Curs 10

Integrale duble

10.1 Integrala dublă pe dreptunghi

10.1 Definiţie. *Fie $D = [a, b] \times [c, d]$. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D dacă există numărul real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune a intervalului $[a, b]$*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

şi orice diviziune a intervalului $[c, d]$

$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$$

aşa încât $\|\Delta\| = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} < \delta$, şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$ şi $\eta_j \in [y_{j-1}, y_j]$, $j = 1, \ldots, m$ să avem

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \right| < \varepsilon.$$

10.2 Notaţie. Dacă numărul I există, atunci el este unic şi se notează $\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

10.3 Observaţie. Integrala dublă a unei funcţii f pe un dreptunghi poate fi privită ca limita

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

10.4 Interpretare. Să considerăm două exemple care ne conduc la noţiunea de integrală dublă. Mai întâi, avem o placă plană sub formă dreptunghiului $D \subset \mathbb{R}^2$. Placa este neomogenă, având densitatea punctuală dată de funcţia $\rho : D \to \mathbb{R}$. Ne propunem să calculăm masa acestei plăci.

Împărţim placa $D = [a, b] \times [c, d]$ în dreptunghiuri mici $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$, unde punctele x_k, $k = 1, \ldots, n$ reprezintă o diviziune a intervalului $[a, b]$, iar y_j, $j = 1, \ldots, m$ reprezintă o diviziune a intervalului $[c, d]$. Această împărţire o facem uniform, în sensul că diagonala fiecărui dreptunghi este suficient de mică şi nu depăşeşte o anumită valoare. Fie $(\xi_k, \eta_j) \in D_{kj}$ un punct oarecare din dreptunghiul mic D_{kj}. Masa fiecărui dreptunghi mic este aproximativ egală cu produsul dintre aria dreptunghiului mic şi densitatea în punctul (ξ_k, η_j), iar masa plăcii este suma tuturor maselor dreptunghiurilor mici, adică

$$m_D \approx \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{D_{kj}} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_k, \eta_j) \cdot \mathcal{A}(D_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Cu cât dreptunghiurile sunt mai mici cu atât valoarea sumei calculate se apropie de valoarea masei plăcii. La limită $m_D = \iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

10.5 Interpretare. Avem o suprafaţă în forma explicită $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$. Ne propunem să calculăm volumul V al corpului mărginit de această suprafaţă, planul XOY şi suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu axa OZ şi curba directoare frontiera dreptunghiului D.

Împărţim dreptunghiul D în dreptunghiuri mai mici $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$, unde punctele x_k, $k = 1, \ldots, n$ reprezintă o diviziune a intervalului $[a,b]$, iar y_j, $j = 1, \ldots, m$ reprezintă o diviziune a intervalului $[c,d]$. În fiecare dreptunghi mic considerăm un punct $(xi_k, \eta_j) \in D_{kj}$. Aproximăm volumul cu suma volumelor paralelipipedelor având ca bază dreptunghiurile D_{ij} şi ca înălţime valoarea $f(\xi_k, \eta_j)$. Rezultă

$$V \approx \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot \mathcal{A}(D_{kj}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La limită se obţine volumul $V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

10.6 Propoziţie. *Dacă f este integrabilă pe dreptunghiul D atunci f este mărginită pe D.*

10.7 Observaţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită definită pe un dreptunghi $D = [a,b] \times [c,d]$. Considerând diviziunea $\Delta = \cup D_{kj}$, $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$. Definim

$$\begin{aligned}
M_{kj} &= \sup_{(x,y)\in D_{kj}} f(x,y)\\
m_{kj} &= \inf_{(x,y)\in D_{kj}} f(x,y)\\
S(f,\Delta) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{kj} \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1})\\
s(f,\Delta) &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{kj} \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).
\end{aligned}$$

Se poate demonstra că f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă $S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$ tinde la zero când $\|\Delta\|$ tinde la zero.

