le u \le 3, \\ -3 \le v \le -1. \end{cases}$$

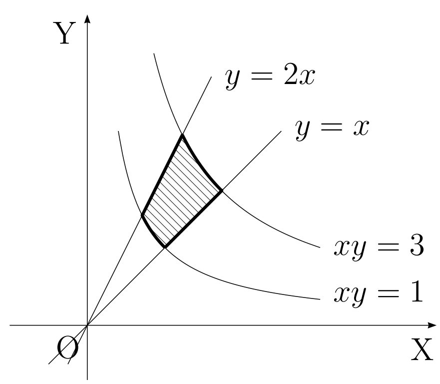
Integrala dublă se calculează astfel

$$\iint_D \frac{e^{x+y}}{(2x+y-1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta \frac{e^u}{v^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_2^3 e^u\,\mathrm{d}u \int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}v}{v^2} = e^u\Big|_2^3 \,\frac{-1}{v}\Big|_{-3}^{-1}$$

şi are valoarea $\dfrac{2}{3}(e^3 - e^2)$.

Soluţie 4.27. Facem schimbarea de variabile $\begin{cases} u = xy, \\ v = \frac{y}{x}. \end{cases}$ Noul domeniu este

$$\Delta : \begin{cases} u \in [1, 3], \\ v \in [1, 2]. \end{cases}$$



Avem

$$\Delta : \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

Jacobianul transformării este

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{2v}.$$

Integrala dublă are valoarea

$$\iint_D y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta uv \cdot \frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int_1^3 u\,\mathrm{d}u \int_1^2 \mathrm{d}v = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_1^3 \cdot 1 = 2.$$

Soluţie 4.28. Notând $P(x,y)=\sqrt{1-x^2}$ şi $Q(x,y)=x$, va rezulta relaţia $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$. Atunci, pe baza formulei lui Green, obţinem

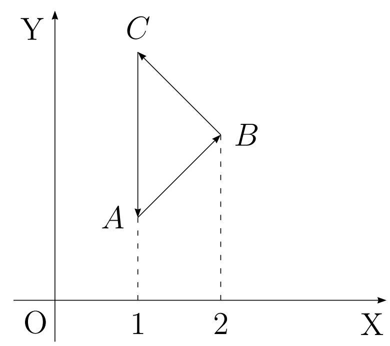
$$\int_C \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathcal{A}ria_D.$$

Dar D este semielipsa de semiaxe $a=1$ şi $b=2$. Aria este

$$\mathcal{A}ria_D = \frac{1}{2}\pi ab = \pi.$$

Soluţie 4.29. Scriind $P(x,y)=x^2+y^2$ şi $Q(x,y)=(x+y)^2$, obţinem

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x+y)-2y=2x.$$



Scriem ecuaţiile dreptelor

$$AB:\ y=x$$
$$BC:\ x+y-4=0.$$

Notând cu D mulţimea mărginită de triunghiul ABC, rezultă

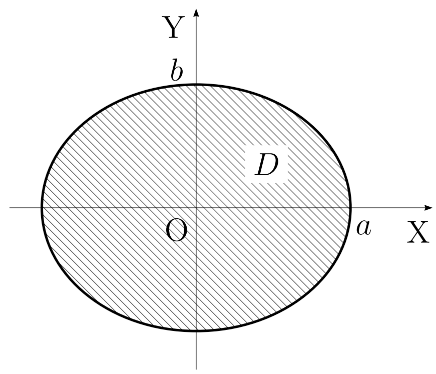
$$\int_C (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x+(x+y)^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 2x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_1^2 x\,\mathrm{d}x\int_x^{4-x}\mathrm{d}y$$
$$=2\int_1^2 x(4-2x)\,\mathrm{d}x = 8\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_1^2 - 4\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

Soluţie 4.30. Notând $P=y^2-y+3xy+x^2$ şi $Q=x^2+x+3xy-y^3$ avem

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2x+1+3y-2y+1-3x=y-x+2.$$

Folosind formula lui Green, avem de calculat integrala dublă

$$\iint_D (y - x + 2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



Trecând la coordonate polare generalizate:

$$x = a\rho\cos\varphi$$
$$y = b\rho\sin\varphi,$$

domeniul D se transformă în

$$\Delta : \quad (\rho, \varphi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi).$$

Obţinem

$$\begin{aligned}\iint_D (y - x + 2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_\Delta (b\rho\sin\varphi - a\rho\cos\varphi + 2)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\\ &= ab^2\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &\quad - a^2b\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 2ab\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\ &= 0 - 0 + 2ab\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2} = 2\pi ab.\end{aligned}$$

Soluţie 4.31. Notând $P = xy + y^2$ şi $Q = x^2$ avem $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x - 2y$.

$$\begin{aligned}\int_C (xy + y^2)\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y &= \iint_D (x - 2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(x - 2y)\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 (x^4 - x^3)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{20}.\end{aligned}$$

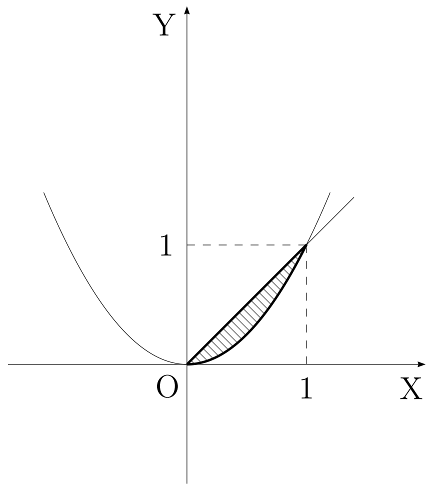


Figura 4.19: Problema 4.31.

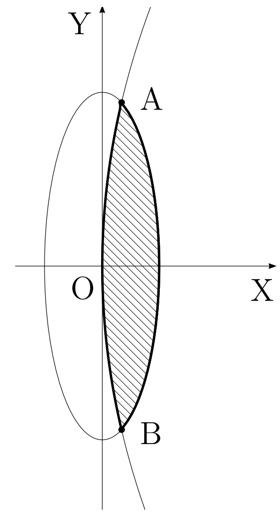


Figura 4.20: Problema 4.32.

Soluţie 4.32. Notând $P = x - y^2$ şi $Q = 2xy$ avem $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4y$. Coordonatele punctelor A şi B se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 9x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 = 8x. \end{cases}$$

Rezultă $A\left(\frac{1}{9}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ şi $B\left(\frac{1}{9}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Avem de calculat

$$\iint_D 4y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 4\int_{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} y \,\mathrm{d}y \int_{\frac{y^2}{8}}^{\frac{\sqrt{1-y^2}}{3}} \mathrm{d}x = 4\int_{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} y\left(\frac{\sqrt{1-y^2}}{3} - \frac{y^2}{8}\right) \mathrm{d}y = 0.$$

Capitolul 5

Integrale de volum

5.1 Noţiuni teoretice

Fie V un domeniu simplu faţă de axa OZ, adică un domeniu care are proprietatea că orice paralelă la axa OZ care are puncte comune cu interiorul lui V taie frontiera lui V în două puncte. O astfel de mulţime se descrie după cum urmează.
Se consideră $D \subset \mathbb{R}^2$ compactă, cu frontiera netedă pe porţiuni şi funcţiile $g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ continue, cu proprietatea

$$g_1(x,y) \leq g_2(x,y), \quad \text{pentru orice } (x,y) \in D.$$

Mulţimea

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\mid (x,y) \in D,\; g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\right\}$$

se numeşte *simplă în raport cu axa* OZ. Mulţimea D este proiecţia lui V pe planul XOY.
Pentru calculul integralei de volum pe domeniul V, se foloseşte

Teorema 5.1. Dacă $V \subset \mathbb{R}^3$ este o mulţime simplă faţă de axa OZ şi funcţia $f : V \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Observaţie 5.2. Se foloseşte notaţia:
$$\iint_D \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Uneori, pentru calculul integralei de volum este util să se facă o schimbare de variabile. Aceasta se realizează printr-o transformare regulată $T : \Omega \to V$,
$$T : \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \chi(u,v,w) \end{cases}, \quad (u,v,w) \in \Omega, \ \Omega \subseteq \mathbb{R}^3.$$
Aceasta înseamnă că funcţiile φ, ψ, χ sunt de clasă C^1 şi jacobianul
$$J(u,v,w) = \frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)} \neq 0, \quad \text{pentru orice } (u,v,w) \in \Omega.$$

În urma schimbării variabilelor se trece la integrală de volum pe domeniul Ω. Dacă $f : V \to \mathbb{R}$ este continuă, atunci
$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_\Omega f\left[\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w)\right] \cdot \left|\frac{D(\varphi,\psi,\chi)}{D(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$
În cazul în care frontiera lui V este sferică, se preferă trecerea la coordonatele sferice (ρ,θ,φ), care se realizează prin transformarea
$$T : \begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$
Pentru ca un punct $M(\rho,\theta,\varphi)$ să parcurgă $\mathbb{R}^3$, trebuie ca
$$\rho \in [0,\infty), \quad \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0,2\pi].$$
Jacobianul transformării este
$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \rho^2 \cdot \sin\theta.$$

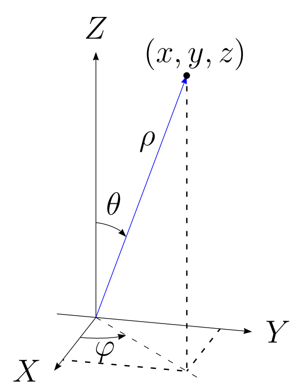


Figura 5.1: Coordonate sferice

Aplicaţii

1. Volumul unui corp tridimensional V se calculează prin

$$\mathcal{V}ol = \iiint_V dx\,dy\,dz.$$

2. Masa unui corp $V \subset \mathbb{R}^3$ cu densitatea în fiecare punct $\rho(x,y,z)$ este

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

3. Coordonatele centrului de greutate ale unui corp $V \subset \mathbb{R}^3$ cu densitatea punctuală $\rho(x,y,z)$ se calculează cu formulele

$$x_G = \frac{1}{M}\iiint_V x\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$y_G = \frac{1}{M}\iiint_V y\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$
$$z_G = \frac{1}{M}\iiint_V z\cdot\rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz,$$

unde M este masa corpului.

5.2 Exerciţii

5.1. Să se calculeze

$$\iiint_V (2z - y^2 + xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde V este paralelipipedul dreptunghic $[-1,1] \times [1,2] \times [0,3]$.

5.2. Să se calculeze masa corpului

$$V = \left\{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ 0 \le z \le c\,\right\}$$

având densitatea $\rho(x,y,z) = x + y + z$.

5.3. Să se calculeze

$$\iiint_V (x + 2y - z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde V este corpul limitat de planele $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 3$ şi $y + 2z = 4$.

5.4. Să se calculeze integrala

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3},$$

unde V e tetraedrul mărginit de planele de coordonate şi planul $x + y + z = 1$.

5.5. Să se calculeze volumul delimitat de suprafaţa

$$z = \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

şi planul XOY, situat în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 9$.

5.6. Să se calculeze

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde V este corpul definit de inegalităţile $x^2 + y^2 \le 5$, $x - y + 2z \le 7$ şi $z \ge 0$.

5.7. Să se calculeze volumul corpului limitat de paraboloidul $x^2+y^2=1-z$ şi planul XOY.

5.8. Să se calculeze volumul corpului delimitat de paraboloidul $x^2+y^2=4z$ şi planul $z=1$.

5.9. Să se afle volumul corpului V definit de inegalităţile

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2+z^2 & \leq & 4az \\ x^2+y^2+az & \leq & 4a^2 \end{array}\right., a>0.$$

5.10. Momentul de inerţie faţă de o dreaptă d al unui corp V cu densitatea $\rho(x,y,z)$ se defineşte prin

$$I_d=\iiint_V d^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde $d(x,y,z)$ este distanţa de la un punct (x,y,z) al corpului V la axa d. Să se calculeze momentul de inerţie faţă de axa OY al corpului omogen ($\rho=1$), mărginit de suprafeţele $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ şi $z=c$, unde $c>0$.

5.11. Să se calculeze volumul corpului mărginit de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ şi $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$.

5.12. Să se calculeze volumul corpului definit de

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^2+y^2 & \leq & 2y \\ x^2+y^2 & \geq & 3z \end{array}\right., z\geq 0.$$

5.13. Să se calculeze centrul de greutate pentru corpul omogen V

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2+z^2 & \leq & 2az \\ x^2+y^2 & \leq & z^2 \end{array}\right., a>0.$$

5.14. Să se calculeze volumul corpului decupat de cilindrul $x^2+y^2=ax$ din bila $x^2+y^2+z^2\leq a^2$.

5.15. Să se găsească volumul părţii comune delimitate de suprafeţele cilindrice $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ şi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

5.16. Să se afle volumul corpului delimitat de suprafaţa obţinută prin rotirea curbei $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, în jurul axei OX, şi planele $x = a$ şi $x = b$, unde f este o funcţie continuă şi pozitivă pe $[a, b]$. Ca şi aplicaţie, să se afle volumul corpului delimitat de suprafaţa $x^4 - x^3 + y^2 + z^2 = 0$.

5.17. Să se calculeze

$$\iiint_V \left[5(x-y)^2 + 3az\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad V:\ x^2 + y^2 \le az,\ x^2 + y^2 + z^2 \le 2a^2.$$

5.18. Să se calculeze volumul corpului

$$V = \left\{\,(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x^2 + y^2\,\right\}.$$

5.19. Să se calculeze $\iiint_V (4x+2y+5z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, unde V este paralelipipedul mărginit de planele

$$\begin{cases} z + 2x &= 0, \\ z + 2x &= -2, \\ 2x + 2y - z &= 0, \\ 2x + 2y - z &= 6, \\ z &= 0, \\ z &= 4. \end{cases}$$

5.20. Să se calculeze

$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad \text{unde } V : x^2 + y^2 + z^2 \le 2ax.$$

5.21. Să se calculeze volumul corpului mărginit de elipsoidul $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Să se calculeze în particular care este volumul Pământului, luând în acest caz $a = b = R_e = 6378.137$ km şi $c = R_p = 6356.7523$ km, conform WGS 84.

5.22. Să se calculeze

$$\iiint_V (x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde V este mulţimea

$$V = \left\{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 9,\ z \ge 0\,\right\}.$$

5.23. Să se calculeze
$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2},$$
unde V este domeniul spaţial cuprins între sferele concentrice de raze 1 şi 2 cu centrele în origine şi în interiorul conului $x^2+y^2=3z^2$, unde $z \geq 0$.

5.24. Se consideră V corpul din spaţiu care verifică $x^2+y^2+z^2 \leq 1$. Să se calculeze
$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}, \quad a>1.$$

5.25. Să se calculeze
$$\iiint_V (2x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
unde V este corpul mărginit de suprafaţa $(x-1)^2+(y+3)^2+z^2=4$.

5.26. Torul este suprafaţa obţinută prin rotaţia în spaţiu a unui cerc în jurul unei axe coplanare dar care nu atinge cercul. Dacă r este raza cercului şi R este distanţa de la centrul cercului la axa de rotaţie OZ atunci parametrizarea acestei suprafeţe este
$$\begin{cases} x=(R+r\cos v)\cos u \\ y=(R+r\cos v)\sin u \qquad u,v\in[0,2\pi]. \\ z=r\sin v \end{cases}$$
Să se calculeze volumul mărginit de suprafaţa torului.

5.27. Să se calculeze masa părţii comune a bilelor $x^2+y^2+z^2 \leq 9$ şi $x^2+y^2+z^2 \leq 4z$, dacă densitatea în fiecare punct este egală cu distanţa de la acest punct la centrul bilei mai mari.

5.28. Momentul de inerţie al unui corp V cu densitatea ρ faţă de un plan α se defineşte ca fiind
$$I_\alpha = \iiint_V d^2(x,y,z)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
unde $d(x,y,z)$ este distanţa faţă de plan a fiecărui punct din corp. Să se calculeze momentul de inerţie al octaedrului omogen $2|x|+3|y|+6|z| \leq 12$ faţă de planul XOY, dacă densitatea este 1.

