

Curs 10

Transformata Fourier

10.1 Transformata Fourier integrală (TF)

10.1 Definiție. Funcția $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ definită prin

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (10.1)$$

se numește **transformata Fourier integrală** a funcției f .

10.2 Observație. Integrala din (10.1) este o integrală improprie în sensul valorii principale, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \text{f.p.} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-x}^x e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Ea se poate scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} [\cos(\omega t) \operatorname{Re} f(t) + \sin \omega t \operatorname{Im} f(t)] dt + i \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega t \operatorname{Im} f(t) - \sin(\omega t) \operatorname{Re} f(t)] dt$$

și este convergentă, dacă cele două integrale care o compun sunt convergente.

10.3 Notăție. Transformata Fourier integrală sau simplu transformata Fourier a funcției f se mai notează și

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F} \{ f(t) \} (\omega).$$

În domeniul ingineriei electrice, o altă formă întâlnită a transformatei Fourier este

$$\mathcal{F} \{ f(t) \} (\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} f(t) dt.$$

În acest caz, ν reprezintă frecvența de oscilație a semnalului măsurată în Hertz (sau oscilații pe secundă) și este legată de frecvența unghiulară ω prin relația $\omega = 2\pi\nu$.

Unii definesc tranformata Fourier prin

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt,$$

pentru a avea o formă asemănătoare și pentru transformata Fourier inversă.

10.4 Definiție. O funcție $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește *absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$* dacă integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt$$

este convergentă. Notăm cu $\|f\|_1$, valoarea ei, iar prin $L_1(\mathbb{R})$ vom desemna spațiul funcțiilor complexe absolut integrabile pe $\mathbb{R}$.

10.5 Teoremă. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție din $L_1(\mathbb{R})$. Atunci $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ este o funcție mărginită.

Demonstrație. Pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ avem

$$|\hat{f}(\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-i\omega t}| \cdot |f(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt = \|f\|_1.$$

Aceasta demonstrează, pe de o parte, absolut convergența integralei $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) \, dt$ și deci, și convergența ei, iar pe de altă parte mărginirea lui $\hat{f}$. $\square$

10.6 Teoremă. Fie $f \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci $\hat{f}$ este o funcție uniformă continuă pe $\mathbb{R}$.

Demonstrație. Pentru orice ω și h numere reale și orice $x > 0$ avem

$$\begin{aligned} |\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} (e^{-iht} - 1) \, dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R} \setminus [-x, x]} |f(t)| \cdot |e^{-iht} - 1| \, dt + \int_{-x}^x |f(t)| \cdot |e^{-iht} - 1| \, dt. \end{aligned}$$

Folosind inegalitățile

$$\begin{aligned} |e^{-iht} - 1| &\leq |e^{-iht}| + 1 = 2 \\ |e^{-iht} - 1| &= \left| -i \int_0^{ht} e^{-iu} \, du \right| \leq \left| \int_0^{ht} |e^{-iu}| \, du \right| = |ht|, \end{aligned}$$

deducem

$$|\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)| \leq 2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-x, x]} |f(t)| \, dt + \int_{-x}^x |f(t)| |ht| \, dt \leq 2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-x, x]} |f(t)| \, dt + x |h| \|f\|_1.$$

Pentru că f este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, rezultă că

$$\int_{\mathbb{R} \setminus [-x, x]} |f(t)| \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt - \int_{-x}^x |f(t)| \, dt$$

ține la zero când x tinde la infinit. Pe de altă parte, putem alege h care să tindă la zero astfel încât $x|h|$ să tindă la zero.

Am demonstrat că diferența $\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)$ tinde la zero atunci când h tinde la zero, indiferent de ω . Acest lucru demonstrează continuitatea uniformă a transformatei Fourier. $\square$

10.7 Exemplu. Pentru $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, funcția $\chi_{[a, b]}$ definită prin

$$\chi_{[a, b]}(t) = \begin{cases} 1, & t \in [a, b] \\ 0 & t \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \end{cases}$$

este absolut integrabilă și are transformata Fourier

$$\hat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = \begin{cases} \frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{(b-a)\omega}{2}\right) e^{-i\omega\frac{a+b}{2}}, & \omega \neq 0, \\ b-a, & \omega = 0. \end{cases}$$

Într-adevăr, $\hat{\chi}_{[a,b]}(\omega) = \int_a^b e^{-i\omega t} dt$. Dacă $\omega = 0$ atunci $\int_a^b e^{-i\omega t} dt = b-a$. Dacă $\omega \neq 0$, atunci

$$\int_a^b e^{-i\omega t} dt = \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \Big|_a^b = \frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega} = \frac{2}{\omega} \cdot e^{-i\omega\frac{a+b}{2}} \cdot \frac{e^{-i\omega\frac{b-a}{2}} - e^{i\omega\frac{b-a}{2}}}{-2i} = \frac{2}{\omega} e^{-i\omega\frac{a+b}{2}} \sin \frac{(b-a)\omega}{2}.$$

Observăm că această funcție $\hat{\chi}_{[a,b]}$ are proprietățile de a fi mărginită, continuă pe $\mathbb{R}$, cu limita la $\pm\infty$ egală cu zero.