10.8 Propoziţie. *Dacă f, g sunt două funcţii integrabile pe dreptunghiul D şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D şi*

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.9 Propoziţie. *Dacă f este o funcţie integrabilă şi pozitivă pe dreptunghiul D, atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq 0.$$

10.10 Propoziţie. *Fie D un dreptunghi $[a,b] \times [c,d]$ şi fie $D_{k,j} = [x_{k-1}, x_n] \times [y_{j-1}, y_j]$ ($1 \leq k \leq n$ şi $1 \leq j \leq m$) dreptunghiurile obţinute prin divizarea intervalului $[a,b]$ prin punctele $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ şi divizarea intervalului $[c,d]$ prin punctele $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. Dacă f este integrabilă pe dreptunghiurile $D_{k,j}$, atunci f este integrabilă şi pe D şi*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \iint_{D_{kj}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.11 Teoremă (Formula de calcul)**.** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pe dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d]$ şi pentru orice $x \in [a, b]$ integrala cu parametru $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ există, atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Fie $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ o diviziune intervalului $[a, b]$ şi $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ o diviziune a intervalului $[c, d]$. Fie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ puncte alese arbitrar. Atunci $m_{kj} \leq f(\xi_k, y) \leq M_{kj}$, pentru orice $y \in [y_{j-1}, y_j]$. Integrând, rezultă

$$m_{kj}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leq M_{kj}(y_j - y_{j-1}).$$

Însumând, avem

$$\sum_{j=1}^{m} m_{kj}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leq \sum_{j=1}^{m} M_{kj}(y_j - y_{j-1}).$$

Înmulţind aceste inegalităţi cu $(x_k - x_{k-1})$ şi însumând, obţinem

$$s(f, \Delta) \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leq S(f, \Delta).$$

Din definiţia sumelor $s(f, \Delta)$ şi $S(f, \Delta)$ şi integrabilitatea lui f pe D, rezultă

$$s(f, \Delta) \leq \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq S(f, \Delta).$$

Atunci

$$s(f, \Delta) - S(f, \Delta) \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y - \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$$

şi pentru că diferenţa $S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$ tinde la zero, când $\|\Delta\| \to 0$ rezultă că

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pe de altă parte, considerând suma Riemann a integralei cu parametru $g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ asociată diviziunii Δ_x, avem

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\|\Delta_x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Acest lucru demonstrează că

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

□

10.12 Observaţie. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

10.13 Exemplu. Să calculăm $\iint_D \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = [1,2] \times [0,1]$.

Aplicăm formula de calcul şi avem

$$\iint_{[1,2]\times[0,1]} \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Calculăm integrala interioară.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}y = \left. \ln(1+xy) \right|_0^1 = \ln(1+x).$$

Atunci, integrând prin părţi, se obţine

$$\iint_D \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = \left. (1+x)\ln(1+x) \right|_1^2 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x} = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1.$$

10.14 Definiţie. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^2$ are* **aria nulă** *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există dreptunghiurile D_i, $i = 1, 2, \ldots$ astfel încât*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \quad \text{şi} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}(D_i) < \varepsilon.$$

10.15 Exemplu. Graficul unei funcţii continue f pe un interval mărginit şi închis $[a, b]$, definit prin

$$G_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = f(x) \right\}$$

este o mulţime de arie nulă.

Funcţia continuă f este integrabilă, deci $S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$ tinde la zero când $\|\Delta\|$ tinde la zero. Pe de ală parte, dreptunghiurile $D_k = [x_{k-1}, x_k] \times [m_k, M_k]$ acoperă mulţimea G_f şi aria însumată a dreptunghiurilor D_k este $S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$.

10.16 Observaţie. Există drumuri a căror suport nu este o mulţime de măsură nulă. Primele exemple au fost construite de Osgood şi Lebesgue în 1903[1].

10.17 Propoziţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită şi $A \subset D$ o mulţime de arie nulă. Dacă f este continuă pe $D \setminus A$ atunci f este integrabilă pe dreptunghiul D.*

[1] W. Osgood, A Jordan curve of positive area, Transactions of the American Mathematical Society, 4 (1903), 107–112, H. Lebesgue, Sur le problème des aires, Bulletin de la Société Mathématique de France, 31 (1903), 197–203.