5.3 Soluţii

Soluţie 5.1. Conform Teoremei 5.1, avem

$$\begin{aligned}\iiint_V (2z - y^2 + xz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^3 (2z - y^2 + xz)\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_D \left(9 - 3y^2 + \frac{9x}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_1^2 \left(9 - 3y^2 + \frac{9x}{2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 \left(2 + \frac{9x}{2}\right)\mathrm{d}x = 4.\end{aligned}$$

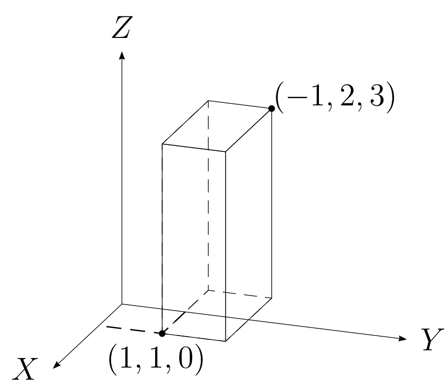


Figura 5.2: Problema 5.1

Soluţie 5.2. Masa corpului se calculează prin $M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. Corpul V este paralelipipedul dreptunghic $[0,a] \times [0,b] \times [0,c]$.

$$\begin{aligned}M &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c (x+y+z)\,\mathrm{d}z = \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \left(c(x+y) + \frac{c^2}{2}\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_0^a \left(bcx + \frac{cb^2}{2} + \frac{bc^2}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{abc(a+b+c)}{2}.\end{aligned}$$

Soluţie 5.3. Corpul V este corpul desenat în Figura 5.3. Proiecţia corpului pe planul XOY este dreptunghiul haşurat $D = [0,3] \times [0,4]$. Fixând pe $(x,y) \in D$, corpul se întinde pe verticală de la planul XOY la planul $y + 2z = 4$. Deci când $(x,y) \in D$, avem $0 \le z \le \frac{4-y}{2}$.

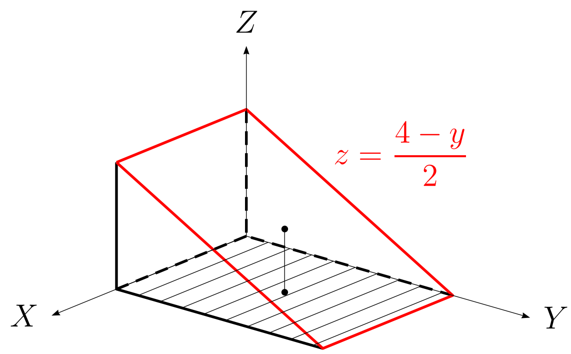


Figura 5.3: Corpul V

Integrala se calculează în felul următor

$$\begin{aligned}\iiint_V (x+2y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{\frac{4-y}{2}} (x+2y-z)\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{8}\iint_D \left[4(x+2y)(4-y) - (4-y)^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{8}\int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^4 (16x - 4xy - 9y^2 + 20y - 16)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^3 (4x-12)\,\mathrm{d}x = -18.\end{aligned}$$

Soluţie 5.4. Proiecţia corpului pe planul XOY este triunghiul format de dreptele $x = 0$, $y = 0$ şi $x + y = 1$. Aşadar

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1 \right\}.$$

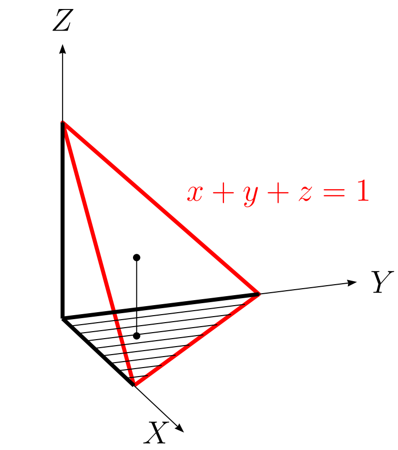


Figura 5.4: Tetraedrul V

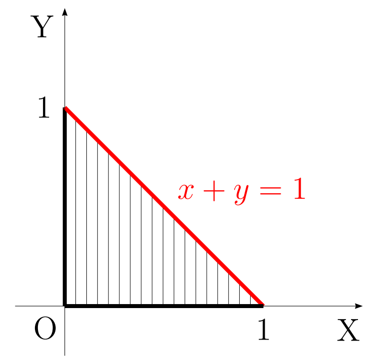


Figura 5.5: Domeniul D

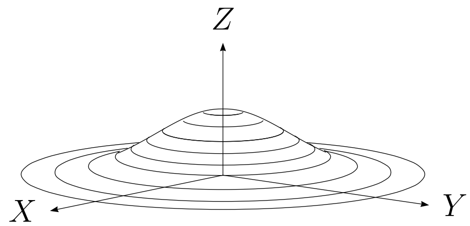
Dacă fixăm un punct (x, y) din D, atunci pentru ca $(x, y, z) \in V$, z ia valori de la planul XOY la planul $x + y + z = 1$. Deci când $(x, y) \in D$ avem $0 \leq z \leq 1 - x - y$. Rezultă

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y} \frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3} \\
&= \iint_D \left(\frac{1}{2(1+x+y)^2} - \frac{1}{8} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{8} \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{8}\mathcal{A}_D \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}.
\end{aligned}$$

Soluţie 5.5. Volumul corpului V, se calculează prin

$$\mathcal{V}ol = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{\frac{e^{\frac{-1}{2}(x^2+y^2)}}{2\pi}} \mathrm{d}z = \iint_D \frac{1}{2\pi} e^{\frac{-1}{2}(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq 9$. Trecând la coordonatele polare introduse prin $x = \rho \cos \varphi$ şi $y = \rho \sin \varphi$, obţinem



$$\mathcal{V}ol = \iint_D \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi}\int_0^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\rho\, \mathrm{d}\varphi = -e^{-\frac{1}{2}\rho^2}\Big|_0^3$$
$$= 1 - e^{-\frac{9}{2}}.$$

Evaluând numeric $\mathcal{V}ol \approx 0.988891$.

Soluţie 5.6. Corpul V este interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 5$, limitat de planele $x - y + 2z = 7$ şi $z = 0$, vezi Figura 5.6. Proiectând corpul V pe planul XOY se obţine discul haşurat, care este mărginit de cercul $x^2 + y^2 = 5$. Pe verticală corpul se întinde de la $z = 0$ la $z = (7 - x + y)/2$. Integrala dată va fi

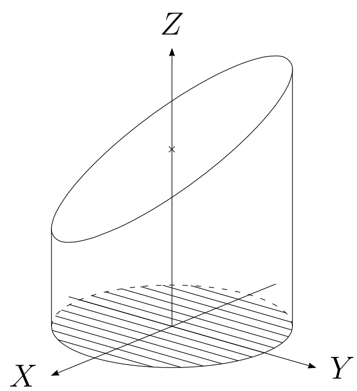


Figura 5.6: Corpul V

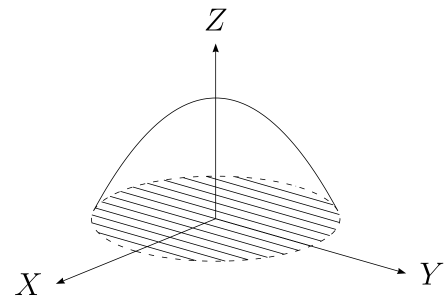
$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$$
$$= \iint_D \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \int_0^{\frac{7-x+y}{2}} (x^2 + y^2 + z)\, \mathrm{d}z$$
$$= \iint_D \left(\frac{1}{2}(x^2 + y^2)(7 - x + y) + \frac{(7 - x + y)^2}{8}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare în această integrală dublă, vom avea

$$I = \int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\rho^2(7 - \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi) + \frac{(7 - \rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)^2}{8}\right)\rho\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\rho$$
$$= 2\pi\int_0^{\sqrt{5}}\left(\frac{7\rho^3}{2} + \frac{49\rho}{8} + \frac{\rho^3}{8}\right)\mathrm{d}\rho = \frac{1215\pi}{16}.$$

Soluţie 5.7. Notăm cu V corpul mărginit de suprafaţa $x^2 + y^2 = 1 - z$ şi planul XOY. Proiecţia lui V pe planul XOY este discul $x^2+y^2 \leq 1$, notat D. Pentru un (x, y) fixat în D, corpul V se întinde pe verticală de la planul $z = 0$ la suprafaţa paraboloidului $z = 1 - x^2 - y^2$. Volumul lui V va fi

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1-x^2-y^2} \mathrm{d}z \\ &= \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

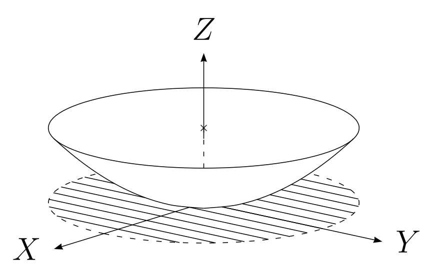


Trecând la coordonate polare, obţinem

$$\mathcal{V} = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (1 - \rho^2)\rho\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3)\,\mathrm{d}\rho = \frac{\pi}{2}.$$

Soluţie 5.8. Notăm cu V corpul delimitat de paraboloidul $x^2 + y^2 = 4z$ şi planul $z = 1$. Proiecţia lui V pe planul XOY este discul $x^2+y^2 \leq 4$, notat D. Volumul corpului V va fi

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\frac{1}{4}(x^2+y^2)}^{1} \mathrm{d}z \\ &= \iint_D \left(1 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$



Trecând la coordonate polare, avem

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = \int_0^2 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right) \rho\,\mathrm{d}\varphi &= 2\pi \int_0^2 \left(\rho - \frac{\rho^3}{4}\right) \mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{16}\right)\bigg|_0^2 = 2\pi.\end{aligned}$$

Soluţie 5.9. Egalitatea $x^2+y^2+z^2 = 4az$ se rescrie $x^2+y^2+(z-2a)^2 = 4a^2$. Deci inegalitatea $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4az$ defineşte interiorul sferei cu centrul în

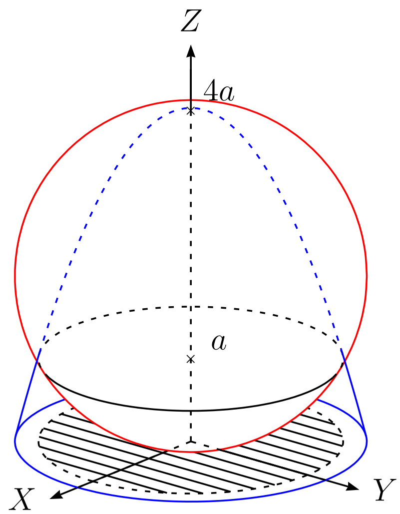


Figura 5.7: Corpul V

$(0, 0, 2a)$ şi rază $2a$. Inegalitatea $x^2 + y^2 + az \leq 4a^2$ defineşte interiorul paraboloidului $x^2+y^2+az = 4a^2$ cu vârful $(0, 0, 4a)$. Intersecţia dintre sferă şi paraboloid se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 & = & 4az \\ x^2 + y^2 + az & = & 4a^2. \end{cases}$$

Obţinem $z_1 = a$ şi $z_2 = 4a$. Într-adevăr, se observă şi de pe desen, că paraboloidul are punct comun cu sfera în $z = 4a$ şi mai intersectează sfera încă o dată după cercul $x^2+y^2 = 3a^2$, $z = a$. Proiectând corpul V pe planul XOY se obţine discul

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 3a^2 \right\}.$$

Pentru $(x, y) \in D$, z ia valori de la sferă la paraboloid. Deci, pentru orice $(x, y) \in D$ obţinem $2a - \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} \le z \le 4a - \frac{1}{a}(x^2 + y^2)$. Volumul corpului V va fi

$$\begin{aligned}\mathcal{V}ol &= \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{4a-\frac{1}{a}(x^2+y^2)} \mathrm{d}z \\ &= \iint_D \left(2a - \frac{1}{a}(x^2+y^2) + \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

În integrala dublă, trecem la coordonate polare. Prin această transformare domeniul D se transformă într-un nou domeniu

$$\Delta = \left\{ (\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \rho \in [0, a\sqrt{3}],\ \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\mathcal{V}ol &= \iint_\Delta \left(2a - \frac{1}{a}\rho^2 + \sqrt{4a^2 - \rho^2}\right) \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_0^{a\sqrt{3}} \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(2a - \frac{1}{a}\rho^2 + \sqrt{4a^2 - \rho^2}\right) \rho\,\mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{a\sqrt{3}} \left(2a - \frac{1}{a}\rho^2 + \sqrt{4a^2 - \rho^2}\right) \rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= 2\pi \left(a\rho^2 - \frac{\rho^4}{4a} - \frac{1}{3}\sqrt{(4a^2 - \rho^2)^3}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{3}} = \frac{37a^3\pi}{6}.\end{aligned}$$

Soluţie 5.10. Trebuie să calculăm $\displaystyle\iiint_V (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, unde

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x, y) \in D,\ c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \le z \le c \right\},$$

este un con, iar mulţimea D este proiecţia lui V pe planul XOY. Momentul de inerţie va fi dat de integrala dublă

$$I_{OY} = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c} (x^2+z^2)\,\mathrm{d}z.$$

Mulţimea D este interiorul elipsei $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Trecem la coordonate polare generalizate:

$$\begin{cases} x = a\rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = b\rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

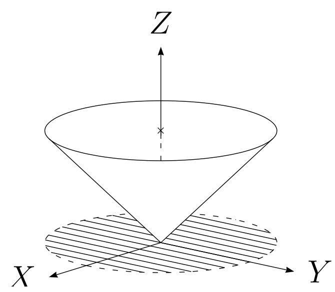


Figura 5.8: Conul $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=\frac{z^2}{c^2}$

Jacobianul transformării este $J = ab\rho$. Integrala dublă devine:

$$I_{OY} = \iint_D x^2\left(c - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right) + \frac{1}{3}\left(c^3 - c^3\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}\left(a^2\rho^2\cos^2\varphi\cdot(c-c\rho)+\frac{1}{3}(c^3-c^3\rho^3)\right)ab\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= abc\int_0^1\left(a^2(\rho^3-\rho^4)\pi + \frac{2\pi c^2}{3}(\rho-\rho^4)\right)\mathrm{d}\rho = \frac{\pi abc}{20}(a^2+4c^2).$$

Soluţie 5.11. Intersecţia dintre paraboloidul eliptic $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2z$ şi conul $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$ este punctul $(0,0,0)$, pentru $z=0$ şi elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$, pentru $z=2$. Corpul V mărginit de cele două suprafeţe îl proiectăm pe XOY şi obţinem interiorul elipsei $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$, adică mulţimea

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}\,|\,\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}\leq 1\right\}.$$

Pentru $(x,y)\in D$, z ia valori de la paraboloid la con. Deci, pentru $(x,y)\in D$ rezultă $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}\leq z\leq\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}$. Volumul lui V se calculează prin

$$\mathcal{V}ol = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{18}}^{\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}}\mathrm{d}z$$

$$= \iint_D\left(\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}-\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{18}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecem la coordonate polare generalizate în această integrală:

$$\begin{cases} x = 4\rho\cos\varphi \\ y = 6\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Jacobianul acestei schimbări de variabile are valoarea $J = 24\rho$. Domeniul D se transformă în mulţimea punctelor (ρ, φ) din $\Delta = [0,1] \times [0, 2\pi]$.

$$\mathcal{V}ol = \iint_\Delta \left(2\rho - 2\rho^2\right) |J| \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (2\rho - 2\rho^2) 24\rho \,\mathrm{d}\varphi = 8\pi.$$

Soluţie 5.12. Corpul V este format din mulţimea punctelor interioare cilindrului $x^2 + (y-1)^2 = 1$ şi exterioare paraboloidului $x^2 + y^2 = 3z$. El poate fi scris ca mulţimea punctelor $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cu proprietatea $0 \le z \le \frac{1}{3}(x^2 + y^2)$ şi $(x, y) \in D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 2y \,\}$. Volumul lui V va fi

$$\mathcal{V}ol = \iiint_V \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \int_0^{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} \mathrm{d}z = \frac{1}{3} \iint_D \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Trecem la coordonatele polare definite prin $x = \rho\cos\varphi$ şi $y = \rho\sin\varphi$ cu $J = \rho$. Noul domeniu se scrie $\Delta = \{\, (\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi) \,|\, \rho \le 2\sin\varphi \,\}$. Din relaţia $\rho \le 2\sin\varphi$, deducem că $\sin\varphi \ge 0$ sau $\varphi \in [0, \pi]$. Obţinem

$$\begin{aligned} \mathcal{V}ol &= \frac{1}{3} \iint_\Delta \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \int_0^\pi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\sin\varphi} \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{1}{12} \int_0^\pi 2^4 \sin^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3} \int_0^\pi (1 - 2\cos 2\varphi + \cos^2 2\varphi) \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Soluţie 5.13. Corpul V este partea ce se găseşte atât în interiorul sferei $x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2$ cât şi în interiorul conului $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pentru că OZ este axă de simetrie pentru corpul V rezultă că centrul de greutate aparţine lui OZ. Obţinem $x_G = y_G = 0$. Pentru a calcula pe z_G utilizăm formula

$$z_G = \frac{\iiint_V z\rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}{\iiint_V \rho(x, y, z) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z},$$

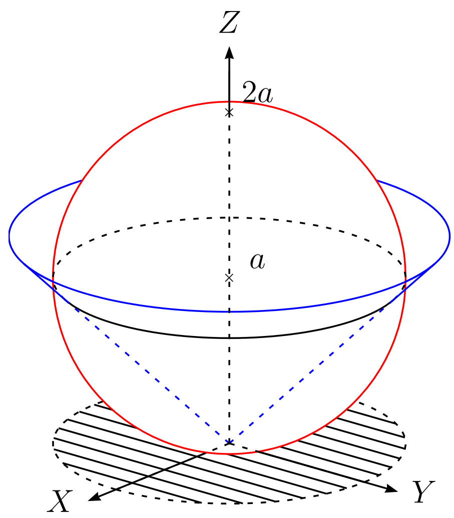


Figura 5.9: Corpul V

unde $\rho(x,y,z)$ este funcţia de densitate. În cazul corpului omogen densitatea este constantă, ρ_0. Rezultă

$$z_G = \frac{\iiint_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}{\iiint_V \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z}.$$

Proiecţia acestui corp pe planul XOY este D, discul haşurat din Figura 5.9. Pentru a afla reprezentarea acestuia, trebuie determinată ecuaţia cercului de intersecţie a conului cu sfera. Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 2az \\ x^2+y^2 &= z^2. \end{cases}$$

obţinem $z=a$ şi $x^2+y^2=a^2$. Va rezulta $D = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\,\}$.

