Curs 1

Integrala Riemann

1.1 Primitive

1.1 Definiţie. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval nevid şi $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie. Funcţia f* **admite primitive pe** *I dacă există o funcţie $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe I şi*

$$F'(x) = f(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Funcţia F se numeşte **primitivă** *a funcţiei f pe intervalul I.*

1.2 Propoziţie. *Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie. Dacă $F, G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt două primitive ale funcţiei f, atunci există o constantă $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $F(x) - G(x) = c$, pentru orice $x \in I$.*

Demonstraţie. Considerăm funcţia $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definită prin $H(x) = F(x) - G(x)$. Pentru că F şi G sunt derivabile, rezultă că şi H este derivabilă şi

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

pentru orice $x \in I$. Pentru că I este interval şi H are derivata nulă pe I, rezultă că H este o funcţie constantă pe I. □

1.3 Observaţie. Rezultatul anterior ne arată că dacă F este o primitivă a funcţiei f, atunci orice altă primitivă a funcţiei f este de forma $F + c$. Dacă există o primitivă, atunci există o infinitate de primitive, de aceea este mai potrivită expresia "admite primitive" în loc de "admite primitivă".

1.4 Notaţie. Mulţimea primitivelor unei funcţii date f se notează $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ şi se numeşte ***integrală nedefinită***. Aşadar, avem formula generală

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

unde C este o constantă reală oarecare, iar F este o primitivă a lui f.

1.5 Exemplu.

$$\int t^a\,\mathrm{d}t = \frac{t^{a+1}}{a+1} + C, \qquad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ t \in I \subset (0, \infty)$$

$$\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln|t| + C, \qquad t \in I \subset \mathbb{R}^*$$

Cele două exemple se pot scrie împreună în felul următor:

$$\int t^a \,\mathrm{d}t = \frac{t^{a+1}-1}{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R},\ t \in I \subset (0,\infty)$$

Cazul limită $a = -1$ se obţine prin trecere la limită.

O altă observaţie pe care o putem face pe baza acestui exemplu este că există unii autori[1] care definesc logaritmul cu ajutorul integralei, iar exponenţiala ca funcţie inversă a logaritmului. În acest fel, toate proprietăţile logaritmului se deduc folosind proprietăţile integralelor.

1.6 Exemplu. Exemple de primitive care sunt valabile pe $\mathbb{R}$ sunt

$$\begin{aligned}
&\int e^t \,\mathrm{d}t = e^t + C, && t \in \mathbb{R}\\
&\int \sin t \,\mathrm{d}t = -\cos t + C, && t \in \mathbb{R}\\
&\int \cos t \,\mathrm{d}t = \sin t + C, && t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

O altă listă de primitive întâlnite frecvent este

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} + C, && a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}\\
&\int \frac{1}{t^2-a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{t-a}{t+a}\right| + C, && a \neq 0,\ t \in I \subset \mathbb{R}\setminus\{-a,a\}\\
&\int \frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left(t+\sqrt{t^2+a^2}\right) + C, && a \neq 0,\ t \in \mathbb{R}\\
&\int \frac{1}{\sqrt{t^2-a^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left|t+\sqrt{t^2-a^2}\right| + C, && a > 0,\ t \in I \subset \mathbb{R}\setminus[-a,a]\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,\mathrm{d}t = \arcsin\frac{t}{a} + C, && a > 0,\ t \in I \subset (-a,a).
\end{aligned}$$

Aceste formule se demonstrează prin derivare.

1.7 Observaţie. Dacă numim ***funcţie elementară*** o funcţie care are o reprezentare explicită obţinută printr-un număr finit de operaţii algebrice (adunare, scădere, înmulţire, împărţire, radicali) sau de logaritmare şi exponenţiere, atunci trebuie cunoscut faptul că nu orice funcţie elementară are ca primitive funcţii elementare. Liouville[2] şi mai recent Rosenlicht[3] au arătat care trebuie să fie forma primitivelor exprimate cu ajutorul funcţiilor elementare.

Ca şi exemple de funcţii elementare care nu admit primitivă elementară putem enumera: e^{x^2}, $\sin(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$.