10.2 Integrale duble pe domenii simple

10.18 Definiţie. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime mărginită şi fie un dreptunghi $[a,b]\times[c,d]$ care conţine mulţimea D. Spunem că $f : D \to \mathbb{R}$ este* **integrabilă pe** D *dacă funcţia*

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \setminus D \end{cases}$$

este integrabilă pe $[a,b]\times[c,d]$. În acest caz scriem,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.19 Observaţie. Se poate demonstra că valoarea integralei nu depinde de dreptunghiul care conţine mulţimea D şi nici de funcţia F, care prelungeşte funcţia f pe dreptunghiul $[a,b]\times[c,d]$.

Într-adevăr, fie $[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$ un alt dreptunghi care conţine mulţimea D şi fie funcţia $F_1 : [a_1,b_1]\times[c_1,d_1] \to \mathbb{R}$ care reprezintă prelungirea lui f la $[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$. Putem găsi întotdeauna un alt dreptunghi M cu proprietatea că $[a,b]\times[c,d] \subset M$ şi $[a_1,b_1]\times[c_1,d_1] \subset M$. Definim funcţia $G : M \to \mathbb{R}$ prin

$$G(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in M \setminus D \end{cases}$$

Prin definiţie, $G(x,y) = F(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$ şi $G(x,y) = F_1(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in [a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$. Deci,

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M G(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a_1,b_1]\times[c,d]} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.20 Definiţie. *Fie $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[a,b]$, cu proprietatea că $g_1(x) \le g_2(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Mulţimea*

$$D = \{(x,y) |\, a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

se numeşte **domeniu simplu faţă de axa** OY.

10.21 Definiţie. *Fie $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[c,d]$, cu proprietatea că $h_1(y) \le h_2(y)$ pentru orice $y \in [c,d]$. Mulţimea*

$$D = \{(x,y) |\, c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

se numeşte **domeniu simplu faţă de axa** OX.

10.22 Teoremă. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa OY*

$$D = \{(x,y) |\, a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

unde g_1, g_2 sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

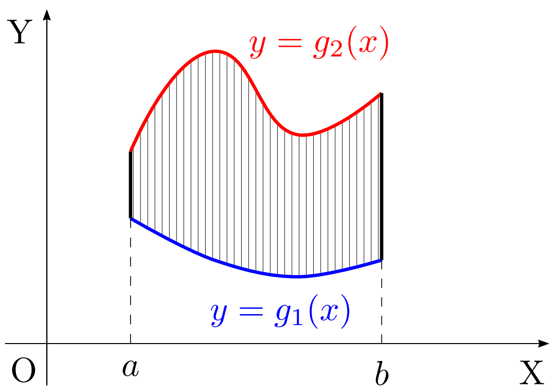


Figura 10.1: Un domeniu simplu în raport cu axa OY

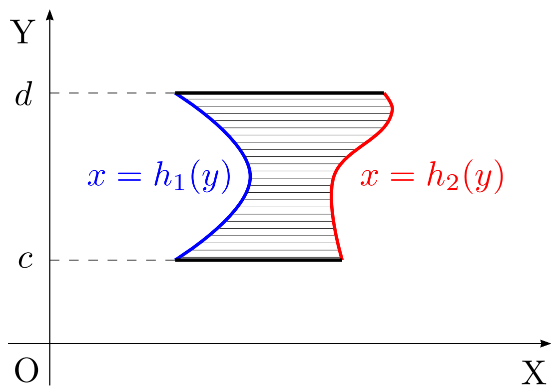


Figura 10.2: Un domeniu simplu în raport cu axa OX

Demonstraţie. Pentru că g_1 şi g_2 sunt funcţii continue pe intervalul mărginit şi închis $[a, b]$, există numerele reale $c = \inf_{x\in[a,b]} g_1(x)$ şi $d = \sup_{x\in[a,b]} g_2(x)$. Atunci $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Definim $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ prin