Calculăm

$$\begin{aligned}
\iiint_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{2}\iint_D \left(2a^2 + 2a\sqrt{a^2-x^2-y^2} - 2x^2 - 2y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(2a^2 + 2a\sqrt{a^2-\rho^2} - 2\rho^2\right) \rho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \left(\frac{a^2\rho^2}{2} - \frac{a}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{7a^4\pi}{6}.
\end{aligned}$$

La fel se poate calcula şi cealaltă integrală

$$\begin{aligned}
\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z \\
&= \iint_D \left(a + \sqrt{a^2-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(a + \sqrt{a^2-\rho^2} - \rho\right) \rho\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi \left(\frac{a\rho^2}{2} - \frac{1}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3} - \frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = a^3\pi.
\end{aligned}$$

Obţinem $z_G = \frac{7a}{6}$.

Soluţie 5.14. Mulţimea punctelor interioare cilindrului şi sferei se numeşte corpul lui Viviani. Datorită simetriei, volumul acestui corp este dublul volumului părţii aflate deasupra planului XOY, pe care o notăm cu V. Intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = ax$ cu planul XOY este cercul $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Notăm cu D interiorul acestui cerc. Obţinem pentru volum

$$\mathcal{V}ol = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z = \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare, obţinem

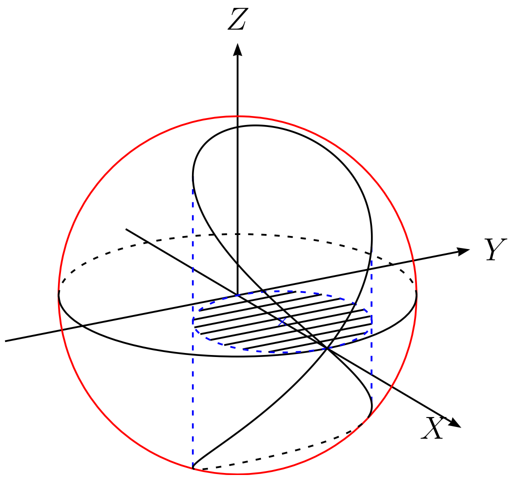


Figura 5.10: Corpul lui Viviani

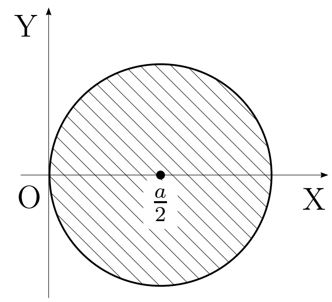


Figura 5.11: Domeniul D

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-\rho^2)^3}\bigg|_0^{a\cos\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{1}{3}a^3\pi - \frac{a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin^3\varphi\right|\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{a^3\pi}{3} - \frac{2a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{a^3\pi}{3} - \frac{4a^3}{9}.\end{aligned}$$

Volumul corpului lui Viviani este $\frac{4a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$.

Soluţie 5.15. Datorită simetriei corpului obţinut prin intersectarea cilindrilor, volumul său va fi de 8 ori volumul părţii aflate în primul octant, parte notată cu V. Proiectând pe V pe planul YOZ obţinem dreptunghiul $D = [0,b]\times[0,c]$. Fixând (y,z) în acest dreptunghi, x trebuie să verifice simultan inegalităţile $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ şi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$, pentru ca $(x,y,z)\in V$. Acest lucru ne arată că $x\in\left[0,\min\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)\right]$. Volumul lui V

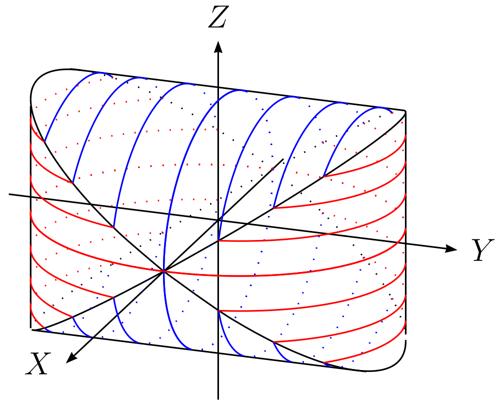


Figura 5.12: Intersecţia a doi cilindri

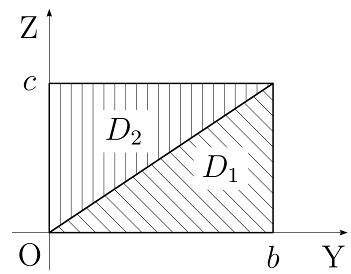


Figura 5.13: Domeniile D_1 şi D_2

va fi

$$\mathcal{V}ol = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_0^{\min\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}},a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)} \mathrm{d}x.$$

Explicitând minimul

$$\min\left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right) = \begin{cases} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}, & \frac{z}{c} \le \frac{y}{b} \\ a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}, & \frac{z}{c} \ge \frac{y}{b}, \end{cases}$$

şi notând $D_1 = \left\{ (y,z) \in D \,|\, z \le \frac{yc}{b} \right\}$ şi $D_2 = D \setminus D_1$, obţinem

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}ol &= \iint_{D_1} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{D_2} a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^b \left(\int_0^{\frac{yc}{b}} a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y + \int_0^c \left(\int_0^{\frac{zb}{c}} a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^b \frac{acy}{b}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}y + \int_0^c \frac{abz}{c}\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\,\mathrm{d}z \\
&= -\frac{abc}{3}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^b - \frac{abc}{3}\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^c = \frac{2abc}{3}.
\end{aligned}$$

Volumul comun al celor două corpuri cilindrice va fi $16abc/3$.

Soluţie 5.16. Ecuaţia suprafeţei de rotaţie este $y^2+z^2 = [f(x)]^2$, iar a părţii superioare

$$z = \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}.$$

Proiecţia corpului pe planul XOY este domeniul plan

$$D = \{\, (x,y) \,|\, x \in [a,b],\ -f(x) \le y \le f(x) \,\}\,.$$

Cu acestea volumul va fi

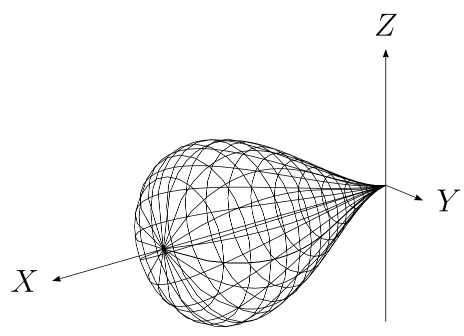
$$\mathcal{V}ol = 2\int_a^b \mathrm{d}x \int_{-f(x)}^{f(x)} \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = 4\int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{f(x)} \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Cu schimbarea de variabilă $y = f(x)\sin\theta$, obţinem

$$\begin{aligned}\mathcal{V}ol &= 4\int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{[f(x)]^2\cos^2\theta} \cdot f(x)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= 4\left(\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta\right) = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Deci volumul corpului obţinut prin rotaţia curbei $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ în jurul axei OX este

$$\mathcal{V}ol = \pi\int_a^b [f(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$



În cazul nostru particular ecuaţia suprafeţei de rotaţie este

$$y^2 + z^2 = x^3 - x^4.$$

Avem

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x^4},\ x \in [0,1].$$

Volumul acestui corp sub formă de pară, va fi

$$\mathcal{V}ol = \pi\int_0^1 \left(x^3 - x^4\right)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{20}.$$

Soluţie 5.17. Paraboloidul $x^2 + y^2 = az$ şi sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$ se intersectează la $z = a$. Intersecţia lor este cercul $x^2 + y^2 = a^2,\ z = a$. Ecuaţia proiecţiei cercului de secţiune pe planul XOY este $x^2 + y^2 = a^2$. Obţinem

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \left[5(x-y)^2 + 3az\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&\quad = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{2a^2-x^2-y^2}} \left[5(x-y)^2 + 3az\right] \mathrm{d}z \\
&\quad = \iint_D \left[5(x-y)^2 \left(\sqrt{2a^2-x^2-y^2} - \frac{x^2+y^2}{a}\right) + \frac{3a\,(2a^2-x^2-y^2)}{2}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{3a(x^2+y^2)^2}{2a^2}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

unde D este domeniul care verifică inecuaţia $x^2 + y^2 \leq a^2$. Trecând la coordonate polare şi notând cu I valoarea integralei, avem

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \left[5\rho^2(1-\sin 2\varphi)\left(\sqrt{2a^2-\rho^2} - \frac{\rho^2}{a}\right) + \frac{3a(2a^2-\rho^2)}{2} - \frac{3\rho^4}{2a}\right]\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^{2\pi} (1-\sin 2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^a 5\rho^3 \left(\sqrt{2a^2-\rho^2} - \frac{\rho^2}{a}\right) \mathrm{d}\rho \\
&\qquad\qquad + 2\pi \int_0^a \left(\frac{3a\rho(2a^2-\rho^2)}{2} - \frac{3\rho^5}{2a}\right) \mathrm{d}\rho \\
&= 2\pi \left[\int_0^a 5\rho^3 \left(\sqrt{2a^2-\rho^2}\right) \mathrm{d}\rho + \left(-\frac{5\rho^6}{6a} + \frac{6a^3\rho^2}{4} - \frac{3a\rho^4}{8} - \frac{3\rho^6}{12a}\right)\Bigg|_0^a\right].
\end{aligned}$$

Făcând schimbarea de variabilă $2a^2 - \rho^2 = u$, rezultă

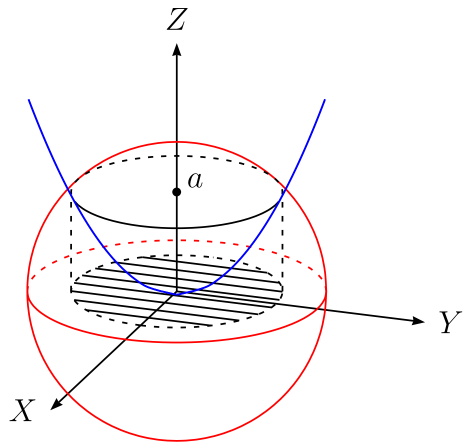


Figura 5.14: Problema 5.17

$$I = 2\pi\left[\int_{2a^2}^{a^2} 5(2a^2-u)\sqrt{u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{-2} - \frac{5a^5}{6} + \frac{3a^5}{2} - \frac{3a^5}{8} - \frac{a^5}{4}\right]$$
$$= 2\pi\left(\frac{5}{2}\cdot 2a^2\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{5}{2}\cdot\frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right)\Bigg|_{a^2}^{2a^2} + \frac{\pi a^5}{12}$$
$$= \frac{2\pi a^5}{3}(8\sqrt{2}-7) + \frac{\pi a^5}{12}$$
$$= \frac{\pi a^5}{12}(64\sqrt{2}-55).$$

Soluţie 5.18. Avem

$$\mathcal{V}ol = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{1-x^2+y^2} \mathrm{d}z = \iint_D (1-x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este discul $x^2+y^2 \le 1$. Trecând la coordonate polare, se obţine

$$\mathcal{V}ol = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (1-\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\rho\,\mathrm{d}\rho$$
$$= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 (\rho - \rho^3\cos 2\varphi)\,\mathrm{d}\rho = \pi - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \pi.$$

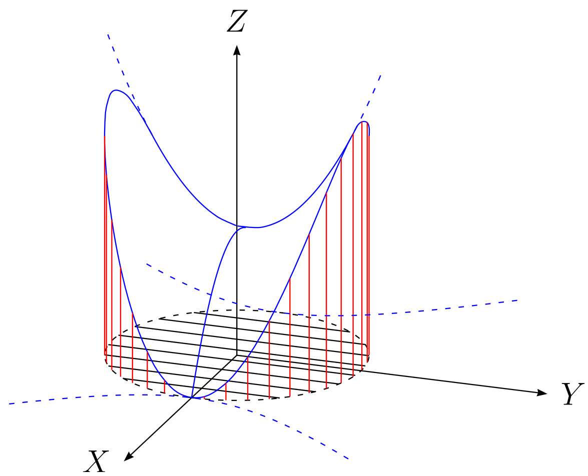
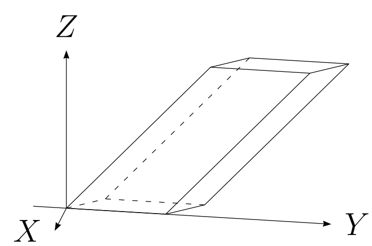


Figura 5.15: Problema 5.18

Soluţie 5.19. Ecuaţiile planelor paralele sugerează următoarea schimbare de variabile:

$$\begin{cases} u = z \\ v = z + 2x \\ w = 2x + 2y - z \end{cases}$$



Dacă notăm cu Ω mulţimea punctelor (u, v, w) atunci când $(x, y, z) \in V$, se obţine

$$\Omega = [0, 4] \times [-2, 0] \times [0, 6].$$

Rezolvând în funcţie de u, v şi w avem $x = \frac{v-u}{2}$, $y = \frac{w+2u-v}{2}$ şi $z = u$. Valoarea jacobianului se calculează prin

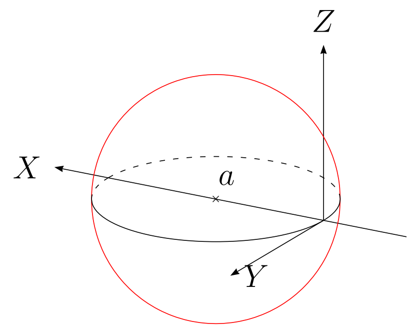
$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}.$$

Acum putem calcula integrala dată

$$\iiint_V (4x+2y+5z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_\Omega (v+w+5u)\cdot\left|\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{4}\int_0^4 \mathrm{d}u\int_{-2}^0 \mathrm{d}v\int_0^6 (v+w+5u)\,\mathrm{d}w$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^4 \mathrm{d}u\int_{-2}^0 (3v+15u+9)\,\mathrm{d}v = \int_0^4 (15u+6)\,\mathrm{d}u = 144.$$

Soluţie 5.20. Inegalitatea $x^2+y^2+z^2 \le 2ax$ descrie interiorul sferei de ecuaţie $(x-a)^2+y^2+z^2 = a^2$. Trecem la coordonate sferice

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$$



Jacobianul este $J = \rho^2\sin\theta$. Înlocuind în inegalitatea iniţială avem

$$\rho \le 2a\cos\varphi\sin\theta,\ \theta\in[0,\pi]$$

Pentru că trebuie ca $\rho \ge 0$, se obţine $\cos\varphi \ge 0$, adică $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Noul domeniu este mulţimea:

$$\Omega = \left\{(\rho,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ 0\le\rho\le 2a\cos\varphi\sin\theta\right\}.$$

Valoarea integralei date va fi

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_\Omega \sqrt{\rho^2(\cos^2\varphi\sin^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\theta)}|J|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^\pi \mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\varphi\sin\theta}\rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\rho$$
$$= 4a^4\left(\int_0^\pi \sin^5\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right) = \frac{8a^4\pi}{5}.$$

Soluţie 5.21. Trecem la coordonate sferice generalizate date de relaţiile

$$\begin{cases} x = a\rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = b\rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = c\rho\cos\theta. \end{cases}$$

cu jacobianul $J = abc\rho^2\sin\theta$. Noul domeniu este

$$\Omega : \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

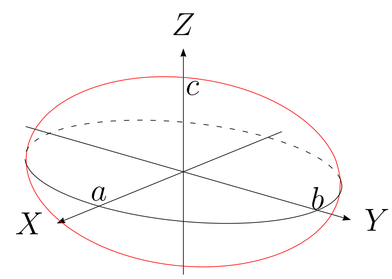


Figura 5.16: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Avem

$$\mathcal{V}ol = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 abc\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\rho = 2\pi abc\left(\int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right)$$
$$= \frac{4\pi abc}{3}.$$

Pământul are forma unui elipsoid cu $a = b$ şi egale cu raza ecuatorială, iar c este raza polară care este puţin mai scurtă decât raza ecuatorială. Volumul Pământului este: $\mathcal{V}ol = \frac{4\pi R_e^2 R_p}{3} = 1\,083\,207\,317\,374$ km^3.