[1] De exemplu Richard Courant, Differential and Integral Calculus, vol. I, second edition, Blackie and Son, Glasgow, 1937 sau Tom Apostol, Calculus, vol I, John Wiley and Sons, 1967.

[2] J. Liouville, Memoire sur l'integration d'une classe de fonctions transcendantes, J. Reine Angew. Math., 13, 93–118, 1835.

[3] M. Rosenlicht, Liouville's Theorem on Functions with Elementary Integrals, Pac. J. Math., 24, 153–161, 1968.

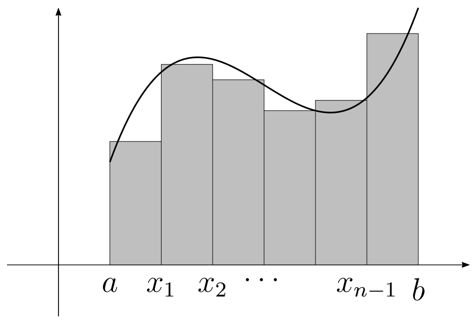

Figura 1.1: Suma Riemann este o sumă de arii de dreptunghiuri

1.2 Integrala Riemann

1.8 Definiţie. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. O funcţie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte* **integrabilă (Riemann)**[4] *dacă există un număr real $I_f \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ a intervalului $[a, b]$*

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

cu **norma diviziunii**

$$\|\Delta\| = \max_{1 \le k \le n} (x_k - x_{k-1})$$

verificând $\|\Delta\| < \delta$ şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, unde $k = 1, 2, \ldots, n$, **suma Riemann***, definită prin*

$$\sigma(f, \Delta, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

verifică

$$|I_f - \sigma(f, \Delta, \xi)| < \varepsilon.$$

1.9 Observaţie. Pentru un interval $[a, b]$ fixat şi o funcţie integrabilă $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dată, numărul I_f din definiţie este unic determinat şi nu depinde de alegerea diviziunii sau de alegerea punctelor intermediare. El se numeşte ***integrala Riemann*** a funcţiei f pe intervalul $[a, b]$ şi se notează $\displaystyle\int_a^b f$ sau $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Fie f o funcţie integrabilă pe $[a, b]$. Suma Riemann $\sigma(f, \Delta, \xi)$ reprezintă o sumă de arii de dreptunghiuri care aproximează aria de sub graficul lui f. Atunci când în diviziunea Δ considerăm tot mai multe puncte care sunt uniform distribuite în intervalul $[a, b]$, atunci suma Riemann este tot mai apropiată ca valoare de numărul $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Putem scrie[5]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma(f, \Delta, \xi).$$

[4] Integrala Riemann este definită de Bernhard Riemann în secţiunea 4 a lucrării "Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe" prezentată la Universitatea Göttingen în 1854, apoi publicată în Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft Der Wissenschaften zu Göttingen, 13, 87–132, 1868.

[5] Definiţia integralei definite ca limită a sumelor Riemann apare formulată în A. L. Cauchy, Résumé des Leçons données a l' École Royale Polytechnique sur le Calcul Infinitésimal, Vingt et unième leçon, Intégrales Définies, 122–127, în Oevres Complètes d'Augustin Cauchy, série 2, tome 4, Gauthier-Villars, Paris, 1899.

1.10 Exemplu. Funcţia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ este integrabilă şi $\displaystyle\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$.

Într-adevăr, pentru orice diviziune şi orice puncte intermediare suma Riemann este

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = b - a.$$

Funcţia lui Dirichlet, $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

nu este integrabilă. Într-adevăr, pentru orice diviziune $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$ şi punctele intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$ suma Riemann este

$$\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = x_n - x_0 = 1,$$

iar pentru punctele intermediare $\eta_k \in [x_{k-1}, x_k] \setminus \mathbb{Q}$ suma Riemann este

$$\sum_{k=1}^{n} g(\eta_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot (x_k - x_{k-1}) = 0.$$

