Curs 11

Integrale duble

11.1 Integrala dublă pe dreptunghi

11.1 Definiţie. *Fie $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel încât $a < b$ şi $c < d$ şi fie $D = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ un dreptunghi. Funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe D dacă există numărul real I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice diviziune a intervalului $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ şi orice diviziune a intervalului $[c, d]$, $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$, care formează reţeaua de dreptunghiuri mai mici $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ (unde $k = 1, \ldots, n$ şi $j = 1, \ldots, m$) aşa încât*

$$\|\Delta\| = \max(\operatorname{diam}(D_{kj})) = \max \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2} < \delta$$

şi pentru orice alegere a punctelor intermediare $P_{kj} \in D_{kj}$, să avem

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{kj}) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \right| < \varepsilon.$$

11.2 Notaţie. Dacă numărul I există, atunci el este unic şi se notează $\displaystyle\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

11.3 Observaţie. Integrala dublă a unei funcţii f pe un dreptunghi poate fi privită ca limita

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f(P_{kj}) \cdot \mathcal{A}ria(D_{kj}).$$

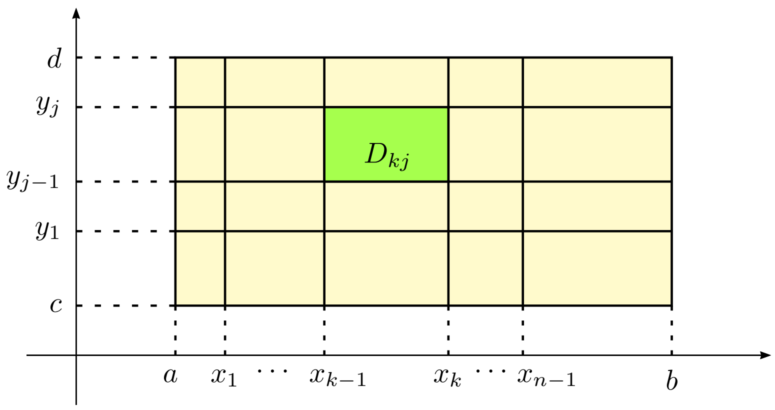


Figura 11.1: Împărţirea dreptunghiului D în reţeaua de dreptunghiuri D_{kj}

11.4 Interpretare. Să considerăm două exemple care ne conduc la noţiunea de integrală dublă. Mai întâi, avem o placă plană sub forma dreptunghiului $D \subset \mathbb{R}^2$. Placa este neomogenă, având densitatea punctuală dată de funcţia $\rho : D \to \mathbb{R}$. Ne propunem să calculăm masa acestei plăci.

Împărţim placa $D = [a, b] \times [c, d]$ în dreptunghiuri mici $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$, unde punctele x_k, $k = 1, \ldots, n$ reprezintă o diviziune a intervalului $[a, b]$, iar y_j, $j = 1, \ldots, m$ reprezintă o diviziune a intervalului $[c, d]$. Această împărţire o facem uniform, în sensul că diagonala fiecărui dreptunghi este suficient de mică şi nu depăşeşte o anumită valoare. Fie $P_{kj} = (\xi_k, \eta_j)$ un punct oarecare din dreptunghiul mic D_{kj}. Masa fiecărui dreptunghi mic este aproximativ egală cu produsul dintre aria dreptunghiului mic şi densitatea în punctul (ξ_k, η_j), iar masa plăcii este suma tuturor maselor dreptunghiurilor mici, adică

$$m_D \approx \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{D_{kj}} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_k, \eta_j) \cdot \mathcal{A}ria\, D_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \rho(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

Cu cât dreptunghiurile sunt mai mici cu atât valoarea sumei calculate se apropie de valoarea masei plăcii. La limită $m_D = \iint_D \rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

11.5 Interpretare. Avem o suprafaţă în forma explicită $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$. Ne propunem să calculăm volumul corpului mărginit de această suprafaţă, planul XOY şi suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu axa OZ şi curba directoare frontiera dreptunghiului D.

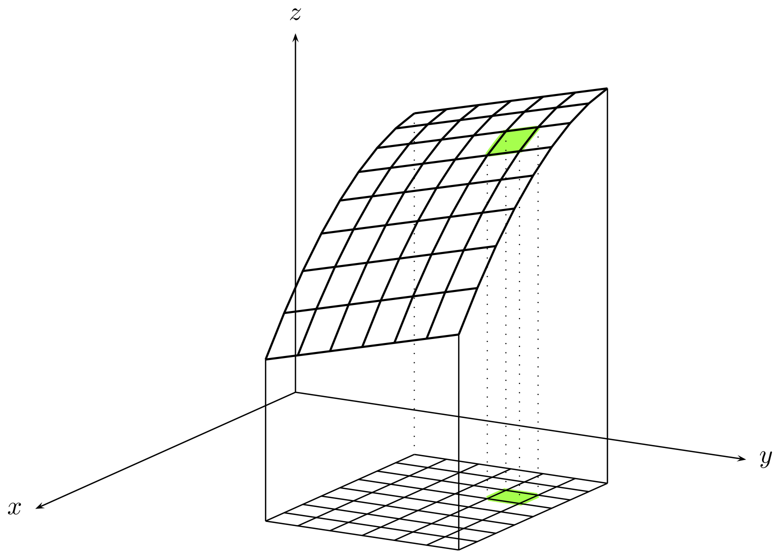


Figura 11.2: Volumul unui corp mărginit de suprafaţa $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ se poate calcula cu ajutorul integralei duble $\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

Împărţim dreptunghiul D în dreptunghiuri mai mici $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$, unde punctele x_k, $k = 1, \ldots, n$ reprezintă o diviziune a intervalului $[a, b]$, iar y_j, $j = 1, \ldots, m$ reprezintă o diviziune a intervalului $[c, d]$. În fiecare dreptunghi mic considerăm un punct $(\xi_k, \eta_j) \in D_{kj}$. Aproximăm volumul cu suma volumelor paralelipipedelor având ca bază dreptunghiurile D_{ij} şi ca înălţime valoarea $f(\xi_k, \eta_j)$. Rezultă

$$\mathcal{V}olum \approx \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot \mathcal{A}ria\, D_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(\xi_k, \eta_j) \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}).$$

La limită se obţine volumul $\mathcal{V}olum = \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$.