Soluţie 5.22. Trecem la coordonate sferice (ρ, θ, φ) unde

$$\begin{cases} 1 \le \rho \le 3 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Integrala dată va fi egală cu

$$I = \iiint_V \left[(x-2)^2 + (y+1)^2 + z^2\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_1^3 \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} (\rho^2 + 5 - 4\rho\cos\varphi\sin\theta + 2\rho\sin\varphi\sin\theta)\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi\left(\int_1^3 (\rho^4 + 5\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\right) = \frac{152\pi}{15}.$$

Soluţie 5.23. Scriem pe V ca şi mulţime

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 4,\ x^2+y^2 \le 3z^2,\ z \ge 0 \right\}.$$

Trecem la coordonate sferice. Înlocuind pe x, y şi z în condiţiile care definesc

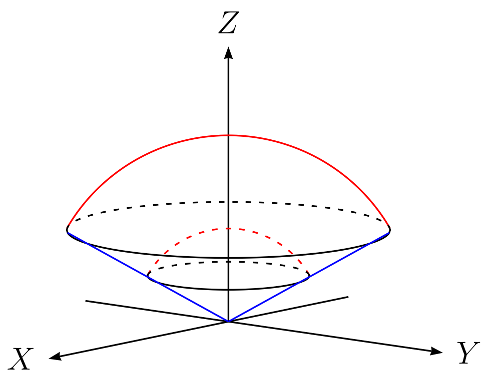


Figura 5.17: Domeniul spaţial cuprins între cele 2 sfere şi în interiorul conului

pe V rezultă

$$\Omega = \left\{ (\rho,\theta,\varphi) \,|\, 1 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{3},\ 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}.$$

Calculăm integrala dată în felul următor:

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2} = \iiint_\Omega \frac{|J|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}{\rho^2} = \int_1^2 \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi}{\rho^2}$$
$$= 2\pi \int_1^2 \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = 2\pi \int_1^2 (-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\rho = \pi.$$

Soluţie 5.24. Trecem la coordonate sferice. Vom avea

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}} = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin\theta}{\sqrt{\rho^2 - 2a\rho\cos\theta + a^2}}\,\mathrm{d}\theta$$

$$\overset{u=\cos\theta}{=} 2\pi \int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_{-1}^1 \frac{\rho^2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{-2a\rho u + \rho^2 + a^2}}$$

$$= -\frac{2\pi}{a} \int_0^1 \rho \left.\sqrt{-2a\rho u + \rho^2 + a^2}\right|_{u=-1}^{u=1} \mathrm{d}\rho$$

$$= -\frac{2\pi}{a} \int_0^1 \rho(a-\rho-\rho-a)\,\mathrm{d}\rho = \frac{4\pi}{3a}.$$

Soluţie 5.25. V este bila cu centrul în $(1,-3,0)$ şi rază 2. Trecem la coordonate sferice şi translatăm polul în centrul bilei

$$\begin{cases} x = 1 + \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = -3 + \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta, \end{cases}$$

de unde rezultă

$$\Omega = \{\, (\rho,\theta,\varphi) \mid \rho\in[0,2],\ \theta\in[0,\pi],\ \varphi\in[0,2\pi] \,\}\,.$$

Avem

$$\iiint_V (2x+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega [2(1+\rho\sin\theta\cos\varphi) + (-3+\rho\sin\theta\sin\varphi)^2]\,|J|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} (11 + 2\rho\sin\theta\cos\varphi - 6\rho\sin\theta\sin\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi)\,\rho^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$$

$$= \int_0^2 \mathrm{d}\rho \int_0^\pi \left(22\pi\rho^2\sin\theta + \pi\rho^4\sin^3\theta\right)\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^2 \left(44\pi\rho^2 + \frac{4\pi\rho^4}{3}\right)\mathrm{d}\rho = \frac{1888\pi}{15}.$$

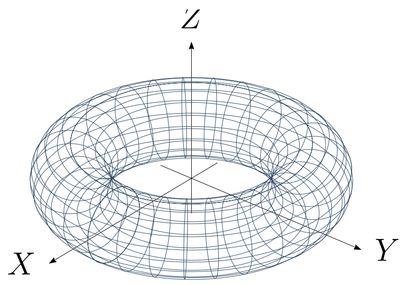


Figura 5.18: Torul

Soluţie 5.26. Corpul mărginit de suprafaţa torului se reprezintă parametric prin

$$\begin{cases} x = (R + \rho\cos v)\cos u, & \rho \in [0, r], \\ y = (R + \rho\cos v)\sin u, & u \in [0, 2\pi], \\ z = \rho \sin v, & v \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Calculăm jacobianul acestei transformări

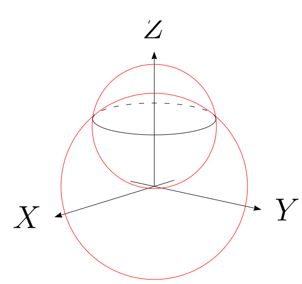
$$J = \begin{vmatrix} \cos v \cos u & -(R + \rho\cos v)\sin u & -\rho \sin v \cos u \\ \cos v \sin u & (R + \rho\cos v)\cos u & -\rho\sin v \sin u \\ \sin v & 0 & \rho\cos v \end{vmatrix} = \rho(R + \rho\cos v).$$

Volumul torului va fi

$$\begin{aligned} \mathcal{V}ol &= \int_0^r \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} \rho(R + \rho\cos v)\,\mathrm{d}u \\ &= 2\pi \int_0^r \left(2\pi\rho R + \rho^2 \sin v\Big|_0^{2\pi}\right) \mathrm{d}\rho = 2\pi^2 r^2 R. \end{aligned}$$

Soluţie 5.27. Ecuaţia sferei $x^2+y^2+z^2 = 4z$ se scrie şi $x^2+y^2+(z-2)^2 = 4$, ceea ce ne arată că are raza 2 şi centrul în punctul $(0, 0, 2)$. Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ are raza 3 şi este centrată în origine. Domeniul spaţial care este comun bilelor îl notăm prin

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 \le \min(9, 4z) \right\}.$$



Avem de calculat masa

$$M = \iiint_V \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde $\rho(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este funcţia densitate. Trecând la coordonate sferice, obţinem

$$\rho^2 \leq \min(9, 4\rho\cos\theta), \qquad \text{adică} \qquad 0 \leq \rho \leq \min(3, 4\cos\theta).$$

Unghiul φ variază între 0 şi 2π, iar pentru că avem $4\cos\theta \geq 0$, obţinem că θ variază între 0 şi $\frac{\pi}{2}$. Noul domeniu este

$$\Omega = \left\{ (\rho,\theta,\varphi) \,|\, 0 \leq \rho \leq \min(3, 4\cos\theta),\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}.$$

Cu acestea masa corpului va fi

$$M = \iiint_\Omega \rho\cdot|J|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\min(3,4\cos\theta)} \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\min(3,4\cos\theta)} \rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\rho.$$

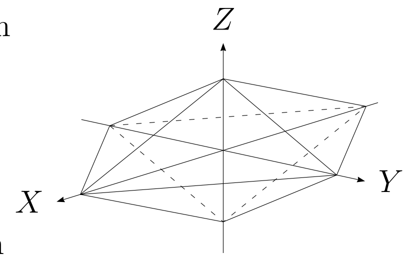
Explicitând minimul

$$\min(3, 4\cos\theta) = \begin{cases} 3, & \theta \in \left[0, \arccos\frac{3}{4}\right] \\ 4\cos\theta, & \theta \in \left[\arccos\frac{3}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases},$$

obţinem

$$M = 2\pi \int_0^{\arccos\frac{3}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^3 \rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\rho + 2\pi \int_{\arccos\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{4\cos\theta} \rho^3\sin\theta\,\mathrm{d}\rho$$
$$= 2\pi\cdot\frac{3^4}{4}(-\cos\theta)\Big|_0^{\arccos\frac{3}{4}} + 2\pi\int_{\arccos\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{4^4\cos^4\theta}{4}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$
$$= 2\pi\frac{3^4}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right) - 2\pi\cdot 4^3\cdot\frac{\cos^5\theta}{5}\Big|_{\arccos\frac{3}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{5}.$$

Soluţie 5.28. Ecuaţiile celor 8 plane care mărginesc octaedrul se obţin prin explicitarea cele 3 module care apar în ecuaţia $2|x|+3|y|+6|z|=12$. Datorită simetriei facem schimbarea de variabile



$$\begin{cases} u = 2x+3y+6z, & u \in [-12,12], \\ v = 2x+3y-6z, & v \in [-12,12], \\ w = 2x-3y+6z & w \in [-12,12]. \end{cases}$$

Jacobianul transformării se poate calcula prin

$$J = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -6 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{-1}{144}.$$

Pentru a delimita complet octaedrul mai este nevoie de

$$-12 \le 2x-3y-6z \le 12, \text{ adică } -12 \le v+w-u \le 12,$$

în noile coordonate. Noul domeniu poate fi scris prin

$$\Omega = \left\{ (u,v,w) \in [-12,12]^3 \mid -12 \le v+w-u \le 12 \right\}.$$

Proiecţia acestui domeniu pe planul uOv este pătratul $D = [-12,12]\times[-12,12]$. Dacă fixăm un punct $(u,v) \in [-12,12]^2$ atunci

$$\max(-12, -12+u-v) \le w \le \min(12, 12+u-v).$$

Momentul de inerţie al octaedrului V faţă de planul XOY este

$$I_{XOY} = \iiint_V z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Scăzând pe v din u, obţinem $z = \frac{u-v}{12}$. Aşadar, cu ajutorul schimbării variabilelor avem

$$\begin{aligned} I_{XOY} &= \iiint_\Omega \left(\frac{u-v}{12}\right)^2 \cdot |J| \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= \iint_D \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \int_{\max(-12,-12+u-v)}^{\min(12,12+u-v)} \frac{(u-v)^2}{144\cdot 144}\,\mathrm{d}w \\ &= \iint_D \frac{(u-v)^2}{144^2}\left[\min(12,12+u-v) - \max(-12,-12+u-v)\right] \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

Explicitând minimul şi maximul avem

$$\min(12, 12+u-v) = \begin{cases} 12, & v \le u \\ 12+u-v, & v \ge u, \end{cases}$$

$$\max(-12, -12+u-v) = \begin{cases} -12+u-v, & v \le u \\ -12, & v \ge u. \end{cases}$$

Notând $D_1 = \{\, (u,v) \in D \mid v \le u \,\}$ şi $D_2 = \{\, (u,v) \in D \mid v \ge u \,\}$, obţinem

$$I_{XOY} = \iint_{D_1} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24-u+v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \iint_{D_2} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24+u-v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Calculăm prima dintre integrale

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_1} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24-u+v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \\ &= \int_{-12}^{12}\left(\int_{-12}^{u} \frac{24(v-u)^2}{144^2} + \frac{(v-u)^3}{144^2}\,\mathrm{d}v\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-12}^{12}\left(\frac{8(12+u)^3}{144^2} - \frac{(12+u)^4}{4\cdot 144^2}\right)\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{2(12+u)^4}{144^2}\Bigg|_{-12}^{12} - \frac{(12+u)^5}{20\cdot 144^2}\Bigg|_{-12}^{12} = \frac{24^4}{144^2}\left(2-\frac{24}{20}\right) = \frac{64}{5}. \end{aligned}$$

La fel se calculează şi cea de-a doua

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} \frac{(u-v)^2}{144^2}\,(24+u-v)\;\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \\ &= \int_{-12}^{12}\left(\int_{-12}^{v} \frac{24(u-v)^2}{144^2} + \frac{(u-v)^3}{144^2}\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}v \\ &= I_1 = \frac{64}{5}. \end{aligned}$$

În final $I_{XOY} = \frac{128}{5}$.

Capitolul 6

Integrale de suprafaţă

6.1 Noţiuni teoretice

Integrala de suprafaţă în raport cu aria

1. Considerăm $M \subset \mathbb{R}^2$ un compact cu frontiera netedă pe porţiuni. Fie $S : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ o suprafaţă parametrizată, de clasă C^1, având ecuaţiile parametrice

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \quad (u, v) \in M. \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

Vectorul de poziţie asociat unui punct de pe suprafaţă este

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\,\vec{k}.$$

Presupunem că suprafaţa este nesingulară, adică: $\vec{r'_u} \times \vec{r'_v} \neq \vec{0}$ pe M.

Definiţie 6.1. *Aria suprafeţei* $S : M \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ este numărul real

$$\mathcal{A}ria\ S(M) = \iint_M \| \vec{r_u} \times \vec{r_v} \|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Expresia diferenţială $\mathrm{d}\sigma = \left\| \vec{r'_u} \times \vec{r'_v} \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ se numeşte *element de suprafaţă*. Avem:

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v, \tag{6.1}$$

unde

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$$
$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 = (z'_v)^2$$
$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v.$$

Fie $U \subseteq \mathbb{R}^3$ cu proprietatea $S(M) \subseteq U$. Considerăm $f : U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă.

Definiţie 6.2. Se numeşte *integrală de suprafaţă* în raport cu aria a funcţiei f pe suprafaţa S, numărul real

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_M f\left[x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right] \left\| \vec{r'_u} \times \vec{r'_v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Pentru $f \equiv 1$, rezultă

$$\iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_M \left\| \vec{r'_u} \times \vec{r'_v} \right\| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \mathcal{A}ria\ S(M).$$

2. Dacă suprafaţa S are o reprezentare explicită

$$S: \ z = z(x,y), \quad (x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

atunci, considerând pe x şi y parametri, se obţine

$$\mathrm{d}\sigma = \left\| \vec{r'_x} \times \vec{r'_y} \right\| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{p^2+q^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \text{ unde } p = z'_x,\ q = z'_y. \tag{6.2}$$

Integrala de suprafaţă, în acest caz este

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f\left[x, y, z(x,y)\right] \cdot \sqrt{p^2+q^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6.3}$$

3. Dacă suprafaţa S este dată printr-o ecuaţie implicită

$$F(x,y,z) = 0,$$

atunci se aduce la forma explicită (scriind o variabilă în funcţie de celelalte două) sau se aduce la o formă parametrică (folosind, în unele situaţii, coordonate sferice, sau coordonate cilindrice).

Fluxul unui câmp vectorial printr-o suprafaţă

Considerăm o suprafaţă netedă având ecuaţiile parametrice

$$S : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v), \quad (u, v) \in M \\ z = z(u, v) \end{cases}$$

şi

$$\vec{r}(u, v) = x(u, v)\,\vec{\imath} + y(u, v)\,\vec{\jmath} + z(u, v)\,\vec{k}$$

vectorul de poziţie al unui punct de pe suprafaţă. Presupunem că în fiecare punct al suprafeţei se pot considera doi vectori normali, având sensuri opuse. Versorii acestor normale sunt

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r'_u} \times \vec{r'_v}}{\left\| \vec{r'_u} \times \vec{r'_v} \right\|}.$$

Fie $\vec{v} = P(x, y, z)\,\vec{\imath} + Q(x, y, z)\,\vec{\jmath} + R(x, y, z)\,\vec{k}$ un câmp vectorial continuu, definit pe un domeniu ce conţine pe $S(M)$. Fixăm pe suprafaţa $S(M)$ o orientare, alegând de exemplu faţa pentru care

$$\vec{n} = \frac{\vec{r'_u} \times \vec{r'_v}}{\left\| \vec{r'_u} \times \vec{r'_v} \right\|}.$$

Definiţie 6.3. *Fluxul vectorului* $\vec{v}$ printr-o faţă a suprafeţei S, determinată de versorul normalei $\vec{n}$, este integrala de suprafaţă

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

Ţinând seama de expresia normalei şi a elementului de suprafaţă, ajungem la o integrală dublă pe domeniul M:

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_M \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Fluxul unui câmp vectorial printr-o suprafaţă netedă, închisă se poate calcula şi cu o integrală de volum, folosind formula lui Gauss-Ostrogradski.