10.8 Teoremă. Fie $f \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci

$$\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Demonstrație. Din exemplul anterior am observat că $\chi_{(a,b)}(t)$ are proprietatea de a avea limita la infinit egală cu zero.

Orice funcție în scară de forma

$$s(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot \chi_{(a_k, b_k)}(t), \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad a_k < b_k$$

are proprietatea de a avea limita la infinit egală cu zero.

Orice funcție $f \in L_1(\mathbb{R})$ poate fi aproximată oricât de bine prin funcții în scară, iar acest lucru demonstrează că f are limita la infinit egală cu zero. $\square$

10.9 Exemplu. Vom arăta printr-un exemplu că ultimile două proprietăți ale transformatei Fourier nu rămân adevărate dacă funcția nu este absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$.

Fie funcția continuă sinc definită pentru orice $t \neq 0$ prin $\text{sinc}(t) = \frac{\sin t}{t}$. Conform Criteriului lui Dirichlet, această funcție este integrabilă pe $\mathbb{R}$, fără să fie absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$. Datorită parității, avem

$$\widehat{\text{sinc}}(\omega) = 2 \int_0^\infty \cos \omega t \cdot \frac{\sin t}{t} dt.$$

Folosind proprietățile transformatei Laplace, avem

$$\begin{aligned} \widehat{\text{sinc}}(\omega) &= 2 \cdot \mathcal{L} \left\{ \frac{\cos \omega t \cdot \sin t}{t} \right\} (0) = \int_0^\infty [\mathcal{L} \{ \sin t(\omega+1) \} (u) - \mathcal{L} \{ \sin t(\omega-1) \} (u)] du \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{\omega+1}{u^2 + (\omega+1)^2} - \frac{\omega-1}{u^2 + (\omega-1)^2} \right] du = \arctg \frac{u}{\omega+1} - \arctg \frac{u}{\omega-1} \Big|_0^\infty. \end{aligned}$$

Obținem

$$\widehat{\text{sinc}}(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| > 1 \\ \pi, & |\omega| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & |\omega| = 1. \end{cases}$$

10.10 Observație. Dacă avem o funcție pară f pentru care transformata Fourier există, atunci aceasta se poate calcula cu formula

$$\hat{f}(\omega) = 2 \int_0^\infty \cos \omega t \cdot f(t) dt$$

iar dacă f este o funcție impară, atunci

$$\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^\infty \sin \omega t \cdot f(t) dt.$$

10.11 Definiție. *Funcția*

$$\hat{f}_c(\omega) = \int_0^\infty \cos \omega t \cdot f(t) dt$$

se numește **transformata Fourier cosinus**, iar funcția

$$\hat{f}_s(\omega) = \int_0^\infty \sin \omega t \cdot f(t) dt$$

se numește **transformata Fourier sinus**.

10.1.1 Proprietățile transformatei Fourier

10.12 Teoremă. Transformata Fourier este liniară, adică pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ și orice f, g pentru care există transformata Fourier, funcția $\alpha f + \beta g$ admite transformată Fourier și

$$\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \cdot \hat{f} + \beta \cdot \hat{g}.$$

Demonstrație. Proprietatea rezultă din liniaritatea integralei. □

10.13 Teoremă. Dacă funcția $|f(t)|(1 + |t|)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$ atunci

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = -i \mathcal{F}\{tf(t)\}(\omega).$$

Demonstrație. Condiția ca $|f(t)|(1 + |t|)$ să fie integrabilă pe $\mathbb{R}$, asigură atât absolut integrabilitatea pe $\mathbb{R}$ a lui f cât și a funcției $tf(t)$. Folosind definiția derivatei, avem

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\omega + h) - \hat{f}(\omega)}{h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \cdot \frac{e^{-iht} - 1}{h} dt.$$

Pentru orice $h \neq 0$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \cdot \frac{e^{-iht} - 1}{h} dt - \int_{-\infty}^{\infty} (-it) f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left| \frac{e^{-iht} - 1 + iht}{h} \right| dt.$$