Dacă funcţia g ar fi integrabilă ar exista $I \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că pentru $\varepsilon = \frac{1}{4}$ am găsi un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\| < \delta$ să avem

$$|I - \sigma(D, \Delta, \xi)| < \varepsilon \quad \text{şi} \quad |I - \sigma(D, \Delta, \eta)| < \varepsilon.$$

Ar rezulta contradicţia

$$1 = |1 - I + I| \le |I - 1| + |I| = |I - \sigma(D, \Delta, \xi)| + |I - \sigma(D, \Delta, \eta)| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

1.11 Propoziţie. *Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este mărginită pe $[a, b]$.*

1.12 Observaţie. În general este greu de arătat cu definiţia că o funcţie este integrabilă. Pentru a arăta cum se poate demonstra integrabilitatea unei funcţii, fie $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$:

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Pentru fiecare indice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, definim numerele reale

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x),$$
$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Cu acestea formăm sumele Darboux inferioară şi superioară

$$s(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$
$$S(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Funcţia $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mărginită este integrabilă Riemann dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o partiţie Δ_ε astfel încât

$$S(f, \Delta_\varepsilon) - s(f, \Delta_\varepsilon) < \varepsilon.$$

1.13 Propoziţie. *Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Pentru că f este continuă pe $[a, b]$, ea este uniform continuă pe $[a, b]$, deci există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $u, v \in [a, b]$ cu $|u - v| < \delta$ avem $|f(u) - f(v)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.

Fie Δ o diviziune $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ cu $\|\Delta\| < \delta$. Pentru că f este continuă pe fiecare interval închis şi mărginit $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ea este mărginită şi îşi atinge marginile, adică există $u_k, v_k \in I_k$ astfel încât $M_k - m_k = f(v_k) - f(u_k)$.

Din faptul că $|v_k - u_k| \leq x_k - x_{k-1} \leq \|\Delta\| < \delta$ rezultă că

$$f(v_k) - f(u_k) = |f(u_k) - f(v_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \quad 1 \leq k \leq n$$

de unde obţinem că

$$S(f, \Delta) - s(f, \Delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon.$$

Folosind criteriul lui Darboux de integrabilitate, rezultă că f este integrabilă pe $[a, b]$. □

1.14 Definiţie. *O mulţime $M \subset [a, b]$ are lungime zero dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există intervalele $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots$ astfel încât*

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i] \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

1.15 Exemplu. Mulţimea vidă are lungimea zero. Orice mulţime finită formată din numere reale are lungime zero. De fapt, să arătăm că orice mulţime numărabilă este de lungime zero. Fie $A = \{ x_n : n \in \mathbb{N} \}$. Pentru $\varepsilon > 0$ fie

$$a_n = x_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} \quad \text{şi} \quad b_n = x_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

Atunci $x_n \in (a_n, b_n)$ şi deci $A \subset \bigcup (a_n, b_n)$. Lungimea tuturor acestor intervale este

$$\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Există chiar şi mulţimi nenumărabile care au lungime zero. Un astfel de exemplu este mulţimea lui Cantor notată K, obţinută în felul următor: din mulţimea $[0, 1]$ scoatem afară la primul pas intervalul central deschis de lungime o treime; din fiecare interval al mulţimii rămase $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ scoatem afară treimea centrală şi repetăm la infinit acest proces. Mulţimea K este mulţimea punctelor care nu sunt scoase niciodată. Scris altfel,

$$\begin{aligned}
&K_1 = [0,1]\\
&K_2 = \left[0,\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},1\right]\\
&K_3 = \left[0,\frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9},1\right]\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^n-1} \left(\left[\frac{3k+0}{3^n},\frac{3k+1}{3^n}\right] \cup \left[\frac{3k+2}{3^n},\frac{3k+3}{3^n}\right]\right)
\end{aligned}$$

La fiecare pas n există 2^{n-1} intervale din care se scoate un interval de lungime $\frac{1}{3^n}$. Lungimea intervalelor scoase afară este