Divergenţă şi rotor

Fie $\vec{v} = P(x,y,z)\,\vec{\imath} + Q(x,y,z)\,\vec{\jmath} + R(x,y,z)\,\vec{k}$ un câmp vectorial definit pe o mulţime deschisă $U \in \mathbb{R}^3$, de clasă $C^1(U)$.

Definiţie 6.4. *Divergenţa câmpului vectorial* $\vec{v}$ este câmpul scalar

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Definiţie 6.5. *Rotorul câmpului vectorial* $\vec{v}$ este vectorul scris simbolic

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

Dezvoltând determinantul după prima linie, rezultă că

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Formula lui Gauss-Ostrogradski

Fie $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un domeniu simplu în raport cu axele de coordonate, cu frontiera netedă, închisă, cu versorul normalei exterioare $\vec{n}$. Dacă $\vec{v} = P\,\vec{\imath} + Q\,\vec{\jmath} + R\,\vec{k}$ este câmp vectorial de clasă $C^1(U)$, $U \supset \Omega$, atunci are loc ***formula lui Gauss-Ostrogradski***:

$$\iint_{\mathrm{fr}(\Omega)} \vec{v}\cdot\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\omega, \tag{6.4}$$

adică fluxul lui $\vec{v}$ după normala exterioară la frontiera lui Ω, $\mathrm{fr}(\Omega)$, este egal cu integrala de volum a divergenţei lui $\vec{v}$ pe domeniul Ω.

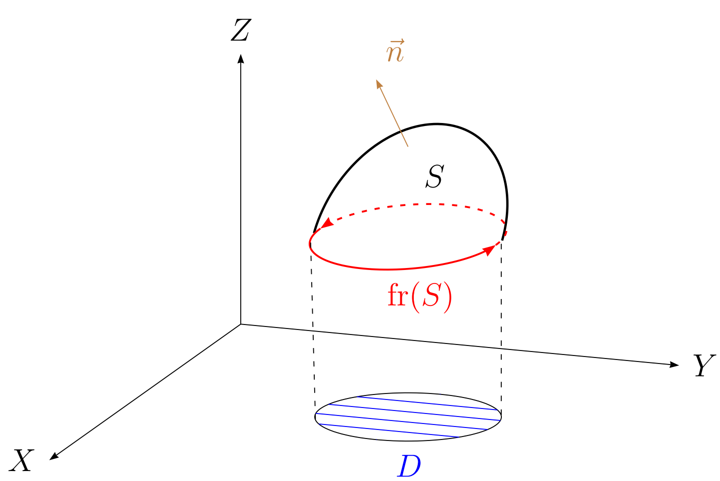
Formula lui Stokes

Fie S o suprafaţă care se poate proiecta pe unul din planele de coordonate după o mulţime compactă, simplă în raport cu ambele axe de coordonate. Dacă S se proiectează pe planul XOY, atunci ecuaţia suprafeţei se poate scrie

$$S\colon z = z(x,y),\ (x,y) \in D,$$

unde D este o mulţime compactă, simplă în raport cu OX şi simplă în raport cu OY. Presupunem $z \in C^2(D)$.
Fie $\vec{v} = P\,\vec{\imath} + Q\,\vec{\jmath} + R\,\vec{k}$ un câmp vectorial de clasă $C^1(U)$, $U \supset S$. În aceste condiţii, circulaţia vectorului $\vec{v}$ pe frontiera lui S este egală cu fluxul rotorului lui $\vec{v}$ prin faţa superioară a lui S, adică

$$\int_{\mathrm{fr}(S)} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\,\vec{v}\cdot\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$



6.2 Exerciţii

6.1. Să se calculeze integrala $\iint_S (z + 5x - 3y)\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este suprafaţa planului $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 1$, situată în primul octant.

6.2. Să se calculeze aria suprafeţei $z = xy$ situată în interiorul cilindrului de ecuaţie $x^2 + y^2 = a^2$.

6.3. Să se calculeze $\iint_S xy\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este suprafaţa

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2z = x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ y \geq x \right\}.$$

6.4. Să se calculeze $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2 + y)\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S:\ \ x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq 1$.

6.5. Calculaţi aria porţiunii de suprafaţă definită de relaţiile $z = 1 - x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

6.6. Să se găsească aria porţiunii din cilindrul parabolic $x^2 = 2z$, mărginită de planele de ecuaţii $x = 2y$, $y = 2x$, $x = 2\sqrt{2}$.

6.7. Se cere masa suprafeţei cubului ale cărui feţe aparţin planelor de coordonate şi planelor $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, având densitatea punctuală $\rho(x, y, z) = xyz$.

6.8. Să se calculeze $\iint_S (x + y + z)\,\mathrm{d}\sigma$, unde S este suprafaţa cubului ale cărui feţe aparţin planelor de coordonate şi planelor $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$.

6.9. Să se calculeze aria porţiunii de suprafaţă $z = x^2 + y^2$ cuprinsă între $z = 1$ şi $z = 4$.

6.10. Să se calculeze

$$\iint_S \frac{z\,\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$$

unde S este porţiunea din paraboloidul $2az = x^2 + y^2$ situată între planele $z = 0$ şi $z = h$, $(a > 0, h > 0)$.

6.11. Să se calculeze aria suprafeţei $x^2 + y^2 = z^2$, cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 4$.

6.12. Să se calculeze aria suprafeţei descrisă prin ecuaţia vectorială

$$\vec{r}(u, v) = u \cos v \, \vec{\imath} + u \sin v \, \vec{\jmath} + u^2 \, \vec{k}, \;\; 0 \leq u \leq 3, \; 0 \leq v \leq \pi.$$

6.13. Să se calculeze aria suprafeţei elicoidale $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ şi $z = cv$, unde $u \in [0, a]$ şi $v \in [0, 2\pi]$.

6.14. Să se calculeze aria catenoidei având ecuaţia

$$\vec{r}(u, v) = a \cosh \frac{v}{a} \cos u \, \vec{\imath} + a \cosh \frac{v}{a} \sin u \, \vec{\jmath} + v \, \vec{k}, \quad u \in [0, 2\pi), \; v \in [-2, 1].$$

6.15. Să se calculeze aria torului de ecuaţie

$$\vec{r}(u, v) = (R + r \cos v) \cos u \, \vec{\imath} + (R + r \cos v) \sin u \, \vec{\jmath} + r \sin v \, \vec{k}, \quad u, v \in [0, 2\pi).$$

6.16. Să se calculeze $\displaystyle\iint_S z \, \mathrm{d}\sigma$, unde S este banda lui Möbius, parametrizată prin

$$\vec{r}(u, v) = \left(2 + v \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \, \vec{\imath} + \left(2 + v \cos \frac{u}{2}\right) \sin u \, \vec{\jmath} + v \sin \frac{u}{2} \, \vec{k},$$

unde $u \in [0, 2\pi), \; v \in [-1, 1]$.

6.17. Se dă semisfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \; z \geq 0$ şi cilindrul $x^2 + y^2 = ax, \; z \geq 0$, $(a > 0)$. Să se calculeze

a) aria porţiunii din suprafaţa semisferei situată în interiorul cilindrului,

b) aria porţiunii din suprafaţa cilindrului situată în interiorul semisferei.

6.18. Să se afle aria suprafeţei formată prin rotirea curbei $y = f(x)$ în jurul axei OX, unde x variază între a şi b, iar f este o funcţie derivabilă şi pozitivă. Ca şi aplicaţie, să se calculeze aria suprafeţei de rotaţie $x^3 - x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

6.19. Considerând suprafaţa Pământului fără denivelări, ea verifică ecuaţia elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, cu $a = b = R_e = 6378.137$ km şi $c = R_p = 6356.7523$ km, conform standardului WGS 84. Să se calculeze aria cuprinsă între paralelele α_1 şi α_2 şi meridianele β_1 şi β_2. Care este aria de la suprafaţa Pământului cuprinsă între paralelele 45° şi 46° şi meridianele 26° şi 27°

6.20. Fie S porţiunea din planul $2x+3y+6z=12$ situată în primul octant. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{v} = 18z\,\vec{\imath} - 12\,\vec{\jmath} + 3y\,\vec{k}$ prin suprafaţa S, după normala îndreptată în sens opus originii axelor de coordonate.

6.21. Calculaţi fluxul vectorului $\vec{v} = x^2\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$ prin porţiunea din suprafaţa conică $x^2+y^2=z^2$, cuprinsă între planele $z=1$ şi $z=2$, normala fiind orientată spre exteriorul conului.

6.22. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{v} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath} + z(x^2+y^2)\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a paraboloidului $z=x^2+y^2$, din interiorul cilindrului $x^2+y^2=1$.

6.23. Fie S suprafaţa cilindrică $x^2+y^2=16$, din primul octant, cuprinsă între planele $z=0$ şi $z=5$. Să se calculeze fluxul lui $\vec{v} = z\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} - 3y^2z\,\vec{k}$ prin suprafaţa S, după normala exterioară la suprafaţă.

Folosind formula lui Gauss-Ostrogradski să se calculeze

6.24. Fluxul lui $\vec{v} = (2xy+z)\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} - (x+3y)\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a tetraedrului cu vârfurile de coordonate (0,0,0), (3,0,0), (0,3,0), (0,0,6).

6.25. Fluxul lui $\vec{v} = x^3\,\vec{\imath} + (y^3-x)\,\vec{\jmath} + y^2\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a corpului mărginit de paraboloidul $z=2-(x^2+y^2)$ şi planul XOY.

6.26. Fluxul lui $\vec{v} = 2x\,\vec{\imath} + y^2\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a sferei de ecuaţie $x^2+y^2+z^2=1$.

6.27. Fluxul lui $\vec{v} = 2\,\vec{\imath} + yz\,\vec{\jmath} + x\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a prismei cu vârfurile de coordonate $(0,0,0)$, $(a,b,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$, (a,b,c), $(0,b,c)$.

6.28. Fluxul lui $\vec{v} = y^2\,\vec{\imath} + z^2\,\vec{\jmath} + x^2\,\vec{k}$ prin faţa exterioară a paraboloidului $z=1-x^2-y^2$, $z\geq 0$.

Folosind formula lui Stokes

6.29. Să se calculeze $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$, unde $\vec{v} = y\,\vec{\imath} + z\,\vec{\jmath} + x\,\vec{k}$ şi S este faţa exterioară a paraboloidului $z=2-x^2-y^2$, $z\geq 0$.

6.30. Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{v} = y^2\,\vec{\imath} + z^2\,\vec{\jmath} + x^2\,\vec{k}$ de-a lungul laturilor triunghiului cu vârfurile $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ şi $C(0,0,2)$, parcurse în sens orar dacă sunt privite din origine.

6.3 Soluţii

Soluţie 6.1. Planul este dat prin ecuaţia sa implicită, vezi Figura 6.1. Poate

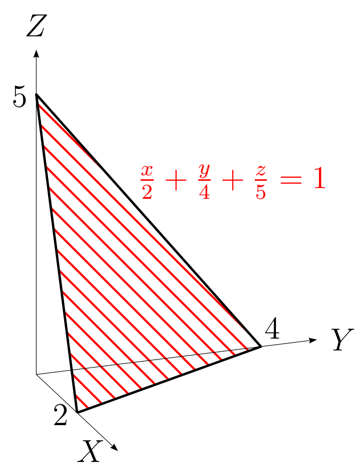


Figura 6.1: Suprafaţa S

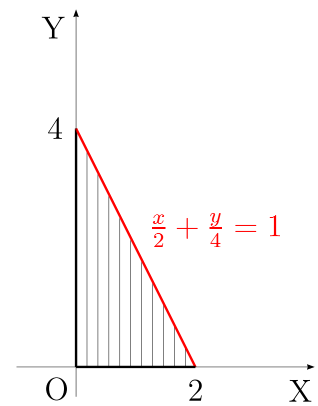


Figura 6.2: Domeniul D

fi adus la forma sa explicită dacă se ia

$$z = 5\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{4}\right), \quad (x, y) \in D,$$

unde D este proiecţia suprafeţei S pe planul XOY, adică mulţimea reprezentată în Figura 6.2:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{2} + \frac{y}{4} \leq 1 \text{ şi } x, y \geq 0 \right\}.$$

Pentru că $p = -\frac{5}{2}$ şi $q = -\frac{5}{4}$, integrala dată se reduce la o integrală dublă, conform relaţiei (6.3)

$$I = \iint_S (z + 5x - 3y)\, \mathrm{d}\sigma = \iint_D \left(5 + \frac{5x}{2} - \frac{17y}{4}\right) \sqrt{1 + \frac{25}{4} + \frac{25}{16}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

iar aceasta se calculează pe un domeniu simplu în raport cu OY, astfel

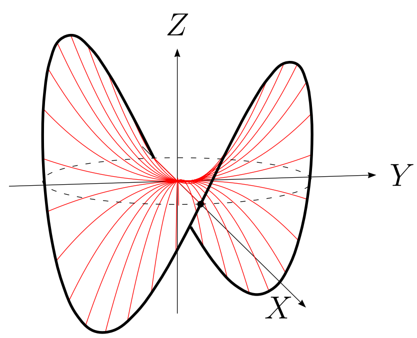
$$I = \frac{\sqrt{141}}{4}\iint_D \left(5+\frac{5x}{2}-\frac{17y}{4}\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{4-2x}\left(5+\frac{5x}{2}-\frac{17y}{4}\right)\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^2\left(54-34x+\frac{7}{2}x^2\right)\mathrm{d}x = \frac{148}{3}.$$

Soluţie 6.2. Avem ecuaţia explicită a suprafeţei. Aplicăm (6.2), unde $p = y$, $q = x$ şi obţinem

$$\mathcal{A}ria = \iint_D \sqrt{1+y^2+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este mulţimea perechilor (x, y) care verifică inegalitatea $x^2+y^2 \le a^2$. Trecând la coordonatele polare ρ si φ prin intermediul relaţiilor $x = \rho\cos\varphi$ şi $y = \rho\sin\varphi$, avem

$$\mathcal{A}ria = \int_0^a \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi\int_0^a \rho\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \frac{2\pi}{3}\left[(1+a^2)^{\frac{3}{2}}-1\right].$$



Soluţie 6.3. Suprafaţa S este partea din paraboloidul $z = (x^2+y^2)/2$, generată de mulţimea plană

$$D = \left\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2x,\ y \ge x \,\right\}.$$

Aplicând (6.3) pentru $p = x$ şi $q = y$, obţinem

$$I = \iint_S xy\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D xy\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare, avem $x = \rho\cos\varphi$ şi $y = \rho\sin\varphi$, iar domeniul D se transformă în domeniul

$$\Delta = \{\, (\rho, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \mid \rho \le 2\cos\varphi,\ \sin\varphi \ge \cos\varphi \,\}.$$

Din inegalitatea $0 \le \rho \le 2\cos\varphi$, deducem că $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$, iar din $\operatorname{tg}\varphi \ge 1$, domeniul lui φ se restrânge la $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Integrala dublă devine

$$\begin{aligned}\iint_D xy\sqrt{1+x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho.\end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabilă $1 + \rho^2 = r$, obţinem

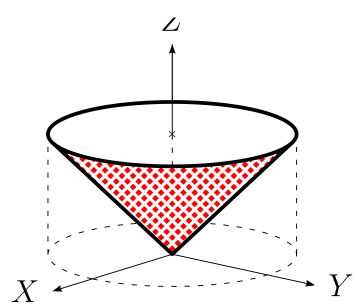
$$\int_0^{2\cos\varphi} \rho^3\sqrt{1+\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \int_1^{1+4\cos^2\varphi} (r-1)\sqrt{r}\,\frac{\mathrm{d}r}{2} = \left(\frac{r^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{r^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_1^{1+4\cos^2\varphi}$$

Folosind formula $3 + 2\cos 2\varphi = 4\cos^2\varphi + 1$, avem

$$\begin{aligned} I \quad &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\varphi}{2}\left(\frac{(3+2\cos 2\varphi)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{1}{5} - \frac{(3+2\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\varphi \\ &\overset{u=3+2\cos 2\varphi}{=} \int_1^3 \left(\frac{u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{2}{15}\right)\frac{\mathrm{d}u}{8} = \frac{3\sqrt{3}}{70} + \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