11.6 Propoziţie. *Dacă f este integrabilă pe dreptunghiul D atunci f este mărginită pe D.*

11.7 Observaţie. Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe un dreptunghi $D = [a, b] \times [c, d]$. Considerăm diviziunea $\Delta = \cup D_{kj}$, $D_{kj} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{j-1}, y_j]$. Definim

$$\begin{aligned} M_{kj} &= \sup_{(x,y)\in D_{kj}} f(x, y) \\ m_{kj} &= \inf_{(x,y)\in D_{kj}} f(x, y) \\ S(f, \Delta) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} M_{kj} \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}) \\ s(f, \Delta) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} m_{kj} \cdot (x_k - x_{k-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Se poate demonstra că f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă $S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$ tinde la zero când $\|\Delta\|$ tinde la zero. În acest caz,

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sup s(f, \Delta) = \inf S(f, \Delta).$$

11.8 Propoziţie. *Dacă f, g sunt două funcţii integrabile pe dreptunghiul D şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este integrabilă pe D şi*

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

11.9 Propoziţie. *Dacă f este o funcţie integrabilă şi pozitivă pe dreptunghiul D, atunci*

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \geq 0.$$

11.10 Propoziţie. *Dacă f este mărginită pe D şi $m \leq f(x, y) \leq M$, pentru orice $(x, y) \in D$, atunci*

$$m \cdot \mathcal{A}ria(D) \leq \iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \leq M \cdot \mathcal{A}ria(D).$$

11.11 Propoziţie. *Dacă f este continuă pe D atunci există $(c_1, c_2) \in D$ astfel încât*

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = f(c_1, c_2) \cdot \mathcal{A}ria(D).$$

Punctul (c_1, c_2) se găseşte pe segmentul care uneşte punctul de minim cu punctul de maxim.

11.12 Propoziţie. *Fie D un dreptunghi $[a, b] \times [c, d]$ şi fie $D_{k,j} = [x_{k-1}, x_n] \times [y_{j-1}, y_j]$ dreptunghiurile obţinute prin divizarea intervalului $[a, b]$ prin punctele $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ şi divizarea intervalului $[c, d]$ prin punctele $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$. Dacă f este integrabilă pe dreptunghiurile $D_{k,j}$, atunci f este integrabilă şi pe D şi*

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \iint_{D_{kj}} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

11.13 Teoremă (Formula de calcul)**.** *Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este o funcţie integrabilă pe dreptunghiul $D = [a, b] \times [c, d]$ şi pentru orice $x \in [a, b]$ integrala cu parametru $\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ există, atunci*

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Fie $\Delta_x : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ o diviziune intervalului $[a, b]$ şi $\Delta_y : c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ o diviziune a intervalului $[c, d]$. Fie $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ puncte alese arbitrar. Atunci $m_{kj} \leq f(\xi_k, y) \leq M_{kj}$, pentru orice $y \in [y_{j-1}, y_j]$. Integrând, rezultă

$$m_{kj}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leq M_{kj}(y_j - y_{j-1}).$$

Însumând, avem

$$\sum_{j=1}^{m} m_{kj}(y_j - y_{j-1}) \leq \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leq \sum_{j=1}^{m} M_{kj}(y_j - y_{j-1}).$$

Înmulţind aceste inegalităţi cu $(x_k - x_{k-1})$ şi însumând, obţinem

$$s(f, \Delta) \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y \leq S(f, \Delta).$$

Din definiţia sumelor $s(f, \Delta)$ şi $S(f, \Delta)$ şi integrabilitatea lui f pe D, rezultă

$$s(f, \Delta) \leq \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq S(f, \Delta).$$

Atunci

$$s(f,\Delta) - S(f,\Delta) \leq \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y - \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$$

şi pentru că diferenţa $S(f, \Delta) - s(f, \Delta)$ tinde la zero, când $\|\Delta\| \to 0$ rezultă că

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Pe de altă parte, considerând suma Riemann a integralei cu parametru $g(x) = \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y$ asociată diviziunii Δ_x, avem

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \int_c^d f(\xi_k, y)\,\mathrm{d}y = \lim_{\|\Delta_x\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Acest lucru demonstrează că

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

□

11.14 Observaţie. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right)\,\mathrm{d}y.$$

11.15 Exemplu. Să calculăm $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde $D = [1,2] \times [0,1]$.

Aplicăm formula de calcul şi avem

$$\iint_{[1,2]\times[0,1]} \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}y \right)\,\mathrm{d}x.$$

Calculăm integrala interioară.

$$\int_0^1 \frac{1}{1+xy}\,\mathrm{d}y = \left. \ln(1+xy) \right|_0^1 = \ln(1+x).$$