Rămâne să demonstrăm că integrala din partea dreaptă a inegalității de mai sus poate fi făcută oricât de mică atunci când h tinde la zero. Folosind inegalitatea

$$|e^{-iht} - 1 + iht| = \left| -i \int_0^{ht} (e^{-iu} - 1) du \right| \leq \left| \int_0^{ht} \min(2, |u|) du \right| \leq \min \left(2|ht|, \frac{|h|^2 |t|^2}{2} \right)$$

putem scrie, pentru orice $x > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left| \frac{e^{-iht} - 1 + iht}{h} \right| dt \leq 2 \int_{\mathbb{R} \setminus [-x, x]} |tf(t)| dt + \frac{x|h|}{2} \|tf(t)\|_1.$$

Alegând x să tindă la infinit și h să tindă la zero astfel încât xh tinde la zero, teorema este demonstrată. □

10.14 Corolar. Fie $n \in \mathbb{N}$. Dacă funcția $|f(t)|(1 + |t|^n)$ este integrabilă pe $\mathbb{R}$ atunci

$$\frac{d^n}{d\omega^n} \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\}(\omega).$$

Demonstrație. Se face prin inducție, aplicând teorema precedentă. □

10.15 Teoremă. Fie funcția derivabilă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ cu proprietatea că $f' \in L_1(\mathbb{R})$ și $f(\pm\infty) = 0$. Atunci

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = i\omega \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega).$$

Demonstrație. Folosim formula de integrare prin părți.

$$\mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot f'(t) dt = e^{-i\omega t} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt = i\omega \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega).$$

□

10.16 Corolar. Fie $n \in \mathbb{N}$. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ o funcție de n ori derivabilă pe $\mathbb{R}$ cu proprietatea că $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_1(\mathbb{R})$ și $f^{(k)}(\pm\infty) = 0$, pentru orice $0 \leq k \leq n-1$. Atunci

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\}(\omega) = (i\omega)^n \cdot \mathcal{F}\{f(t)\}(\omega).$$

Demonstrație. Se face prin inducție, aplicând teorema precedentă. □

10.17 Exemplu. Vom calcula transformata Fourier a funcției $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$.

Avem

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{-ite^{-at^2}\}(\omega) = \frac{i}{2a} \mathcal{F}\{f'(t)\}(\omega) = -\frac{\omega}{2a} \cdot \hat{f}(\omega).$$

Rezolvând această ecuație diferențială liniară, obținem soluția $\hat{f}(\omega) = Ce^{-\frac{\omega^2}{4a}}$, unde

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-at^2} dt = 2 \int_0^{\infty} e^{-u} \frac{1}{2\sqrt{a}} u^{\frac{1}{2}-1} du = \frac{1}{\sqrt{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

Am demonstrat formula

$$\mathcal{F}\{e^{-at^2}\}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4a}}, \quad a > 0.$$

10.18 Teoremă. Fie $f \in L_1(\mathbb{R})$ astfel încât $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci

$$\frac{f(t+) + f(t-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

În particular, în orice punct $t \in \mathbb{R}$ în care funcția f este continuă, avem

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Demonstrație. Fie $a > 0$. Notăm

$$I(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-a\omega^2 + i\omega t} d\omega.$$

Prin trecere la limită, avem

$$\lim_{a \searrow 0} I(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Pe de altă parte,

$$I(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega^2 + i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\omega u} du \right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\omega^2} \cdot e^{-i\omega(u-t)} d\omega \right) du.$$

Aplicând exemplul anterior și apoi făcând schimbarea de variabilă $u = t + 2\sqrt{a}v$ se obține:

$$I(a, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{-\frac{(u-t)^2}{4a}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t + 2\sqrt{a}v) e^{-v^2} dv.$$

Cu schimbarea de variabilă $v = -w$ obținem

$$I(a, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - 2\sqrt{a}w) e^{-w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t + 2\sqrt{a}v) + f(t - 2\sqrt{a}v)}{2} e^{-v^2} dv.$$

Știind că $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$, prin trecere la limită, se obține

$$\lim_{a \searrow 0} I(a, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t+) + f(t-)}{2} e^{-v^2} dv = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

□

10.19 Observație. Dacă f este continuă și absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, cu transformata Fourier o funcție absolut integrabilă pe $\mathbb{R}$, atunci

$$\mathcal{F}\left\{\hat{f}(\omega)\right\}(t) = 2\pi \cdot f(-t).$$

10.20 Definiție. Fie $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Produsul de convoluție al funcțiilor f și g este funcția

$$(f \star g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(t - u) du.$$

10.21 Teoremă. Fie $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ are loc

$$\widehat{(f \star g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

Demonstrație. Dacă $f, g \in L_1(\mathbb{R})$ atunci $f \star g \in L_1(\mathbb{R})$. Acest lucru rezultă din

$$\begin{aligned} \|f \star g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |(f \star g)(t)| dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \cdot |g(t - u)| du \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t - u)| dt \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(v)| dv \right) du = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1. \end{aligned}$$