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \setminus D \end{cases}$$

Funcţia F este discontinuă cel mult pe frontiera lui D. Frontiera lui D este formată din graficele funcţiilor continue g_1 şi g_2 şi eventual două segmente verticale. Înseamnă că frontiera lui D este o mulţime din $\mathbb{R}^2$ de arie nulă. Acest lucru arată că F este discontinuă cel mult pe o mulţime de arie nulă, deci este integrabilă pe $[a, b] \times [c, d]$. Rezultă

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} F(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{d} F(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

$\square$

10.23 Teoremă. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa OX*

$$D = \{(x,y) |\, c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

unde h_1, h_2 sunt funcţii continue pe $[c, d]$. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

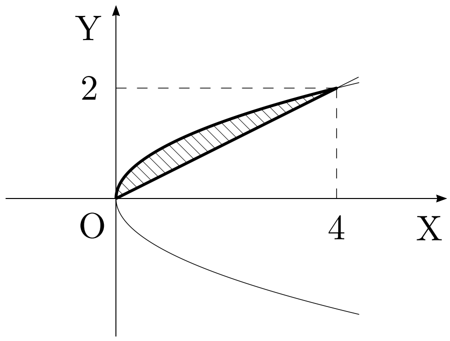
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

10.24 Observaţie. Dacă mulţimea D nu este simplă faţă de niciuna dintre axele de coordonate, atunci împărţim domeniul D în domenii mai mici care sunt simple faţă de cel puţin una dintre axe şi apoi aplicăm proprietatea de aditivitate a integralei duble faţă de domeniul de integrare.

10.25 Exemplu. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul

$$D = \left\{ (x,y) |\, y^2 \le x,\ y \ge \frac{x}{2} \right\}.$$

Frontiera domeniului D este dată de parabola $y^2 = x$ şi dreapta $y = \frac{x}{2}$. Punctele de intersecţie ale celor două curbe se determină rezolvând sistemul



$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Rezultă ecuaţia $y^2 = 2y$, adică $y^2 - 2y = 0$, cu soluţiile $y = 0$ şi $y = 2$. Pentru $y = 0$, obţinem $x = 0$, iar pentru $y = 2$, avem $x = 4$. Putem scrie

$$D = \left\{ (x,y) |\, 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x} \right\}.$$

Rezultă

$$\iint_D xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^4 x \frac{y^2}{2} \bigg|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) \mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

Aplicaţii ale integralei duble

10.26 Definiţie. *Spunem că o mulţime plană mărginită D are arie dacă funcţia caracteristică a mulţimii*

$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \end{cases}$$

este o funcţie integrabilă pe $\mathbb{R}^2$. În acest caz, aria mulţimii D se calculează cu formula

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.27 Exemplu. Masa unei plăci plane de grosime neglijabilă care are forma unui domeniu plan D, iar densitatea punctuală este dată de funcţia $\rho : D \to \mathbb{R}$ se calculează cu formula

$$m = \iint_D \rho(x,y) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Centrul de greutate al plăcii are coordonatele

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_D x\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iint_D y\rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_D \rho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

10.3 Schimbarea de variabile în integrala dublă

10.28 Teoremă. *Fie Δ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$ şi $T : \Delta \to \mathbb{R}^2$ o aplicaţie injectivă de clasă C^1 astfel încât jacobianul transformării J să fie diferit de zero în orice punct din Δ. Fie $D = T(\Delta)$. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta (f \circ T)(u,v)\,|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

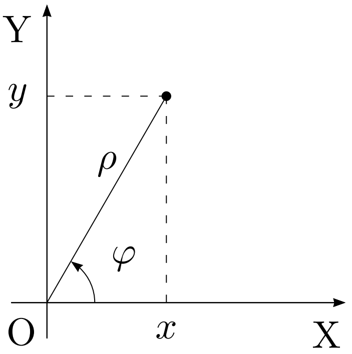
10.29 Observaţie. Când se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \quad (u,v) \in \Delta$$

jacobianul se calculează cu formula determinantului matricii lui Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$. Noul domeniu Δ se obţine determinând frontiera acestuia din ecuaţiile frontierei vechiului domeniu D prin înlocuirea lui x cu $x(u,v)$ şi y cu $y(u,v)$.