Atunci, integrând prin părţi, se obţine

$$\iint_D \frac{x}{1+xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = (1+x)\ln(1+x)\Big|_1^2 - \int_0^1 (1+x)\cdot\frac{1}{1+x} = 3\ln 3 - 2\ln 2 - 1.$$

11.2 Mulţimi de arie nulă

11.16 Definiţie. *Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^2$ are* **aria nulă** *dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există dreptunghiurile D_k $(k \geq 1)$ care acoperă mulţimea A şi a căror arie însumată nu depăşte valoarea ε:*

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}ria(D_k) < \varepsilon.$$

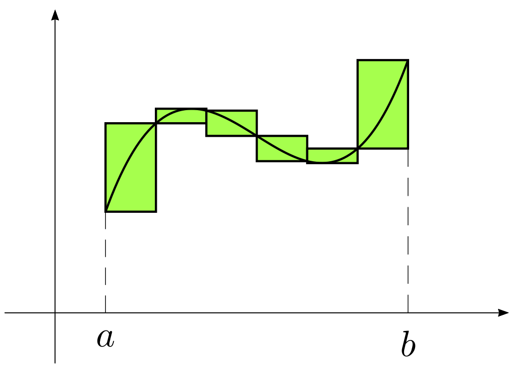


Figura 11.3: Graficul unei funcţii integrabile este o mulţime de arie nulă

11.17 Exemplu. Graficul unei funcţii integrabile f pe $[a,b]$, definit prin

$$G_f = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a,b],\ y = f(x) \,\}$$

este o mulţime de arie nulă.

Într-adevăr, pentru că f este integrabilă, diferenţa $S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$ tinde la zero când $\|\Delta\|$ tinde la zero. Pe de altă parte, dreptunghiurile $D_k = [x_{k-1}, x_k] \times [m_k, M_k]$ acoperă mulţimea G_f şi aria însumată a dreptunghiurilor D_k este $S(f,\Delta) - s(f,\Delta)$.

11.18 Exemplu. O curbă rectificabilă este o mulţime din $\mathbb{R}^2$ de arie nulă.

Într-adevăr, dacă numim mijlocul unui arc de curbă ca fiind acel punct de pe curbă pentru care lungimea până la origine este egală cu lungimea până la extremitate, atunci pătratul cu centrul în acest punct numit mijloc şi cu latura de lungime egală cu L (lungimea curbei), va acoperi în întregime curba. Continuând să înjumătăţim fiecare porţiune de pe curbă rezultată şi să luăm mijloacele lor şi să construim pătrate cu centrul în aceste mijloace cu latura de lungime egală cu jumătate din lungimea laturii pătratului de la pasul anterior, se obţine o acoperire a curbei. După $n+1$ înjumătăţiri, obţinem 2^n pătrate de latură $L/2^n$ care acoperă curba. Aria însumată a acestor pătrate este $L^2/2^n$, valoare ce tinde la 0, când n tinde la infinit.

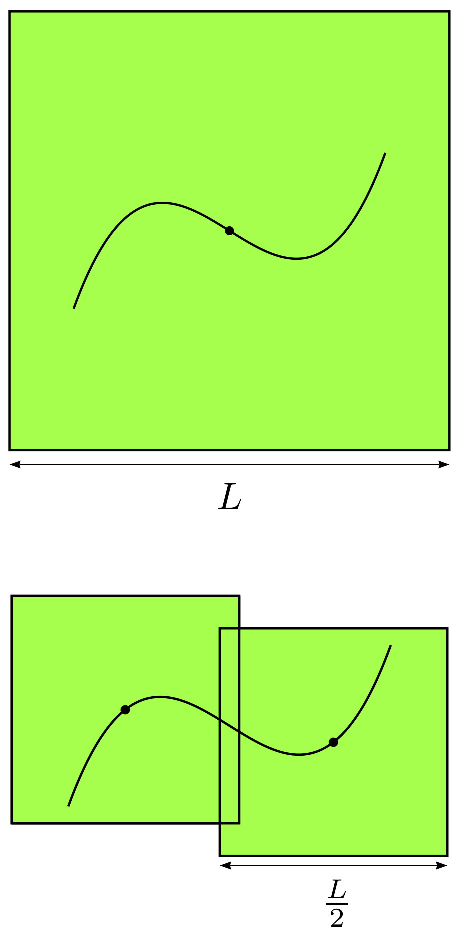


Figura 11.4: O curbă cu lungimea finită L poate fi acoperită cu 2^n pătrate de latură $\frac{L}{2^n}$

11.19 Observaţie. Există drumuri a căror suport nu este o mulţime de măsură nulă. Primele exemple au fost construite de Osgood şi Lebesgue în 1903[1].

11.20 Propoziţie. *Fie $f : D \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe un dreptunghi D. Atunci funcţia f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei f este de arie nulă.*

[1] W. Osgood, A Jordan curve of positive area, Transactions of the American Mathematical Society, 4 (1903), 107–112, H. Lebesgue, Sur le problème des aires, Bulletin de la Société Mathématique de France, 31 (1903), 197–203.

11.3 Integrale duble pe domenii simple

11.21 Definiţie. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime mărginită şi fie un dreptunghi $[a,b]\times[c,d]$ care conţine mulţimea D. Spunem că $f : D \to \mathbb{R}$ este* **integrabilă pe** D *dacă funcţia*

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \setminus D \end{cases}$$

este integrabilă pe $[a,b]\times[c,d]$. În acest caz scriem,

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

11.22 Observaţie. Se poate demonstra că valoarea integralei nu depinde de dreptunghiul care conţine mulţimea D şi nici de funcţia F, care prelungeşte funcţia f pe dreptunghiul $[a,b]\times[c,d]$.