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Înseamnă că mulţimea rămasă K are lungimea $1-1=0$ pentru că suma lungimilor intervalelor scoase este egală cu lungimea intervalului iniţial. Acest calcul ne arată că mulţimea K nu poate conţine niciun interval de lungime oricât de mică. Totuşi mulţimea K conţine o infinitate de puncte nenumărabilă. Capetele intervalelor care intervin la fiecare pas nu sunt scoase niciodată. Deci, cel puţin acestea aparţin lui K. Dar acestea nu sunt singurele. Dacă scriem numerele din intervalul $[0,1]$ în baza 3, atunci la prima eliminare a intervalului central de lungime o treime, rămân doar acele numere care au prima cifră după virgulă 0 sau 2; după a doua eliminare a treimilor centrale rămân doar numerele care au primele două cifre după virgulă 0 sau 2. La final, mulţimea K conţine doar numerele care se pot scrie în baza 3 cu ajutorul lui 0 sau 2. Dar acestea sunt ca număr, câte numere reale sunt în intervalul $[0,1]$ pentru că fiecărui număr din K îi putem asocia un număr din $[0,1]$. Mai exact, fiecare număr din K se poate scrie

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}, \qquad \text{unde } a_n \in \{\,0,2\,\}\,.$$

Atunci funcţia $f : K \longrightarrow [0,1]$

$$f\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2}\cdot\frac{1}{2^n}$$

este surjectivă. Pentru orice număr $y \in [0,1]$ scris în baza 2 cu ajutorul cifrelor 0 şi 1, există un număr din mulţimea K obţinut prin înlocuirea tuturor cifrelor de 1 cu 2. În acest fel se arată că mulţimea K nu poate avea mai puţine elemente decât are intervalul $[0,1]$. Pentru că $K \subset [0,1]$ rezultă că cele două mulţimi au acelaşi cardinal.

1.16 Propoziţie (Criteriul lui Lebesgue de integrabilitate)**.** *Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe $[a,b]$ şi fie $M \subset [a,b]$ o mulţime de lungime zero. Dacă f este continuă pe $[a,b]\setminus M$, atunci f este integrabilă.*

Demonstraţie. Demonstraţia este lungă dar ideea poate fi exprimată scriind

$$\begin{aligned} S(f,\Delta)-s(f,\Delta) &= \sum_{k\in I}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1})+\sum_{k\in J}(M_k-m_k)(x_k-x_{k-1}) \\ &\le 2\left\|f\right\|\sum_{k\in I}(x_k-x_{k-1})+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{k\in J}(x_k-x_{k-1}) \\ &< 2\left\|f\right\|\cdot\frac{\varepsilon}{4\left\|f\right\|}+\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)=\varepsilon. \end{aligned}$$

Mulţimea I conţine indicii k pentru care intervalul $[x_{k-1},x_k]$ este inclus în M. Lungimea totală a acestor intervale poate fi făcută oricât de mică şi de aceea suma după aceşti indici este infimă. Mulţimea J conţine toţi indicii k pentru care f este continuă pe intervalul $[x_{k-1},x_k]$. În acest caz, diferenţele M_k-m_k pot fi făcute oricât de mici şi deci suma este infimă. □

1.17 Propoziţie. *Dacă f este monotonă pe $[a,b]$ atunci f este integrabilă pe $[a,b]$.*

Proprietăţi ale integralei Riemann

1) Dacă f şi g sunt integrabile pe $[a,b]$ şi $c,d\in\mathbb{R}$ atunci $cf+dg$ este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b[cf(x)+dg(x)]\,\mathrm{d}x=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+d\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

2) Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $f(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[a,b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ge 0.$$

În plus, dacă f nu este identic nulă, atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$.
3) Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$, atunci

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|\le(b-a)\cdot\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

4) Dacă f este continuă pe $[a,b]$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(c)\cdot(b-a).$$

5) Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$, $a<b$, atunci prin definiţie

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0,\qquad\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

6) Dacă f este integrabilă pe $[a,b]$ şi $c\in(a,b)$ atunci f este integrabilă pe $[a,c]$ şi pe $[c,b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1.3 Calculul integralei Riemann