Soluţie 6.4. Elementul de arie al suprafeţei conului $z = \sqrt{x^2+y^2}$ se obţine calculând

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



şi folosind formula

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Notând $D:\ x^2+y^2\leq 1$, obţinem, conform (6.3)

$$I=\iint_S (x^2+y^2+z^2+y)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D (x^2+y^2+x^2+y^2+y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare, se obţine

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(2\rho^2+\rho\sin\varphi)\rho\sqrt{2}\,\mathrm{d}\rho\\&=4\pi\sqrt{2}\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho+\sqrt{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)\cdot\left(\int_0^1\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right)=\pi\sqrt{2}+0=\pi\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Soluţie 6.5. Elementul de arie al suprafeţei este

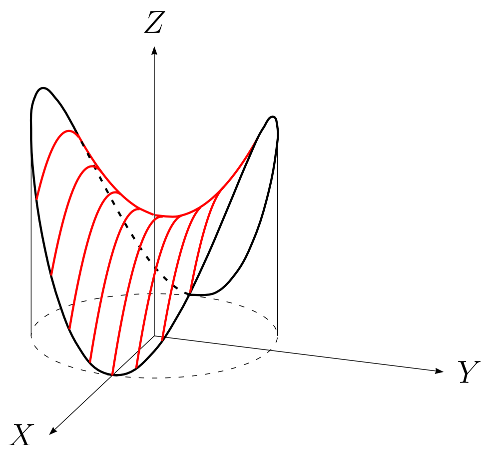


Figura 6.3: Problema 6.5

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Aria suprafeţei este $\mathcal{A}ria=\iint_S \mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul plan $D:\ x^2+y^2\leq 1$. Trecând la coordonate polare, obţinem

$$\mathcal{A}ria=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho=2\pi\cdot\frac{1}{8}\frac{(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

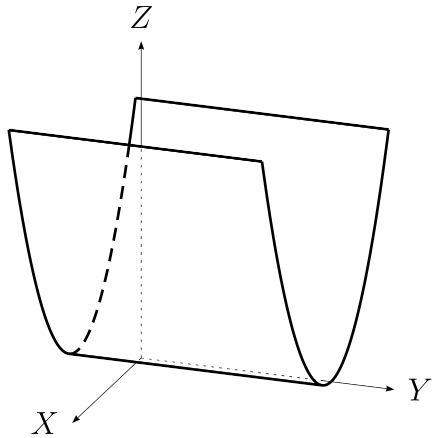


Figura 6.4: Problema 6.6

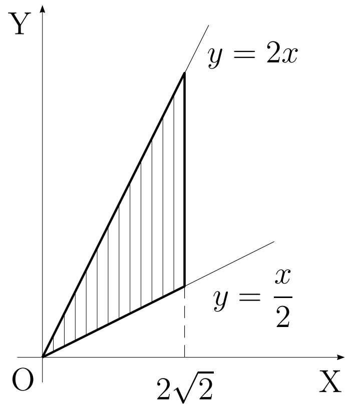


Figura 6.5: Domeniul D

Soluţie 6.6. Suprafaţa este $z = \dfrac{x^2}{2}$. Elementul de suprafaţă este $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Aria va fi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria &= \iint_D \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \int_{\frac{x}{2}}^{2x} \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\left(2x - \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(9^{\frac{3}{2}} - 1\right) = 13.\end{aligned}$$

Soluţie 6.7. Să calculăm mai întâi masa feţei $O'A'B'C'$, vezi Figura 6.6. Această faţă a cubului se găseşte în planul de ecuaţie $z = 1$. Pentru că $z'_x = 0 = z'_y$, avem $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Notând cu $D = [0,1]\times[0,1]$ (adică mulţimea plană mărginită de pătratul $OABC$), obţinem

$$M = \iint_{O'A'B'C'} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Pe trei din feţele cubului ($OO'A'A$, $OO'C'C$ şi $OABC$) densitatea este $\rho = 0$. Pe feţele paralele cu planele de coordonate, masa unei feţe este $\frac{1}{4}$ (pentru fiecare faţă se calculează la fel ca şi în cazul feţei $O'A'B'C'$). Masa suprafeţei cubului este $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

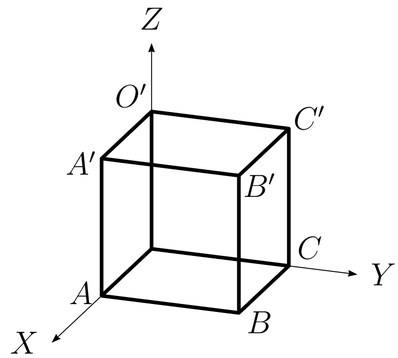


Figura 6.6: Cubul $OABCO'A'B'C'$

Soluţie 6.8. Faţa $OABC$ aparţine planului $z = 0$, vezi Figura 6.6 şi are elementul de arie $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Notând $D = [0,1] \times [0,1]$, avem

$$\begin{aligned}\iint_{OABC} (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_0^1 \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right)\Bigg|_0^1 = 1.\end{aligned}$$

Faţa $O'A'B'C'$ aparţine planului $z = 1$ şi are elementul de arie $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

$$\begin{aligned}\iint_{O'A'B'C'} (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_D (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 + 1 = 2.\end{aligned}$$

Va rezulta că

$$\iint_{OABC\,\cup\,O'A'B'C'} (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma = 3.$$

Datorită simetriei şi integralele pe celelalte feţe-perechi au aceeaşi valoare. În concluzie, integrala pe întreaga suprafaţă a cubului este $I = 3 \cdot 3 = 9$.

Soluţie 6.9. Aplicăm (6.2) şi avem $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Aşadar

$$\mathcal{A}ria = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_D \sqrt{1+4(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este coroana circulară $1 \le x^2+y^2 \le 4$, vezi Figura 6.8. Trecând la coordonate polare, obţinem

$$\mathcal{A}ria = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_1^2 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \frac{1}{8} \frac{(1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = \frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5}\right).$$

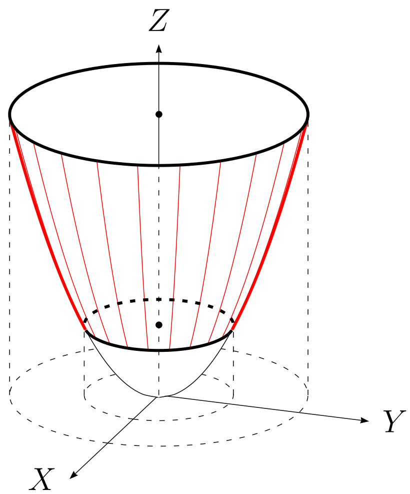


Figura 6.7: Problema 6.9

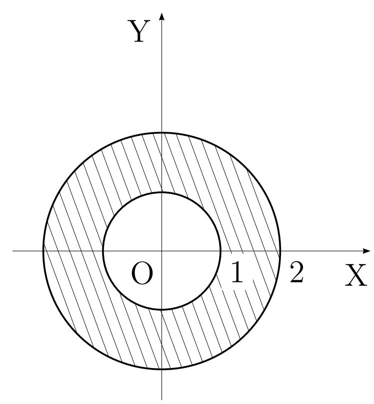


Figura 6.8: Domeniul D

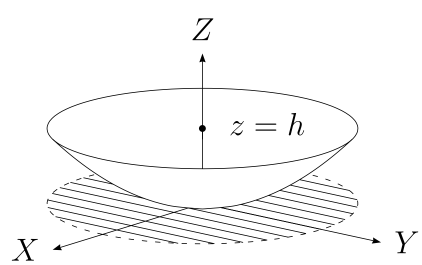
Soluţie 6.10. Avem $z'_x = \frac{x}{a}$ şi $z'_y = \frac{y}{a}$, de unde obţinem elementul de arie $\mathrm{d}\sigma = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} 2az = x^2+y^2, \\ z = h, \end{cases}$$

deducem că mulţimea D este

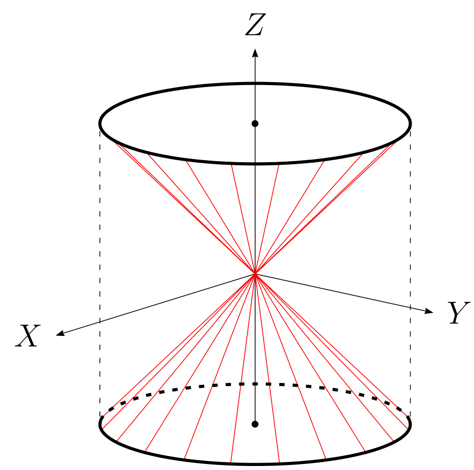
$$D = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 2ah \,\right\}.$$



Integrala de suprafaţă are valoarea

$$I = \iint_D \frac{\frac{1}{2a}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2+a^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2+x^2+y^2}}{a}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2a^2}\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \int_0^{\sqrt{2ah}} \rho^2\cdot\rho\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{2a^2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot(2ah)^2 = \pi h^2.$$

Soluţie 6.11. Conul $x^2+y^2=z^2$ intersectează cilindrul $x^2+y^2=4$ în $z=\pm 2$, obţinându-se două cercuri. Aria suprafeţei S va fi dublul ariei suprafeţei care se găseşte în semispaţiul superior: $\mathcal{A}ria_S = 2\mathcal{A}ria_{S_1}$. Suprafaţa S_1 verifică ecuaţia explicită



$$S_1\colon z=\sqrt{x^2+y^2},\ (x,y)\in D,$$

unde D este discul plan cu centrul în origine şi de rază 2. Elementul de suprafaţă este

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Aşadar, aria este

$$\mathcal{A}ria_S = 2\iint_{S_1}\mathrm{d}\sigma = 2\sqrt{2}\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\mathcal{A}ria_D = 2\sqrt{2}\cdot 4\pi = 8\sqrt{2}\pi.$$

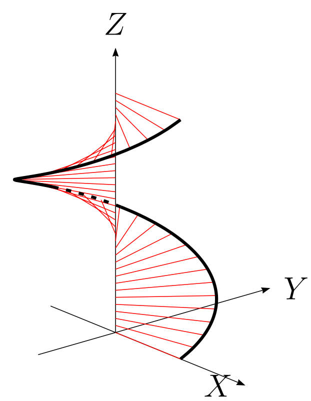
Soluţie 6.12. Avem $x=u\cos v$, $y=u\sin v$ şi $z=u^2$, adică $x^2+y^2=z$, ceea ce ne arată că suprafaţa este paraboloid. Pentru calculul elementului de suprafaţă aplicăm (6.1). Avem

$$E = (\cos v)^2 + (\sin v)^2 + (2u)^2 = 1+4u^2,$$
$$G = (-u\sin v)^2 + (u\cos v)^2 + 0 = u^2,$$
$$F = \cos v\cdot(-u\sin v) + \sin v\cdot(u\cos v) + 2u\cdot 0 = 0.$$

Cu acestea, aria suprafeţei S se poate calcula prin

$$\mathcal{A}ria = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^3 \int_0^\pi u\sqrt{1+4u^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{\pi}{8}\cdot \left.\frac{(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right|_0^3$$
$$= \frac{\pi\left(37\sqrt{37}-1\right)}{12}.$$

Soluţie 6.13. Calculăm E, G şi F

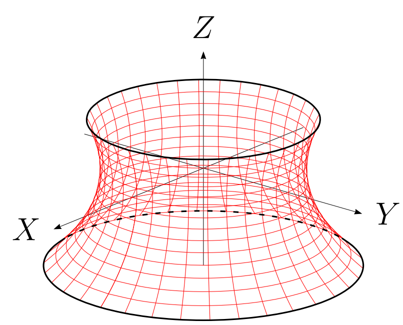


$$E = 1,\quad G = u^2 + c^2,\quad F = 0.$$

Astfel aria va fi

$$\mathcal{A}ria = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^a \sqrt{u^2+c^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$
$$= 2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{a^2+c^2} + \frac{c^2}{2}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+c^2}}{c}\right).$$

Soluţie 6.14. Calculăm E, G şi F, reamintind formulele $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ şi $(\cosh x)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = \sinh x$.



$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2,$$
$$= a^2\cosh^2\frac{v}{a}(-\sin u)^2 + a^2\cosh^2\frac{v}{a}(\cos u)^2$$
$$= a^2\cosh^2\frac{v}{a}$$
$$G = \sinh^2\frac{v}{a}\cos^2 u + \sinh^2\frac{v}{a}\sin^2 u + 1$$
$$= 1 + \sinh^2\frac{v}{a} = \cosh^2\frac{v}{c}.$$
$$F = a\cosh\frac{v}{a}(-\sin u)\cdot\sinh\frac{v}{a}\cos u + a\cosh\frac{v}{a}\cos u\cdot\sinh\frac{v}{a}\sin u = 0.$$

Aria suprafeţei va fi

$$\mathcal{A}ria = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{-2}^{1} \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} a\cosh^2\frac{v}{a}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\pi a \int_{-2}^{1} \frac{1}{4}\left(e^{\frac{2v}{a}} + e^{-\frac{2v}{a}} + 2\right)\mathrm{d}v = \frac{\pi a}{2}\left(\frac{a}{2}e^{\frac{2v}{a}}\Big|_{-2}^{1} - \frac{a}{2}e^{-\frac{2v}{a}}\Big|_{-2}^{1} + 3\right)$$
$$= \frac{\pi a}{2}\left[\frac{a}{2}\left(e^{\frac{2}{a}} - e^{\frac{-4}{a}} - e^{\frac{-2}{a}} + e^{\frac{4}{a}}\right) + 3\right].$$

Soluţie 6.15. Torul este reprezentat în Figura 5.18. Calculăm E, G şi F.

$$E = (x_u')^2 + (y_u')^2 + (z_u')^2,$$
$$= (R + r\cos v)^2(-\sin u)^2 + (R + r\cos v)^2(\cos u)^2 + 0 = (R + r\cos v)^2.$$
$$G = (-r\sin u)^2\cos^2 u + (-r\sin u)^2\sin^2 u + (r\cos v)^2 = r^2.$$
$$F = (R + r\cos v)(-\sin u)(-r\sin v)\cos u + (R + r\cos v)\cos u(-r\sin v)\sin u$$
$$= 0.$$

Aria suprafeţei torului va fi

$$\mathcal{A}ria = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^{2\pi} r(R + r\cos v)\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} (R + r\cos v)\,\mathrm{d}v = 2\pi r \cdot (2\pi R + 0) = 4\pi^2 rR.$$

Soluţie 6.16. Calculăm parametri E, G, F ai suprafeţei

$$E = \left[-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\cos u - \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)\sin u\right]^2$$
$$+ \left[-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\sin u + \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\right]^2 + \left(\frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\right)^2$$
$$= \frac{v^2}{4} + \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)^2,$$

$$G = \left(\cos\frac{u}{2}\cos u\right)^2 + \left(\cos\frac{u}{2}\sin u\right)^2 + \left(\sin\frac{u}{2}\right)^2 = 1,$$

$$\begin{aligned} F &= \left(-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\cos u - \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)\sin u\right)\cos\frac{u}{2}\cos u \\ &\quad + \left(-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\sin u + \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)\cos u\right)\cos\frac{u}{2}\sin u + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2} \\ &= -\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) + \frac{v}{2}\cos\frac{u}{2}\sin\frac{u}{2} = 0. \end{aligned}$$

Elementul de suprafaţă este

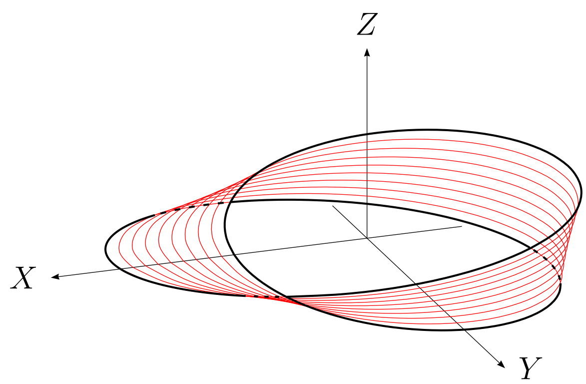


Figura 6.9: Banda Möbius–suprafaţă cu o singură faţă

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{\frac{v^2}{4} + \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Integrala dată se calculează astfel

$$\begin{aligned} \iint_S z\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_0^{2\pi} v\sin\frac{u}{2}\sqrt{\frac{v^2}{4} + \left(2 + v\cos\frac{u}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}u \\ &\overset{t=\cos\frac{u}{2}}{=} \int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1} 2v\sqrt{\frac{v^2}{4} + (2+vt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-1}^{1} v\sqrt{v^2 + (4+2vt)^2}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{p=4+2vt}{=} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{4-2v}^{4+2v}\sqrt{v^2+p^2}\,\mathrm{d}p. \end{aligned}$$