Calculăm transformata Fourier a produsului de convoluție.

$$\begin{aligned} \widehat{(f \star g)}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot g(t - u) du \right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t - u) dt \right) du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \cdot e^{-i\omega v} g(v) dv \right) du = \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega). \end{aligned}$$

□

Originalul	Imaginea	Originalul	Imaginea
$f(t)$	$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt$	$f(t)$	$\hat{f}(\omega)$
$\chi_{[a,b]}(t)$	$\frac{2}{\omega} \sin\left(\frac{(b-a)\omega}{2}\right) e^{-i\omega \frac{a+b}{2}}$	$e^{iat} f(t)$	$\hat{f}(\omega - a)$
$\left(1 - \frac{ t }{ a }\right) \cdot H\left(1 - \frac{ t }{ a }\right)$	$\frac{4}{ a \omega^2} \sin^2 \frac{ a \omega}{2}$	$f(t - a)$	$e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega)$
$e^{- a t^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{ a }} e^{-\frac{\omega^2}{4 a }}$	$(f \star g)(t)$	$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$
$e^{- a t }$	$\frac{2 a }{a^2 + \omega^2}$	$\hat{f}(t)$	$2\pi f(-\omega)$
$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{ a } e^{- a \omega }$	$(-it)^n f(t)$	$[\hat{f}(\omega)]^{(n)}$
$\frac{1}{(t^2 + a^2)^2}$	$\frac{\pi}{2a^2} e^{- a \omega } \left(\frac{1}{ a } + \omega \right)$	$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \cdot \hat{f}(\omega)$

Figura 10.1: Transformata Fourier

10.22 Corolar. Fie $f, g \in L_1(\mathbb{R})$. Atunci, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ are loc

$$(\widehat{fg})(\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} \star \hat{g})(\omega).$$

Demonstrație. Folosim inversa transformatei Fourier și relația $\mathcal{F}\{f(-t)\}(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}(-\omega)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t) \cdot g(t)\}(\omega) &= \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}\left\{\widehat{\hat{f}(\omega)}(-t) \cdot \widehat{\hat{g}(\omega)}(-t)\right\}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}\left\{\widehat{(\hat{f} \star \hat{g})}(-t)\right\}(\omega) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \mathcal{F}\left\{\widehat{(\hat{f} \star \hat{g})}(t)\right\}(-\omega) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} \star \hat{g})(\omega). \end{aligned}$$

□

10.23 Teoremă. Fie f pentru care este definită transformata Fourier. Atunci

$$\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\}(\omega) = \hat{f}(\omega - a) \quad \text{și} \quad \mathcal{F}\{f(t - a)\}(\omega) = e^{-ia\omega} \hat{f}(\omega), \quad \text{pentru orice } a, \omega \in \mathbb{R}.$$

Demonstrație. Se aplică definiția. □

10.2 Aplicații la rezolvarea ecuațiilor diferențiale

10.24 Exemplu. Să se determine soluția ecuației diferențiale $x'' = tx$, care verifică condiția $\lim_{|t| \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

Aplicăm transformata Fourier. Avem $-\omega^2 \hat{x} = i(\hat{x})'$. Ecuația liniară $(\hat{x})' - i\omega^2 \hat{x} = 0$ are soluția $\hat{x} = Ce^{i\frac{\omega^3}{3}}$. Trecând la inversă, obținem

$$x(t) = \frac{C}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{\omega^3}{3} + i\omega t} d\omega = \frac{C}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{\omega^3}{3} + \omega t\right) d\omega = CAi(t),$$

unde $Ai(t)$ este funcția lui Airy.

10.25 Exemplu. Să se rezolve ecuația $-x'' + a^2x = f(t)$, când x verifică $\lim_{|t| \rightarrow \infty} x(t) = 0$ și $a > 0$ este un parametru dat.

Aplicând transformata Fourier obținem $\omega^2 \hat{x} + a^2 \hat{x} = \hat{f}$, de unde

$$\hat{x}(\omega) = \hat{f}(\omega) \cdot \frac{1}{\omega^2 + a^2} = \hat{f}(\omega) \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2a} e^{-a|t|} \right\}(\omega).$$

Soluția ecuației va fi

$$x(t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-a|t-u|} du.$$

10.26 Exemplu. Să se determine soluția ecuației lui Laplace $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$, unde $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$, care verifică condițiile $u(x, 0) = g(x)$ și $\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$.