Într-adevăr, fie $[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$ un alt dreptunghi care conţine mulţimea D şi fie funcţia $F_1 : [a_1,b_1]\times[c_1,d_1] \to \mathbb{R}$ care reprezintă prelungirea lui f la $[a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$. Putem găsi întotdeauna un alt dreptunghi M cu proprietatea că $[a,b]\times[c,d] \subset M$ şi $[a_1,b_1]\times[c_1,d_1] \subset M$. Definim funcţia $G : M \to \mathbb{R}$ prin

$$G(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in M \setminus D \end{cases}$$

Prin definiţie, $G(x,y) = F(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in [a,b]\times[c,d]$ şi $G(x,y) = F_1(x,y)$, pentru orice $(x,y) \in [a_1,b_1]\times[c_1,d_1]$. Deci,

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_M G(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a_1,b_1]\times[c,d]} F_1(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

11.23 Definiţie. *Fie $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[a,b]$, cu proprietatea că $g_1(x) \le g_2(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Mulţimea*

$$D = \{(x,y) |\, a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

se numeşte **domeniu simplu faţă de axa** OY.

11.24 Definiţie. *Fie $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ două funcţii continue pe $[c,d]$, cu proprietatea că $h_1(y) \le h_2(y)$ pentru orice $y \in [c,d]$. Mulţimea*

$$D = \{(x,y) |\, c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\},$$

se numeşte **domeniu simplu faţă de axa** OX.

11.25 Teoremă. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa OY*

$$D = \{(x,y) |\, a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

unde g_1, g_2 sunt funcţii continue pe $[a,b]$. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

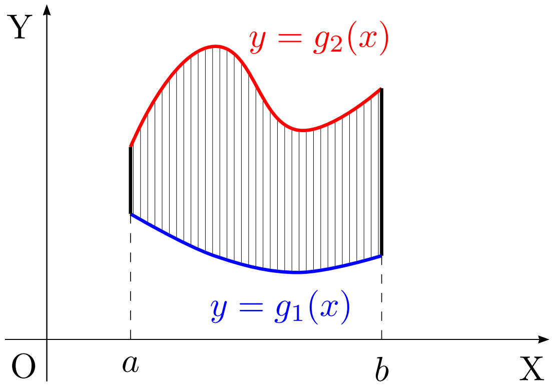


Figura 11.5: Un domeniu simplu în raport cu axa OY

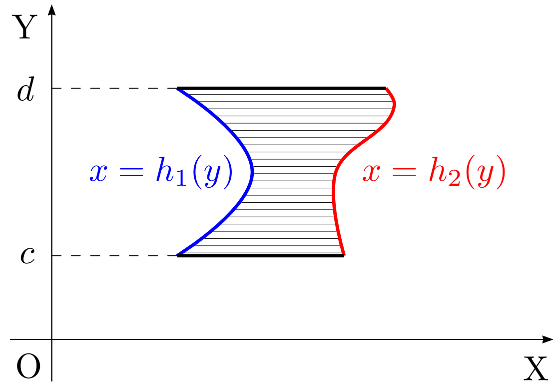


Figura 11.6: Un domeniu simplu în raport cu axa OX

Demonstraţie. Pentru că g_1 şi g_2 sunt funcţii continue pe intervalul mărginit şi închis $[a, b]$, există numerele reale $c = \inf_{x\in[a,b]} g_1(x)$ şi $d = \sup_{x\in[a,b]} g_2(x)$. Atunci $D \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Definim $F : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}$ prin

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in [a,b] \times [c,d] \setminus D \end{cases}$$

Funcţia F este discontinuă cel mult pe frontiera lui D. Frontiera lui D este formată din graficele funcţiilor continue g_1 şi g_2 şi eventual două segmente verticale. Înseamnă că frontiera lui D este o mulţime din $\mathbb{R}^2$ de arie nulă. Acest lucru arată că F este discontinuă cel mult pe o mulţime de arie nulă, deci este integrabilă pe $[a, b] \times [c, d]$. Rezultă

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{[a,b]\times[c,d]} F(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d F(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_c^{g_1(x)} F(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{g_2(x)}^{d} F(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

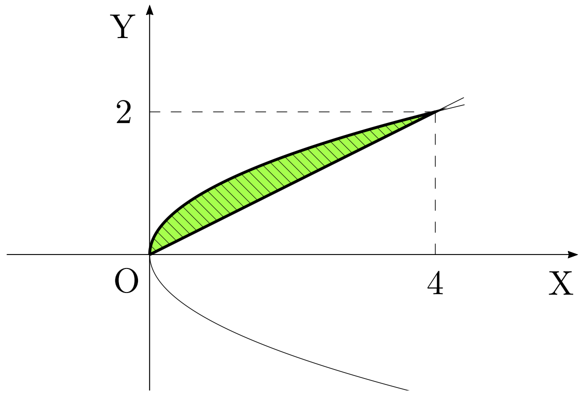
11.26 Teoremă. *Fie D un domeniu simplu în raport cu axa OX*

$$D = \{(x,y) |\, c \le y \le d,\ \ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

unde h_1, h_2 sunt funcţii continue pe $[c, d]$. Dacă $f : D \to \mathbb{R}$ este continuă pe D atunci

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

11.27 Observaţie. Dacă mulţimea D nu este simplă faţă de niciuna dintre axele de coordonate, atunci împărţim domeniul D în domenii mai mici care sunt simple faţă de cel puţin una dintre axe şi apoi aplicăm proprietatea de aditivitate a integralei duble faţă de domeniul de integrare.