Folosind formula

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2},$$

obţinem

$$\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\left[(4+2v)\sqrt{v^2+(4+2v)^2}-(4-2v)\sqrt{v^2+(4-2v)^2}\right]\mathrm{d}v$$
$$+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} v^2\ln\frac{4+2v+\sqrt{v^2+(4+2v)^2}}{4-2v+\sqrt{v^2+(4-2v)^2}}\,\mathrm{d}v.$$

Desfăcând fiecare din cele două integrale în două şi folosind substituţia $w=-v$, se obţine

$$\begin{aligned}\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(4+2v)\sqrt{v^2+(4+2v)^2}\,\mathrm{d}v\\ &\quad -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(4+2w)\sqrt{w^2+(4+2w)^2}\,\mathrm{d}w\\ &\quad +\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} v^2\ln(4+2v+\sqrt{v^2+(4+2v)^2})\,\mathrm{d}v\\ &\quad -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} v^2\ln\left(4+2w+\sqrt{w^2+(4+2w)^2}\right)\mathrm{d}w\\ &= 0.\end{aligned}$$

Soluţie 6.17. a) Ecuaţia explicită a semisferei este $z=\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$. Avem

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}} \quad \text{şi} \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}},$$

ceea ce ne dă

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Cu aceasta, aria suprafeţei este

$$\mathcal{A}ria = \iint_S \mathrm{d}\sigma = a\iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este mulţimea plană dată de inegalitatea $x^2 + y^2 \le ax$. Trecând la coordonate polare, noul domeniu este

$$\Delta = \left\{ (\rho, \varphi) \mid -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \rho \le a\,\cos\varphi \right\}.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria &= a \iint_\Delta \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\\ &= a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^{a\cos\varphi} = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-a\sqrt{1-\cos^2\varphi}+a\right)\mathrm{d}\varphi\\ &= a^2\pi - a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin\varphi|\,\mathrm{d}\varphi = a^2\pi - 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = a^2\pi - 2a^2.\end{aligned}$$

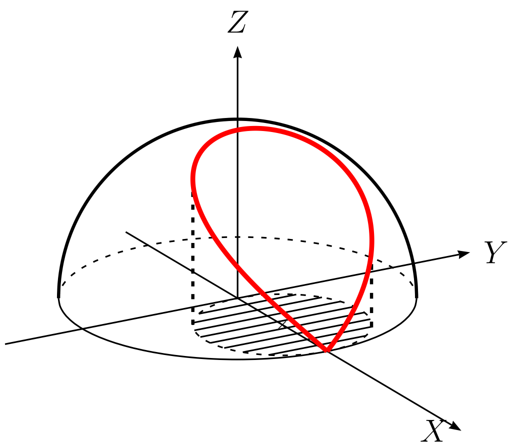


Figura 6.10: Corpul lui Viviani

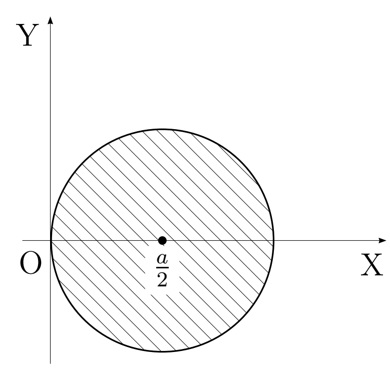


Figura 6.11: Domeniul D

b) Deducem ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice. Folosim coordonatele cilindrice

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\\ y = \rho\sin\varphi\\ z = z.\end{cases}$$

Înlocuind în ecuaţia $x^2 + y^2 = ax$, rezultă $\rho^2 = a\rho\cos\varphi$, adică $\rho = a\cos\varphi$. Ecuaţiile parametrice ale suprafeţei cilindrice sunt

$$\begin{cases} x = a\cos^2\varphi \\ y = a\cos\varphi\sin\varphi = \frac{a}{2}\sin 2\varphi \\ z = z. \end{cases}$$

Parametrul φ reprezintă unghiul polar din planul XOY, aşadar $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Parametrul z ia valori de la 0 (planul XOY) până la intersecţia cilindrului cu sfera:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2 - (a^2\cos^4\varphi + a^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi)} \\ &= a\sqrt{1 - \cos^2\varphi(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)} = a\left|\sin\varphi\right|. \end{aligned}$$

Mulţimea valorilor celor doi parametri este

$$D' = \left\{ (\varphi, z) \mid -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le z \le a\left|\sin\varphi\right| \right\}.$$

Elementul de arie este $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$, unde

$$\begin{aligned} E &= \left(x'_\varphi\right)^2 + \left(y'_\varphi\right)^2 + \left(z'_\varphi\right)^2 = a^2\sin^2 2\varphi + a^2\cos^2 2\varphi + 0 = a^2, \\ G &= \left(x'_z\right)^2 + \left(y'_z\right)^2 + \left(z'_z\right)^2 = 1, \\ F &= x'_\varphi x'_z + y'_\varphi y'_z + z'_\varphi z'_z = 0. \end{aligned}$$

Aria suprafeţei cilindrice este

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ria &= \iint_S \mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} \sqrt{a^2 \cdot 1 - 0}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z = a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a|\sin\varphi|} \mathrm{d}z \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|\sin\varphi\right|\,\mathrm{d}\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= -2a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2a^2. \end{aligned}$$

Soluţie 6.18. Ecuaţia suprafeţei obţinute prin rotaţia curbei

$$\begin{cases} y = f(x), \\ z = 0 \end{cases}$$

în jurul axei OX este

$$y^2 + z^2 = [f(x)]^2,$$

iar ecuaţia jumătăţii sale superioare este $z = \sqrt{[f(x)]^2 - y^2}$. De aici

$$z'_x = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}, \qquad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}.$$

Aşadar, aria suprafeţei se exprimă prin integrala dublă

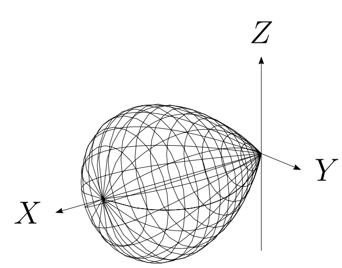
$$\mathcal{A}ria = 2\iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + \left(z'_y\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_D f(x)\frac{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este domeniul din planul XOY mărginit de curbele $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$ şi $y = -f(x)$. Trecând la integrala iterată, găsim

$$\mathcal{A}ria = 2\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \int_{-f(x)}^{f(x)} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{[f(x)]^2 - y^2}},$$

şi pentru că integrala interioară are valoarea π, se obţine următoarea formulă

$$\mathcal{A}ria = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$



Pentru suprafaţa de rotaţie

$$x^3 - x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

avem $f(x) = \sqrt{x^2 - x^3}$, $x \in [0, 1]$. Aria va fi

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}ria &= 2\pi \int_0^1 \sqrt{x^2 - x^3}\sqrt{1 + \frac{(2x - 3x^2)^2}{4(x^2 - x^3)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^1 x\sqrt{9x^2 - 16x + 8}\,\mathrm{d}x. \\
&= \pi \int_0^1 x \cdot 3\sqrt{\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{8}{81}}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Folosind formula

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2},$$

şi descompunerea

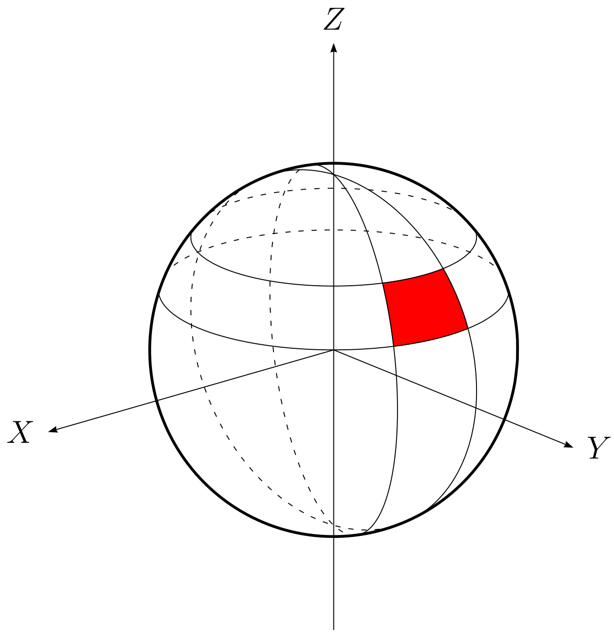
$$\mathcal{A}ria = \frac{\pi}{18}\int_0^1 (18x - 16)\sqrt{9x^2 - 16x + 8}\,\mathrm{d}x + \frac{16\pi}{18}\int_0^1 \sqrt{9x^2 - 16x + 8}\,\mathrm{d}x$$

se obţine

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}ria &= \frac{\pi}{18}\int_0^1 (18x - 16)\sqrt{9x^2 - 16x + 8}\,\mathrm{d}x + \frac{16\pi}{18}\int_0^1 3\sqrt{\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{8}{81}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{18}\,\frac{2}{3}\sqrt{9x^2 - 16x + 8}\,\Big|_0^1 + \frac{8\pi}{3}\,\frac{4}{81}\ln\left(x - \frac{8}{9} + \sqrt{\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{8}{81}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&\quad + \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{8}{9}\right)\sqrt{\left(x - \frac{8}{9}\right)^2 + \frac{8}{81}}\,\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{\pi(7 + 58\sqrt{2})}{81} + \frac{32\pi}{243}\ln(3\sqrt{2} + 4).
\end{aligned}
$$

Soluţie 6.19. Suprafaţa S a Pământului, cuprinsă între paralelele α_1 şi α_2 şi meridianele β_1 şi β_2, se poate reprezenta parametric prin

$$S : \begin{cases} x = R_e \sin\theta\cos\varphi \\ y = R_e \sin\theta\sin\varphi \\ z = R_p \cos\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2} - \alpha_2, \frac{\pi}{2} - \alpha_1\right],\ \varphi \in [\beta_1, \beta_2].$$



Calculăm numerele E, G şi F corespunzătoare suprafeţei S

$$E = R_e^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi + R_e^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi + R_p^2 \sin^\theta = R_e^2 \cos^2\theta + R_p^2 \sin^2\theta$$

$$G = R_e^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + R_e^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi = R_e^2 \sin^2\theta$$

$$F = -R_e \cos\theta \cos\varphi \cdot R_e \sin\theta \sin\varphi + R_e \cos\theta \sin\varphi \cdot R_e \sin\theta \cos\varphi = 0.$$

Cu acestea, aria suprafeţei S este

$$\mathcal{A}ria = \iint_S \mathrm{d}\sigma = \int_{\frac{\pi}{2}-\alpha_2}^{\frac{\pi}{2}-\alpha_1} \mathrm{d}\theta \int_{\beta_1}^{\beta_2} R_e \sin\theta \sqrt{R_e^2 \cos^2\theta + R_p^2 \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\varphi$$

$$\overset{u=\cos\theta}{=} R_e(\beta_2 - \beta_1) \int_{\sin\alpha_1}^{\sin\alpha_2} \sqrt{R_e^2 u^2 + R_p^2(1-u^2)}\,\mathrm{d}u$$

$$= R_e(\beta_2 - \beta_1)\sqrt{R_e^2 - R_p^2} \int_{\sin\alpha_1}^{\sin\alpha_2} \sqrt{\frac{R_p^2}{R_e^2 - R_p^2} + u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Folosind formula $\int \sqrt{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 + x^2}$, se obţine

$$\mathcal{A}ria = \frac{R_e R_p^2(\beta_2-\beta_1)}{2\sqrt{R_e^2-R_p^2}}\ln\left|\frac{\sin\alpha_2\sqrt{R_e^2-R_p^2}+\sqrt{R_p^2+\left(R_e^2-R_p^2\right)\sin^2\alpha_1}}{\sin\alpha_1\sqrt{R_e^2-R_p^2}+\sqrt{R_p^2+\left(R_e^2-R_p^2\right)\sin^2\alpha_2}}\right|$$
$$+\frac{1}{2}R_e(\beta_2-\beta_1)\sin\alpha_2\sqrt{R_p^2+\left(R_e^2-R_p^2\right)\sin^2\alpha_2}$$
$$-\frac{1}{2}R_e(\beta_2-\beta_1)\sin\alpha_1\sqrt{R_p^2+\left(R_e^2-R_p^2\right)\sin^2\alpha_1}.$$

Pentru cazul particular $\alpha_1=\frac{45\pi}{180}$, $\alpha_2=\frac{46\pi}{180}$, $\beta_1=\frac{26\pi}{180}$ şi $\beta_2=\frac{27\pi}{180}$, obţinem $\mathcal{A}ria = 8\,194\,\mathrm{km}^2$.

Soluţie 6.20. Fluxul se calculează cu formula $\Phi_S(\vec{v})=\iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$. Versorul normalei la planul $2x+3y+6z=12$ este

$$\vec{n}=\frac{2\,\vec{\imath}+3\,\vec{\jmath}+6\,\vec{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}=\frac{2}{7}\,\vec{\imath}+\frac{3}{7}\,\vec{\jmath}+\frac{6}{7}\,\vec{k}.$$

Ecuaţia suprafeţei se scrie sub forma

$$S\colon z=2-\frac{x}{3}-\frac{y}{2},\quad (x,y)\in D,$$

unde D este proiecţia suprafeţei S pe planul XOY, adică

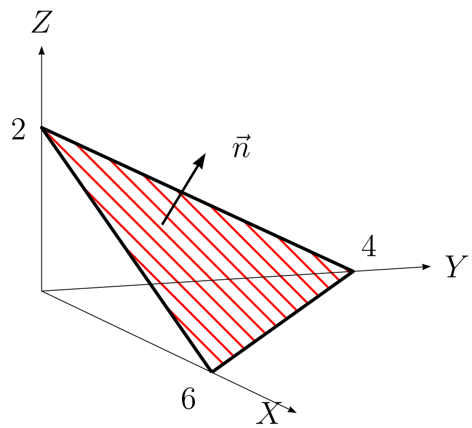
$$D=\{\,(x,y)\,|\,2x+3y\le 12,\ x\ge 0, y\ge 0\,\}\,.$$

Elementul de arie este

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{7}{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calculăm $\vec{v}\cdot\vec{n}$

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=\left(18z\,\vec{\imath}-12\,\vec{\jmath}+3y\,\vec{k}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\,\vec{\imath}+\frac{3}{7}\,\vec{\jmath}+\frac{6}{7}\,\vec{k}\right)=\frac{36z-36+18y}{7}.$$



Fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_D \frac{36\left(2 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) - 36 + 18y}{7} \cdot \frac{7}{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. = \iint_D (6-2x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 6\mathcal{A}_D - 2\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 6\cdot 12 - 2\int_0^6 \mathrm{d}x \int_0^{4-\frac{2x}{3}} x\,\mathrm{d}y$$

$$= 72 - 2\int_0^6 \left(4x - \frac{2x^2}{3}\right)\mathrm{d}x = 72 - 2\left(2x^2 - \frac{2x^3}{9}\right)\Bigg|_0^6 = 24.$$

Soluţie 6.21. Ecuaţia suprafeţei este $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) \in D$, unde D este

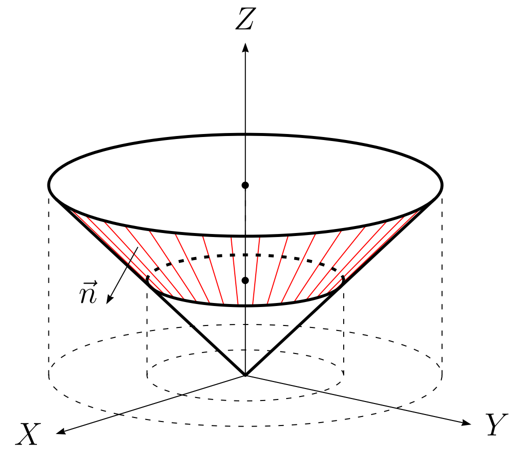
$$D = \left\{\,(x,y)\,|\,1 \le x^2+y^2 \le 4\,\right\}.$$

Normala la suprafaţă face cu OZ unghiul $\gamma > 90°$, deci $\cos\gamma < 0$. Rezultă că $\vec{n} = -\dfrac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{\|\,\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|}$. Elementul de arie este $\mathrm{d}\sigma = \|\,\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|$. Fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\iint_D \vec{v}\cdot(\vec{r}_x \times \vec{r}_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

unde

$$\vec{v}\cdot(\vec{r}_x \times \vec{r}_y) = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & x^2+y^2 \\ 1 & 0 & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix} = x^2+y^2 - \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$



Rezultă că

$$\Phi_S(\vec{v}) = -\iint_D \left(x^2 + y^2 - \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

unde D este coroana circulară $1 \le x^2 + y^2 \le 4$. Se trece la coordonate polare.