Considerăm transformata Fourier a funcției u în variabila x .

$$U(\omega, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} u(x, y) dx.$$

Ecuația se rescrie $-\omega^2 U + U''_{y^2} = 0$, iar condițiile devin $U(\omega, 0) = \hat{g}(\omega)$ și $\lim_{y \rightarrow \infty} U(\omega, y) = 0$. Ecuația este liniară de ordinul 2 în variabila y , cu soluția $U = C_1(\omega) e^{|\omega|y} + C_2(\omega) e^{-|\omega|y}$. Din condiția $U \rightarrow 0$, atunci când $y \rightarrow \infty$, deducem că $C_1(\omega) = 0$. Din condiția $U(\omega, 0) = \hat{g}(\omega)$ deducem că $C_2 = \hat{g}$. Soluția se scrie

$$U(\omega, y) = \hat{g}(\omega) \cdot e^{-y|\omega|}.$$

Fiindcă $e^{-y|\omega|} = \hat{h}(\omega)$ cu $h(x) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$, obținem

$$u(x, y) = (g \star h)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{yg(u)}{(x-u)^2 + y^2} du.$$

10.27 Exemplu. Să se determine soluția ecuației căldurii $u''_t = a^2 u''_{x^2}$ în bara infinită, cu condiția inițială $u(x, 0) = f(x)$, unde $a > 0$.

Fie $U(\omega, t)$ transformata Fourier a funcției $u(\cdot, t)$. Ecuația devine

$$U'_t + a^2 \omega^2 U = 0, \quad U(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Obținem soluția

$$U(\omega, t) = C(\omega) e^{-a^2 \omega^2 t}, \quad \text{cu } C(\omega) = \hat{f}(\omega).$$

Ținând cont că $\mathcal{F} \left\{ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2a\sqrt{\pi t}}} \right\}(\omega) = e^{-a^2 \omega^2 t}$ rezultă

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-\frac{(x-u)^2}{4a^2 t}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + 2a\sqrt{t}v) e^{-v^2} dv, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0.$$

10.28 Exemplu. Să se determine soluția ecuației coardei vibrante infinite $z''_{t^2} = \nu^2 z''_{x^2}$ cu condițiile inițiale $z(x, 0) = f(x)$, $z'_t(x, 0) = g(x)$, unde $\nu > 0$.

Fie $Z(\omega, t)$ transformata Fourier a funcției $z(\cdot, t)$. Ecuația devine

$$Z''_{t^2} + \nu^2 \omega^2 Z = 0, \quad Z(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad Z'_t(\omega, 0) = \hat{g}(\omega).$$

Obținem soluția

$$Z(\omega, t) = C_1(\omega) \cos \nu \omega t + C_2(\omega) \sin \nu \omega t.$$

Din condițiile inițiale se obțin și constantele

$$C_1(\omega) = \hat{f}(\omega) \quad \text{și} \quad C_2(\omega) = \frac{\hat{g}(\omega)}{\nu\omega}, \quad \omega \neq 0.$$

Folosind formula $\hat{\chi}_{[-\nu t, \nu t]}(\omega) = \frac{2}{\omega} \sin \nu\omega t$, putem scrie soluția sub forma

$$Z(\omega, t) = \frac{1}{2} \hat{f}(\omega) (e^{i\nu\omega t} + e^{-i\nu\omega t}) + \frac{1}{2\nu} \hat{g}(\omega) \cdot \hat{\chi}_{[-\nu t, \nu t]}(\omega).$$

Rezultă

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \frac{1}{2} [f(x + \nu t) + f(x - \nu t)] + \frac{1}{2\nu} (g \star \chi_{[-\nu t, \nu t]})(x) \\ &= \frac{1}{2} [f(x + \nu t) + f(x - \nu t)] + \frac{1}{2\nu} \int_{x-\nu t}^{x+\nu t} g(u) \, du, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \end{aligned}$$

10.29 Exemplu. Să se determine soluția ecuației $u'_t + \nu u'_x = 0$, care verifică condiția $u(x, 0) = f(x)$.

Fie $U(\omega, t)$ transformata Fourier a funcției $u(\cdot, t)$. Ecuația devine

$$U'_t + \nu i\omega U = 0, \quad U(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Soluția acestei ecuații liniare omogene este

$$U(\omega, t) = C(\omega) e^{-i\nu\omega t}, \quad \text{cu } C(\omega) = U(\omega, 0) = \hat{f}(\omega).$$

Soluția ecuației cu derivate parțiale este

$$u(x, t) = f(x - \nu t).$$