11.28 Exemplu. Să se calculeze $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, unde D este domeniul

$$D = \left\{ (x,y) |\, y^2 \le x,\ y \ge \frac{x}{2} \right\}.$$

Frontiera domeniului D este dată de parabola $y^2 = x$ şi dreapta $y = \frac{x}{2}$. Punctele de intersecţie ale celor două curbe se determină rezolvând sistemul

$$\begin{cases} y^2 = x \\ y = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Rezultă ecuaţia $y^2 = 2y$, adică $y^2 - 2y = 0$, cu soluţiile $y = 0$ şi $y = 2$. Pentru $y = 0$, obţinem $x = 0$, iar pentru $y = 2$, avem $x = 4$. Putem scrie

$$D = \left\{ (x,y) |\, 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x} \right\}.$$

Rezultă

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^4 x\frac{y^2}{2}\Big|_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(x^2 - \frac{x^3}{4} \right) \mathrm{d}x = \frac{8}{3}.$$

11.4 Aplicaţii ale integralei duble

11.29 Definiţie. *Spunem că o mulţime plană mărginită D* **are arie** *dacă funcţia caracteristică a mulţimii*

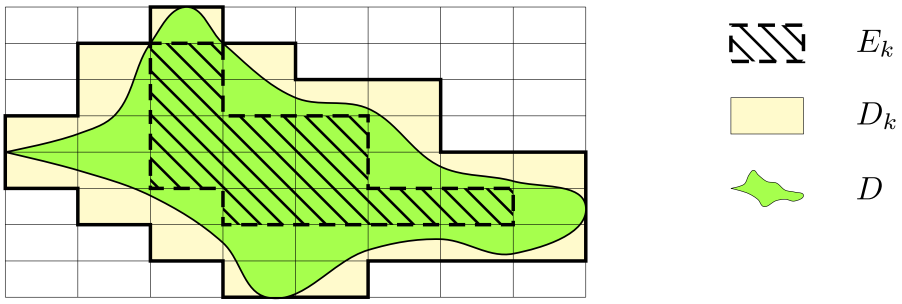
$$\chi_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus D. \end{cases}$$

este o funcţie integrabilă pe $\mathbb{R}^2$. În acest caz, aria mulţimii D se calculează cu formula

$$\mathcal{A}ria(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

11.30 Observaţie. O mulţime mărginită $D \subset \mathbb{R}^2$ are arie dacă şi numai dacă frontiera lui D este o mulţime de arie nulă.

Pentru că D este mărginită, există un pătrat P care conţine mulţimea D. Mulţimea D are arie dacă şi numai dacă funcţia caracteristică $\chi_D : P \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe P. Mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei χ_D este chiar frontiera lui D. Pe baza Propoziţiei **??**, funcţia χ_D va fi integrabilă pe P dacă şi numai dacă frontiera lui D este de arie nulă.



11.31 Observaţie. Aria unui domeniu D este marginea inferioară a sumei ariilor dreptunghiurilor unei reţele de dreptunghiuri cu diametru tinzând la zero care au puncte comune cu D sau marginea superioară a sumei ariilor dreptunghiurilor incluse în întregime în D.

$$\mathcal{A}ria(D) = \inf \sum_{D_k \cap D \neq \emptyset} \mathcal{A}ria(D_k) = \sup \sum_{E_k \subset D} \mathcal{A}ria(E_k).$$

11.32 Definiţie. *Masa unei plăci plane de grosime neglijabilă care are forma unui domeniu plan D, iar densitatea punctuală este dată de funcţia $\rho : D \to \mathbb{R}$ se calculează cu formula*

$$m = \iint_D \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Centrul de greutate al plăcii are coordonatele

$$x_G = \frac{\displaystyle\iint_D x\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \qquad y_G = \frac{\displaystyle\iint_D y\rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\iint_D \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}.$$

11.33 Exemplu. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale unei plăci omogene de forma domeniului mărginit de bucla cicloidei

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

şi axa OX.

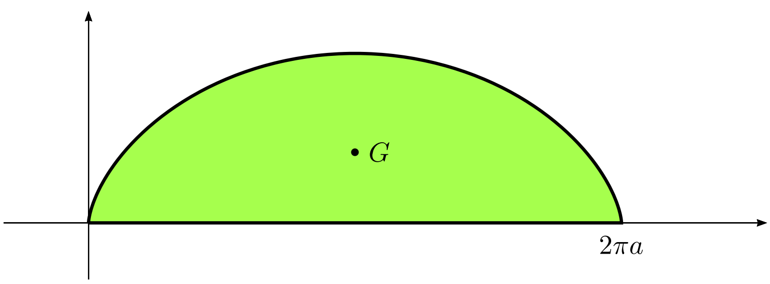


Figura 11.7: Domeniul mărginit de bucla unei cicloide şi axa OX

Calculăm aria domeniului D mărginit de bucla unei cicloide şi axa OX. Dacă scriem ecuaţia curbei în forma explicită $y = f(x)$, $x \in [0, 2\pi a]$, atunci

$$\mathcal{A}ria(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi a} \left(\int_0^{f(x)} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cu schimbarea de variabilă $x = a(t - \sin t)$, avem $f(x) = a(1 - \cos t)$ şi $\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t$. Vom obţine