În cazul în care frontiera domeniului D este cerc sau arc de cerc, este utilă folosirea coordonatelor polare ρ şi φ. Se face schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho \geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi \in [0, 2\pi). \end{cases}$$



Jacobianul transformării este

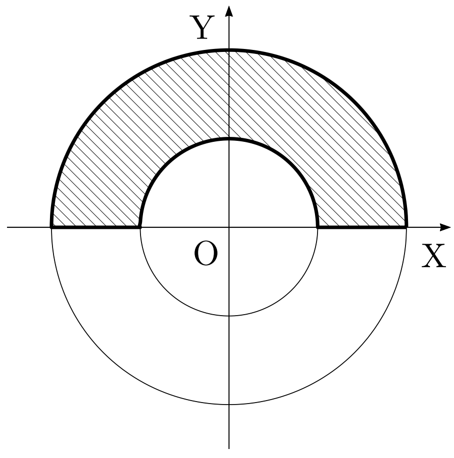
$$J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.$$

10.30 Exemplu. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ unde D este mulţimea

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0 \right\}.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$



Din condiţia $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ obţinem $1 \leq \rho^2 \leq 4$, adică $\rho \in [1,2]$. Din $y \geq 0$ se obţine inegalitatea $\sin\varphi \geq 0$, adică $\varphi \in [0,\pi]$. Noul domeniu este

$$\Delta = \left\{ (\rho,\varphi) \,|\, 0 \leq \varphi \leq \pi,\ 1 \leq \rho \leq 2 \right\}.$$

Jacobianul este $|J| = \rho$. Valoarea integralei este

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \left(\int_1^2 e^{-\rho^2} \rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi = \pi \left. \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \right|_1^2 = \frac{\pi}{2e}\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

10.4 Formula lui Green

10.31 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu una dintre axe. Fie C curba simplă, închisă care descrie frontiera domeniului D, parcursă în sens direct (sensul în care domeniul D se găseşte la stânga). Fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1 pe D. Atunci*

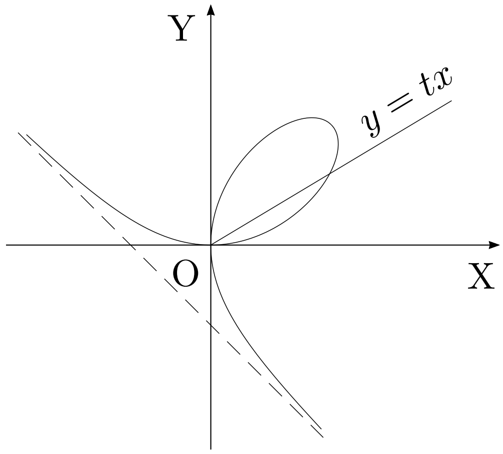
$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

10.32 Observaţie. Formula se poate folosi şi pentru un domeniu D care este o reuniune finită de domenii simple în raport cu una dintre axe.

10.33 Observaţie. Formula lui Green ne permite să găsim aria unui domeniu mărginit de o curbă netedă de ecuaţie dată. Se poate folosi oricare din formulele

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C x\,\mathrm{d}y = -\int_C y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

10.34 Exemplu. Să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes: $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$.



Pentru a parametriza această curbă o intersectăm cu o dreaptă $y = tx$. Curba are punct dublu în origine, iar axele OX şi OY sunt tangente buclei. Cum t este panta dreptei, rezultă că $t \in [0, \infty)$. Se obţine

$$C\colon \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\[2ex] y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \in [0, \infty).$$

Aria foliului lui Descartes va fi

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{2t^2 - t^5 - t^2 + 2t^5}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3a^2}{2}\cdot \left.\frac{-1}{1+t^3}\right|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}.
\end{aligned}$$