1.18 Teoremă. ***Formula Leibniz-Newton***
Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie integrabilă pe* $[a,b]$ *şi* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *o funcţie continuă cu proprietatea că* $F'(x) = f(x)$ *pentru orice* $x \in [a,b]$, *cu excepţia unui număr finit de puncte. Atunci*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Demonstraţie. Fie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ care conţine printre altele şi toate punctele unde F' nu coincide cu f. Atunci

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} [F(x_k) - F(x_{k-1})].$$

Aplicând teorema de medie funcţiei F, în fiecare interval (x_{k-1}, x_k) există un c_k cu proprietatea

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Obţinem

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Pentru că f este integrabilă pe $[a,b]$, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune Δ cu $\|\Delta\|$ şi orice puncte intermediare c_k asociat diviziunii Δ avem

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon.$$

Va rezulta

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$. Aceasta implică

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

□

1.19 Exemplu.

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)\Big|_{-1}^{0} = \ln 2.$$

1.20 Observaţie. Nu orice funcţie integrabilă are primitive. De exemplu, funcţia semn $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{sgn}(x)$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Funcţia f este mărginită şi are un punct de discontinuitate de prima speţă. Ea este integrabilă, dar nu are primitive, pentru că nu are proprietatea lui Darboux (o funcţie care are proprietatea lui Darboux duce un interval într-un interval, iar în cazul nostru imaginea intervalului $[-1,1]$ este mulţimea $\{-1,0,1\}$).

Pentru o astfel de funcţie se împarte integrala pe subintervale în care funcţia are primitive. Astfel

$$\int_{-1}^{2} \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0} (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \mathrm{d}x = -1+2 = 1.$$

1.21 Observaţie. Funcţia primitivă F trebuie să fie continuă pe întreg intervalul de integrare pentru ca formula fundamentală să aibă loc. De exemplu, funcţia

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)$$

este continuă şi derivabilă doar pe $[0,2\pi]\setminus\{\pi\}$ cu $F'(x) = \frac{1}{2+\cos x}$. Aplicarea formulei fundamentale ar duce la

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = F(2\pi) - F(0) = 0$$

ceea ce este fals, pentru că integrala unei funcţii strict pozitive trebuie să aibă valoare pozitivă.

Pentru a calcula corect, împărţim integrala pe subintervalele $[0,\pi]$ şi $[\pi,2\pi]$. Pe primul interval vom considera funcţia F_1 definită prin $F_1(x) = F(x)$, pentru $x \in [0,\pi)$ şi $F_1(\pi) = F(\pi-) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$, iar pe al doilea interval, funcţia F_2 cu proprietatea $F_2(x) = F(x)$, pentru $x \in (\pi, 2\pi]$ şi $F_2(\pi) = F(\pi+) = -\frac{\pi}{\sqrt{3}}$. Atunci funcţiile F_1 şi F_2 sunt continue pe intervalele închise $[0,\pi]$ şi $[\pi,2\pi]$. Aplicând formula lui Leibniz-Newton rezultă

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= F_1(\pi) - F_1(0) + F_2(2\pi) - F_2(\pi) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

1.22 Observaţie. Nu orice funcţie care admite primitive este integrabilă. De exemplu, funcţia $F : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este o primitivă pentru funcţia $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dar f nu este integrabilă pentru că nu este mărginită.

1.23 Teoremă. ***Integrarea prin părţi*** *Fie $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţii integrabile pe $[a,b]$ şi derivabile astfel încât f' şi g' sunt integrabile pe $[a,b]$. Atunci*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Se integrează $(fg)' = f'g + fg'$. □

1.24 Observaţie. Putem folosi integrarea prin părţi în cazul în care funcţia de integrat este de forma

1) $f(x) = x^n (\ln x)^m$	2) $f(x) = x^n e^{ax}$
3) $f(x) = x^n \sin ax$	4) $f(x) = x^n \cos ax$
5) $f(x) = x^n \arcsin ax$	6) $f(x) = x^n \arccos ax$
7) $f(x) = e^{ax} \sin bx$	8) $f(x) = e^{ax} \cos bx$
9) $f(x) = x^n \operatorname{arctg} ax$	10) $f(x) = x^n \sqrt{ax^2 + bx + c}$