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria(D) &= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = a^2\left(2\pi - 2\int_0^{2\pi}\cos t\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\right)\\ &= a^2\left(2\pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t\right) = 3\pi a^2.\end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}x_G &= \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathcal{A}ria(D)}\int_0^{2\pi a} x\cdot f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3\pi a^2}\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(u+\pi+\sin u)(1+\cos u)^2\,\mathrm{d}u\\ &= \frac{a}{3}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos u+\cos^2 u)\,\mathrm{d}u = \pi a.\end{aligned}$$

Puteam să obţinem această valoare direct, observând că dreapta $x = \pi a$ este axă de simetrie pentru domeniu. Pentru cealaltă coordonată, calculăm

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y} = \frac{1}{\mathcal{A}ria(D)}\int_0^{2\pi a}\left(\int_0^{f(x)} y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2\,\mathcal{A}ria(D)}\int_0^{2\pi a}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{6\pi a^2}\int_0^{2\pi} a^3(1-\cos t)^3\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{a}{6\pi}\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)\,\mathrm{d}t = \frac{5a}{6}.\end{aligned}$$

11.5 Schimbarea de variabile în integrala dublă

11.34 Teoremă. *Fie $G \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ o funcţie de clasă C^1 pe G, care este bijectivă şi are inversa de clasă C^1. Fie Δ o mulţime din G care are arie şi care are proprietatea că şi închiderea lui Δ este tot o submulţime a lui G. Dacă $f : \varphi(\Delta) \to \mathbb{R}$ este integrabilă pe $\varphi(\Delta)$ atunci*

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta}(f\circ\varphi)(u,v)\,|J(\varphi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Demonstraţie. Demonstrăm acest rezultat în mai multe etape.

1. Dacă

$$\varphi_1(u,v) = \begin{pmatrix} a_1u+b_1v+c_1\\ a_2u+b_2v+c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}.$$

atunci aria lui $\varphi_1(D)$ unde $D = [a,b]\times[c,d]$ este dată de

$$\mathcal{A}ria\,\varphi_1(D) = \mathcal{A}ria\,D\cdot|J(\varphi_1)|, \quad \text{unde } J(\varphi_1) = \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$$

iar distanţa dintre imaginile a două puncte P_1 şi P_2 poate fi estimată prin

$$\operatorname{dist}(\varphi_1(P_1),\varphi_1(P_2)) \le \|J(\varphi_1)\|_F \cdot \operatorname{dist}(P_1,P_2), \quad \text{unde } \|J(\varphi_1)\|_F = \sqrt{a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2}.$$

Mulţimea D este un dreptunghi. Considerăm punctele $A(a,c)$, $B(b,c)$ şi $C(a,d)$ şi imaginile lor $M=\varphi_1(A)$, $N=\varphi_1(B)$, respectiv $P=\varphi_1(C)$. Atunci, putem scrie

$$\overrightarrow{MN} = a_1(b-a)\vec{\imath} + a_2(b-a)\vec{\jmath}, \quad \overrightarrow{MP} = b_1(d-c)\vec{\imath} + b_2(d-c)\vec{\jmath}.$$

Pentru că funcţia φ_1 este afină, imaginea dreptunghiului D este un paralelogram. Aria paralelogramului $\varphi_1(D)$ o socotim ca valoare absolută a produsului vectorial dintre vectorii $\overrightarrow{MN}$ şi $\overrightarrow{MP}$. Aşadar

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria\,\varphi_1(D) &= \left|\overrightarrow{MN}\times\overrightarrow{MP}\right| = |[a_1(b-a)\vec{\imath}+a_2(b-a)\vec{\jmath}]\times[b_1(d-c)\vec{\imath}+b_2(d-c)\vec{\jmath}]| \\ &= |a_1b_2(b-a)(d-c)\vec{\kappa} - a_2b_1(b-a)(d-c)\vec{\kappa}| = (b-a)(d-c)\cdot|a_1b_2-a_2b_1| \\ &= \mathcal{A}ria\,D\cdot|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2\end{vmatrix}| = \mathcal{A}ria\,D\cdot|J(\varphi_1)|.\end{aligned}$$

Legat de estimarea distanţei între două puncte $P_1(u,v)$ şi $P_2(w,z)$, scriem distanţa ca lungimea vectorului diferenţă $\varphi_1(u,v)-\varphi_1(w,z)$ şi folosim inegalitatea lui Cauchy-Schwarz de două ori

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\varphi_1(P_1),\varphi_1(P_2)) &= \sqrt{[a_1(u-w)+b_1(v-z)]^2+[a_2(u-w)+b_2(v-z)]^2} \\ &\le \sqrt{a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2}\cdot\sqrt{(u-w)^2+(v-z)^2} \\ &= \|J(\varphi_1)\|_F\cdot\operatorname{dist}(P_1,P_2).\end{aligned}$$

2. Pentru pătratul $D=[a,b]\times[c,d]$ cu $\operatorname{diam}(D)=\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}$ şi un punct oarecare $(\alpha,\beta)\in D$ arătăm că

$$\mathcal{A}ria\,\varphi(D) \le |J(\varphi)(\alpha,\beta)|\cdot\mathcal{A}ria(D) + 72\cdot\|J(\varphi)\|_F\cdot\omega(J(\varphi),\operatorname{diam}(D))\cdot\mathcal{A}ria(D)$$

unde $\|J(\varphi)\|_F$ este o valoare finită ce depinde de φ şi D şi

$$\lim_{\operatorname{diam}(D)\to 0}\omega(J(\varphi),\operatorname{diam}(D)) = 0.$$