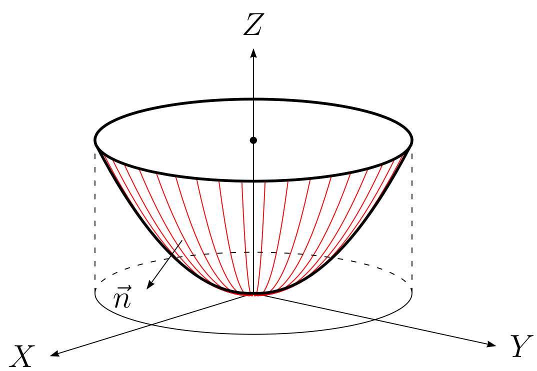
$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= -\int_1^2 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho^2 - \rho^2(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\right) \rho\, \mathrm{d}\varphi \\ &= 2\pi \int_1^2 \rho^3\, \mathrm{d}\rho - \left(\int_1^2 \rho^3\, \mathrm{d}\rho\right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\, \mathrm{d}\varphi\right)\end{aligned}$$

Şi, pentru că

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)\, \mathrm{d}\varphi &= \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{=1} - \cos\varphi \sin\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi - \cos^2\varphi \sin\varphi - \cos\varphi \sin^2\varphi)\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \sin\varphi\Big|_0^{2\pi} - \cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{\cos^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} - \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

rezultă $\Phi_S(\vec{v}) = 2\pi \dfrac{2^4 - 1}{4} = \dfrac{15\pi}{2}$.

Soluţie 6.22. Paraboloidul $z = x^2 + y^2$ intersectează cilindrul $x^2 + y^2 = 1$ pentru $z = 1$.



Ecuaţia suprafeţei este

$$z = x^2 + y^2, \ (x, y) \in D,$$

unde $D : x^2+y^2 \leq 1$. Normala la suprafaţă face cu axa OZ unghiul $\gamma > 90°$, deci $\cos\gamma < 0$. Rezultă că

$$\vec{n} = -\frac{\vec{r}_x \times \vec{r}_y}{\| \vec{r}_x \times \vec{r}_y \|}.$$

Fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\sigma = - \iint_D \vec{v} \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Calculăm produsul mixt. Avem

$$\vec{v} \cdot (\vec{r}_x \times \vec{r}_y) = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & (x^2+y^2)^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2).$$

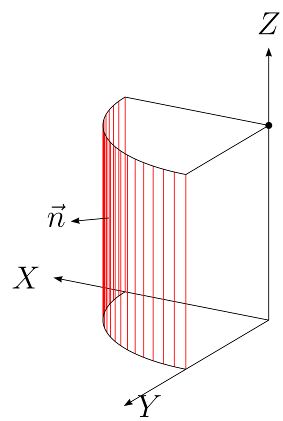
Rezultă că

$$\Phi_S(\vec{v}) = - \iint_D \left[(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2) \right] \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq 1$. Se trece la coordonate polare şi se obţine

$$\Phi_S(\vec{v}) = -\int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho^4 - 2\rho^2\right) \rho \,\mathrm{d}\varphi = -2\pi \int_0^1 (\rho^5 - 2\rho^3)\,\mathrm{d}\rho$$
$$= -2\pi \left(\frac{\rho^6}{6} - \frac{2\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = -2\pi\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

Soluţie 6.23. Pentru parametrizarea suprafeţei folosim coordonatele cilindrice.



Obţinem

$$S : \begin{cases} x = 4\cos\varphi, \\ y = 4\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \quad \begin{array}{l} \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ z \in [0, 5]. \end{array}$$

Fie $M = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 5]$. Fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_M \vec{v} \cdot \frac{\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z}{\|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z\|} \|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z\| \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z$$
$$= \iint_M \vec{v} \cdot (\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z.$$

Calculăm produsul mixt. Avem

$$\vec{v}\cdot(\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_z) = \begin{vmatrix} z & 4\cos\varphi & -3\cdot 16\sin^2\varphi\cdot z \\ -4\sin\varphi & 4\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4z\cos\varphi + 16\sin\varphi\cos\varphi.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= \iint_M (4z\cos\varphi + 16\sin\varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z \\ &= 4\int_0^5 z\,\mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + 16\int_0^5 \mathrm{d}z \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 90.\end{aligned}$$

Soluţie 6.24. Notând $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ şi $C(0,0,6)$ şi Ω, tetraedrul având drept feţe planele de coordonate din primul octant şi planul ABC, de ecuaţie

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1,$$

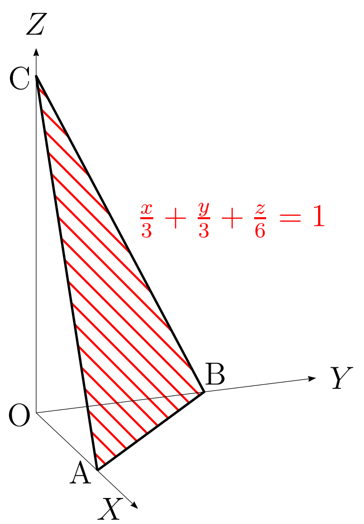


Figura 6.12: Suprafaţa S

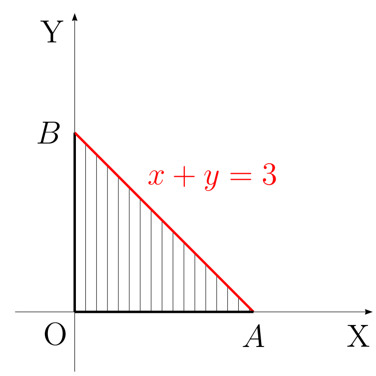


Figura 6.13: Domeniul AOB

obţinem pe baza formulei lui Gauss-Ostrogradski

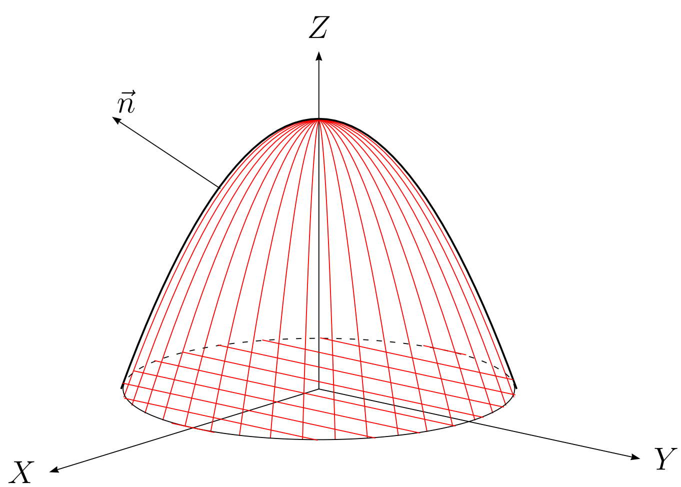
$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\omega = \iiint_\Omega 4y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 4\iint_{AOB} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{6-2x-2y} \mathrm{d}z = 4\iint_{AOB} y\,(6-2x-2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$\Phi_S(\vec{v}) = 8\int_0^3 \mathrm{d}x \int_0^{3-x} [(3-x)y - y^2]\,\mathrm{d}y = 8\int_0^3 \left(\frac{(3-x)^3}{2} - \frac{(3-x)^3}{3}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{8}{6}\int_0^3 (3-x)^3\,\mathrm{d}x = -\frac{8}{6}\frac{(3-x)^4}{4}\Big|_0^3 = 3^3.$$

Soluţie 6.25.

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\omega = \iiint_\Omega (3x^2+3y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= 3\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^{2-(x^2+y^2)} \mathrm{d}z$$
$$= 3\iint_D (x^2+y^2)\left[2-(x^2+y^2)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde $D:\ x^2+y^2=2.$



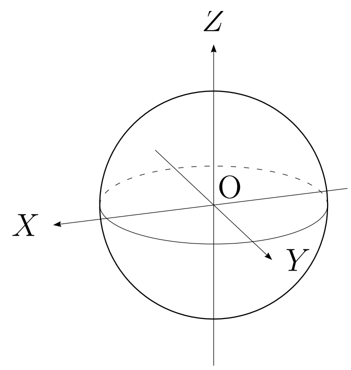
Se trece la coordonate polare şi se obţine

$$\Delta:\ \begin{cases} \rho \in [0,\sqrt{2}] \\ \varphi \in [0,2\pi]. \end{cases}$$

Rezultă

$$
\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{v}) &= 3\iint_\Delta \left(2\rho^2-\rho^4\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\\
&= 6\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi - 3\int_0^{\sqrt{2}}\rho^5\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\\
&= 6\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{2})^4 - 3\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{6}(\sqrt{2})^6 = 12\pi-8\pi=4\pi.
\end{aligned}
$$

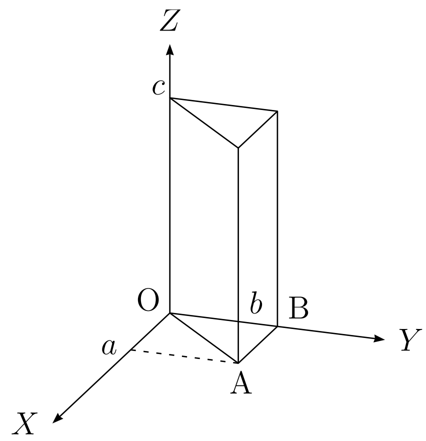
Soluţie 6.26.



$$
\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{v}) &= \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\omega = 2\iiint_\Omega (1+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 2\cdot\mathcal{V}ol_\Omega + 2\iiint_\Omega (y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,
\end{aligned}
$$

unde $\Omega:\ x^2+y^2+z^2\le 1$.
Ştiind că volumul sferei este $\frac{4\pi R^3}{3}$, se obţine

$$
\begin{aligned}
\Phi_S(\vec{v}) &= 2\frac{4\pi}{3} + 2\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 2\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \frac{8\pi}{3} + 2\iint_{D_1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} y\,\mathrm{d}y + 2\iint_{D_2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z\,\mathrm{d}y\\
&= \frac{8\pi}{3}.
\end{aligned}
$$



Soluţie 6.27.

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{OAB} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_0^c z\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{c^2}{2}\iint_{OAB} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{c^2}{2}\cdot\frac{ab}{2}.\end{aligned}$$

Soluţie 6.28. Suprafaţa cercului din planul bazei S_c împreună cu suprafaţa paraboloidului S mărginesc corpul Ω. Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradski se obţine

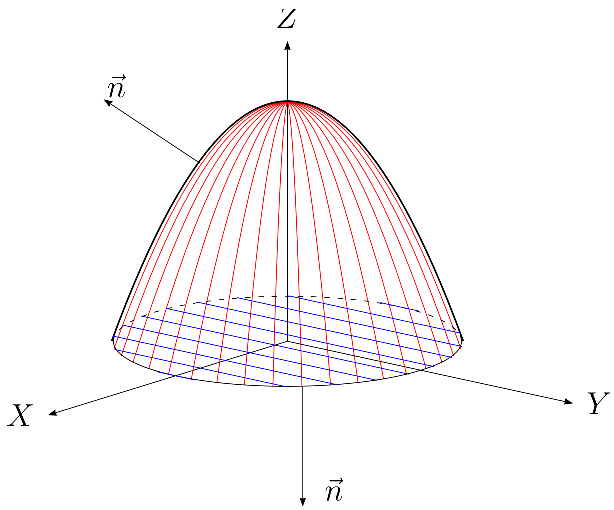
$$\iint_{S\cup S_c} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}\omega = 0.$$

Dar

$$\iint_{S\cup S_c} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_c} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

De aici obţinem că

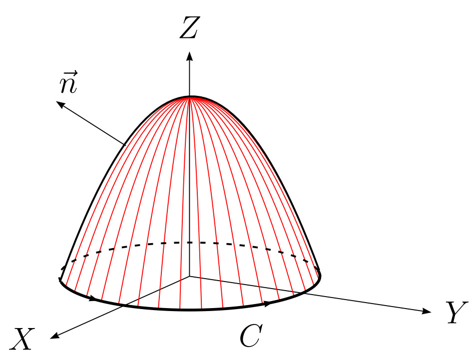
$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\iint_{S_c} \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$



Pentru suprafaţa S_c versorul normalei este $\vec{n} = -\vec{k}$. Astfel

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= -\iint_{S_c} \left(y^2\,\vec{\imath} + z^2\,\vec{\jmath} + x^2\,\vec{k}\right) \cdot \left(-\vec{k}\right)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_{S_c} x^2\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_c} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Soluţie 6.29. Curba frontieră a paraboloidului este cercul $C\colon x^2 + y^2 = 2$. Acest cerc are parametrizarea



$$C\colon \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\varphi \\ y = \sqrt{2}\sin\varphi \quad \varphi \in [0, 2\pi). \\ z = 0 \end{cases}$$

Pe baza formulei lui Stokes obţinem

$$\begin{aligned}\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_C \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z \\ &= -\int_0^{2\pi} 2\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -2\pi.\end{aligned}$$

Soluţie 6.30. Aplicăm formula lui Stokes

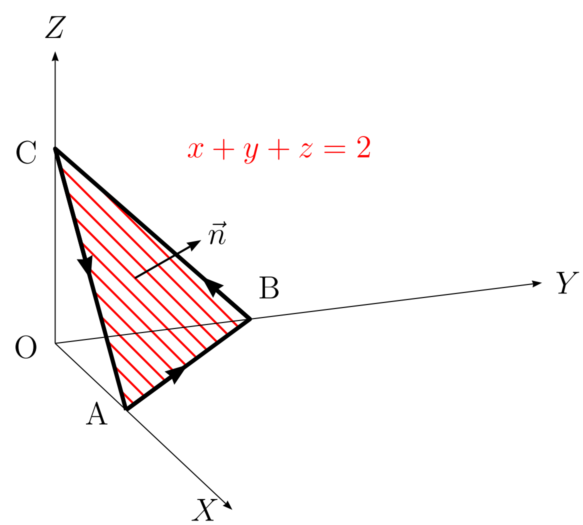


Figura 6.14: Suprafaţa S

$$\int_{\mathrm{fr}(S)} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

pentru suprafaţa triunghiului

$$S\colon\, z = 2 - x - y,\ (x, y) \in D,$$

unde D este mulţimea din planul XOY mărginită de $\Delta\, OAB$. Versorul normalei la suprafaţa S este

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(-p\,\vec{\imath} - q\,\vec{\jmath} + \vec{k}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right).$$

Rotorul vectorului $\vec{v}$ este

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2z\,\vec{\imath} - 2x\,\vec{\jmath} - 2y\,\vec{k}.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\,\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_S \left(-2z\,\vec{\imath} - 2x\,\vec{\jmath} - 2y\,\vec{k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}\right)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_D 2\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -4\cdot\mathcal{A}ria_D \\
&= -8.
\end{aligned}$$

Bibliografie

[1] S. CHIRIŢĂ, *Probleme de matematici superioare*, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1989.

[2] A.A. CIUPA, *Calcul integral*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.

[3] N. DONCIU, D. FLONDOR, *Analiză matematică-culegere de probleme, vol. II*, Editura ALL EDUCATIONAL S.A., Bucureşti, 1994, 1998.

[4] G.M. FIHTENHOLŢ, *Curs de calcul diferenţial şi integral, vol. II şi III*, Editura tehnică, Bucureşti, 1964.

[5] D. FLONDOR, N. DONCIU, *Algebră şi analiză matematică - Culegere de probleme*, Vol. 2, Editura Didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

[6] P. FLONDOR, O. STĂNĂŞILĂ, *Lecţii de analiză matematică*, Editura All, Bucureşti, 1993.

[7] I. GAVREA, *Calcul Integral şi ecuaţii diferenţiale*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2006.

[8] S. GĂINĂ, E. CÂMPU, G. BUCUR, *Culegere de probleme de calcul diferenţial şi integral*, Vol. 2, Vol. 3, Editura Tehnică, Bucureşti, 1966, 1967.

[9] D.M. IVAN, *Elemente de calcul integral*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2003.

[10] P. MARCELLINI, C. SBORDONE, *Esercitationi di matematica*, Vol. 2, Liguori Editore, Napoli, 1991.

[11] S. M. NIKOLSKY, *A course of Mathematical Analysis*, Vol. 2, Mir Publishers Moscow, 1981.

[12] D. POPA, *Calcul integral*, Editura Mediamira, Cluj-Napoca, 2005.