1.25 Exemplu. Să se calculeze $\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x &= \int_1^e x' \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \cdot (\ln x)' \,\mathrm{d}x \\ &= e \ln e - \ln 1 - \int_1^e \mathrm{d}x = e - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1.\end{aligned}$$

1.26 Teoremă. ***Prima metodă de schimbare de variabilă***
Fie $\varphi : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata integrabilă pe $[c,d]$. Dacă $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mulţimea valorilor lui φ este inclusă în $[a,b]$, $\varphi([c,d]) \subset [a,b]$, atunci

$$\int_c^d f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(c)}^{\varphi(d)} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

1.27 Observaţie. Această metodă de schimbare de variabile se foloseşte atunci când un factor din funcţia de integrat reprezintă derivata unei funcţii care apare în ceilalţi factori. Observând factorul $\varphi'(t)$ vom nota $x = \varphi(t)$ şi avem $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Rămâne să schimbăm capetele intervalului de integrare din $t = c$ în $x = \varphi(c)$ şi din $t = d$ în $x = \varphi(d)$.

1.28 Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{t}{t^4+1} \,\mathrm{d}t$.

Folosim schimbarea de variabilă $t^2 = x$. Diferenţiind se obţine $2t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x$. Pentru $t = 0$ avem $x = 0$, iar pentru $t = 1$ rezultă $x = 1$. Cu acestea

$$\int_0^1 \frac{t}{t^4+1} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2t\,\mathrm{d}t}{(t^2)^2+1} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8}.$$

1.29 Teoremă. ***A doua metodă de schimbare de variabilă*** *Fie $f : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $\varphi : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ o funcţie bijectivă astfel încât φ este continuă, iar φ^{-1} este derivabilă, cu derivata integrabilă. Atunci*

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \,\mathrm{d}x.$$

1.30 Observaţie. A doua metodă de schimbare de variabile se foloseşte când funcţia de integrat are o anumită formă specifică, pentru care există o substituţie specifică. Dăm mai jos o listă de astfel de cazuri.

I. Funcţii raţionale în sin şi cos

1) $f(x) = R(\sin x, \cos x),\ R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\boxed{\cos x = t}$

2) $f(x) = R(\sin x, \cos x),\ R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ $\boxed{\sin x = t}$

3) $f(x) = R(\sin x, \cos x),\ R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

4) $f(x) = R(\operatorname{tg} x),$ $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

5) $f(x) = R(\sin x, \cos x),$ $\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$

II. Substituţii trigonometrice

1) $f(x) = R(x, \sqrt{a^2 - x^2}),$ $\boxed{x = a \sin t}$

2) $f(x) = R(x, \sqrt{a^2 + x^2}),$ $\boxed{x = a \operatorname{tg} t}$

3) $f(x) = R(x, \sqrt{x^2 - a^2}),$ $\boxed{x = \frac{a}{\sin t}}$ sau $\boxed{x = a \operatorname{ch} t}$

III. Substituţiile lui Euler

1) $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}),\ a > 0,$ $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}}$

2) $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}),\ c > 0,$ $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}}$

3) $f(x) = R(x, \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\boxed{\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)}$

IV. Substituţiile lui Cebâşev pentru integrale binome $\int x^m (ax^n + b)^p \, \mathrm{d}x,\ m, n, p \in \mathbb{Q}$.

1) $p \in \mathbb{Z}, q =$ numitorul comun al lui m şi n $\boxed{x = t^q}$

2) $p \notin \mathbb{Z}, \dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}, q =$ numitorul lui p $\boxed{ax^n + b = t^q}$

3) $p \notin \mathbb{Z}, \dfrac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}, \dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}, q =$ numitorul lui p $\boxed{a + bx^{-n} = t^q}$

1.31 Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, \mathrm{d}x$.

Facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$. Atunci $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$. Trecând la funcţie inversă $t = \arcsin x$. Atunci pentru $x = 0$ avem $t = \arcsin 0 = 0$ şi pentru $x = 1$ rezultă $t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

Atunci

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\sin 2t}{4}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$