Fie

$$\varphi_1(u,v) = \varphi(\alpha,\beta) + J(\varphi)(\alpha,\beta)\cdot\begin{pmatrix}u-\alpha\\ v-\beta\end{pmatrix},$$

unde $J(\varphi)(\alpha,\beta)$ este matricea lui Jacobi pentru φ în punctul (α,β). Conform punctului 1, imaginea dreptunghiului D este un paralelogram cu $\mathcal{A}ria\,\varphi_1(D) = \mathcal{A}ria\,D\cdot|\det J(\varphi)(\alpha,\beta)|$. Pentru funcţia φ aplicăm teorema lui Taylor şi deducem existenţa unui punct $(\overline{\alpha},\overline{\beta})\in D$ cu proprietatea că

$$\varphi(u,v) = \varphi(\alpha,\beta) + J(\varphi)(\overline{\alpha},\overline{\beta})\cdot\begin{pmatrix}u-\alpha\\ v-\beta\end{pmatrix}.$$

Cu ajutorul modulului de continuitate al funcţiei $f\in\{\,x'_u, x'_v, y'_u, y'_v\,\}$ definit prin

$$\omega(f,\delta) = \sup\{\,|f(P_1)-f(P_2)|,\ \operatorname{dist}(P_1,P_2)\le\delta,\ P_1,P_2\in D\,\}$$

facem notaţia

$$\omega(J(\varphi),\delta) = \max\left(\omega(x'_u,\delta),\omega(x'_v,\delta),\omega(y'_u,\delta),\omega(y'_v,\delta)\right).$$

Modulul unei funcţii f uniform continue are proprietatea de a tinde la zero când $\delta \to 0$. Pentru că funcţia vectorială φ este de clasă $C^1(D)$, derivatele parţiale ale componentelor sale, x şi y, sunt funcţii continue pe compactul D, deci uniform continue pe D. Acest lucru arată că $\omega(J(\varphi))$ tinde la zero când $\operatorname{diam}(D)$ tinde la zero.

Fie $P = (u,v)$ un punct oarecare din D. Atunci $\varphi(P)$ se află sau în interiorul paralelogramului $\varphi_1(D)$ sau în exteriorul lui. Dacă $\varphi(P) \notin \varphi_1(D)$ atunci

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(\varphi(P),\varphi_1(D)) &= \inf\left\{\operatorname{dist}(\varphi(P),\varphi_1(Q)) \mid Q \in D\right\}\\ &\le \operatorname{dist}(\varphi(u,v),\varphi_1(u,v))\\ &\le \left\|J(\varphi)(\alpha,\beta) - J(\varphi)(\overline{\alpha},\overline{\beta})\right\|_F \cdot \operatorname{dist}((u,v),(\alpha,\beta))\\ &\le 2\cdot\omega(J(\varphi),\operatorname{diam}(D))\cdot\operatorname{diam}(D) = K.\end{aligned}$$

Înseamnă că orice punct din $\varphi(D)$ se află sau în interiorul paralelogramului $\varphi_1(D)$ sau în exteriorul lui la o distanţă mai mică decât K. Înseamnă că putem acoperi mulţimea $\varphi(D)$ cu paralelogramul $\varphi_1(D)$ şi patru dreptunghiuri toate de lăţime $2K$ şi lungimile egale cu lungimile laturilor paralelogramului plus $2K$. Lungimile laturilor paralelogramului sunt mai mici decât diametrul mulţimii $\varphi_1(D)$ care nu depăşeşte maximul distanţei

$$\operatorname{dist}(\varphi_1(u,v),\varphi_1(s,t)) \le \|J(\varphi)\|_F \cdot \operatorname{diam}(D).$$

Pentru că derivatele parţiale ale lui x şi y sunt funcţii continue pe compactul D, ele sunt mărginite şi deci, valoarea lui $\|J(\varphi)\|_F$ este finită.

Aşadar,

$$\mathcal{A}ria\,\varphi(D) \le |J(\varphi)(\alpha,\beta)|\cdot\mathcal{A}ria(D) + \left[\|J(\varphi)\|_F\cdot\operatorname{diam}(D) + 2K\right]\cdot 2K.$$

Pentru că $\omega(J(\varphi),\operatorname{diam}(D)) \le 2\,\|J(\varphi)\|_F$ şi $[\operatorname{diam}(D)]^2 = 2\,\mathcal{A}ria(D)$ obţinem estimarea

$$\mathcal{A}ria\,\varphi(D) \le |J(\varphi)(\alpha,\beta)|\cdot\mathcal{A}ria(D) + 72\cdot\|J(\varphi)\|_F\cdot\omega(J(\varphi),\operatorname{diam}(D))\cdot\mathcal{A}ria(D).$$

3. Vom arăta că există o mulţime deschisă F astfel încât $\overline{\Delta} \subset F \subset \overline{F} \subset G$.

Funcţia $\operatorname{dist}(\cdot,\overline{\Delta}) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin $\operatorname{dist}(P,\overline{\Delta}) = \min\left\{\operatorname{dist}(P,Q),\ Q \in \overline{\Delta}\right\}$ este continuă, iar $\mathbb{R}^2 \setminus G$ este închisă, deci funcţia distanţă şi atinge minimul într-un punct $P_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus G$. Fie $\varepsilon_0 = \operatorname{dist}(P_0,\overline{\Delta})$. Pentru că $\overline{\Delta} \subset G$, rezultă $\operatorname{dist}(\mathbb{R}^2 \setminus G,\overline{\Delta}) = \varepsilon_0 > 0$. Atunci definim $F = \left\{Q \in \mathbb{R}^2, \operatorname{dist}(Q,\overline{\Delta}) < \varepsilon_0/2\right\}$ şi $\overline{F} = \left\{Q \in \mathbb{R}^2, \operatorname{dist}(Q,\overline{\Delta}) \le \varepsilon_0/2\right\}$.

4. Demonstrăm că $\operatorname{fr}\varphi(\Delta) \subseteq \varphi(\operatorname{fr}\Delta)$. Fie $P \in \operatorname{fr}\varphi(\Delta) \subseteq \overline{\varphi(\Delta)} \subset \varphi(\overline{\Delta})$. Atunci există $M \in \overline{\Delta}$ astfel încât $P = \varphi(M)$. Pentru că P este pe frontiera lui $\varphi(\Delta)$, orice disc $D(P,\varepsilon)$ conţine cel puţin un punct comun cu $\varphi(\Delta)$ pe care îl notăm Q şi cel puţin un punct care nu aparţine lui $\varphi(\Delta)$, pe care îl notăm cu R.

Pentru că $Q \in D(P,\varepsilon)$, distanţa dintre P şi Q este mai mică decât ε. Pentru că $Q \in \varphi(\Delta)$, atunci există $N \in \Delta$ astfel încât $Q = \varphi(N)$. Atunci

$$\operatorname{dist}(N,M) = \operatorname{dist}(\varphi^{-1}(Q),\varphi^{-1}(P)) \le \left\|J(\varphi^{-1})\right\|_F\cdot\operatorname{dist}(Q,P) < \left\|J(\varphi^{-1})\right\|_F\cdot\varepsilon.$$

Am demonstrat că N este un punct comun dintre discul $D(M,\|J(\varphi^{-1})\|_F\,\varepsilon)$ şi mulţimea Δ.

Pentru că $R \in D(P, \varepsilon)$, distanţa dintre P şi R este mai mică decât ε. Pentru orice ε ales încât $\varepsilon < \frac{\varepsilon_0}{2\|J(\varphi^{-1})\|_F+1}$, rezultă că $R \in \varphi(\overline{F})$. Pentru că $R \notin \varphi(\Delta)$, există $L \in \overline{F} \setminus \Delta$ astfel încât $R = \varphi(L)$. Avem

$$\operatorname{dist}(L, M) = \operatorname{dist}(\varphi^{-1}(R), \varphi^{-1}(P)) \leq \left\|J(\varphi^{-1})\right\|_F \cdot \operatorname{dist}(R, P) < \left\|J(\varphi^{-1})\right\|_F \cdot \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează că discul $D(M, \|J(\varphi^{-1})\|_F \, \varepsilon)$ conţine şi un punct care nu este în Δ.

Cu aceasta am demonstrat că orice disc centrat în M conţine cel puţin un punct din Δ şi cel puţin un punct care nu aparţine lui Δ, deci $M \in \operatorname{fr} \Delta$ şi $P \in \varphi(\operatorname{fr} \Delta)$.

5. Demonstrăm că mulţimea $\varphi(\Delta)$ are arie. Pentru că Δ are arie, înseamnă că frontiera lui Δ este de arie nulă. Acest lucru implică faptul că $\varphi(\operatorname{fr} \Delta)$ este de arie nulă. Frontiera lui $\varphi(\Delta)$ este o submulţime a lui $\varphi(\operatorname{fr} \Delta)$ şi deci este de arie nulă, ceea ce arată că $\varphi(\Delta)$ are arie.

6. Demonstrăm că

$$\mathcal{A}ria\, \varphi(\Delta) \leq \iint_\Delta |J(\varphi)(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru că Δ are arie, există $\delta > 0$ şi există reţeaua de pătrate $D_k \subset \mathbb{R}^2$ cu $\operatorname{diam}(D_k) < \delta$ care acoperă pe Δ astfel încât să avem $\mathcal{A}ria(\Delta) + \varepsilon > \sum_k \mathcal{A}ria(D_k)$. Alegând $\delta < \varepsilon_0/2$ toate aceste pătrate sunt incluse în $\overline{F}$. Pentru că φ este de clasă C^1 pe $\overline{F}$ putem alege eventual un δ şi mai mic cu proprietatea că $\omega(J(\varphi), \delta) < \frac{\varepsilon}{\mathcal{A}ria(\Delta)+\varepsilon}$. Scriind suma Darboux superioară pentru funcţia integrabilă $|J(\varphi)(u, v)|$ pe Δ, pentru un δ suficient de mic, obţinem

$$\sum_k \sup_{(u,v)\in D_k} |J(\varphi)(u, v)| \cdot \mathcal{A}ria(D_k) < \iint_\Delta |J(\varphi)(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \varepsilon.$$

Atunci

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}ria\, \varphi(\Delta) &\leq \sum_k \mathcal{A}ria\, \varphi(D_k) \\
&\leq \sum_k \sup_{(u,v)\in D_k} |J(\varphi)(u, v)| \cdot \mathcal{A}ria(D_k) + 72 \, \|J(\varphi)\|_F \sum_k \omega(J(\varphi), \operatorname{diam}(D_k)) \cdot \mathcal{A}ria(D_k) \\
&\leq \iint_\Delta |J(\varphi)(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + \varepsilon + 72 \, \|J(\varphi)\|_F \cdot \frac{\varepsilon}{\mathcal{A}ria(\Delta) + \varepsilon} \cdot \sum_k \mathcal{A}ria(D_k) \\
&\leq \iint_\Delta |J(\varphi)(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v + (1 + 72 \, \|J(\varphi)\|_F) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$ obţinem inegalitatea anunţată.

7. Demonstrăm că

$$\mathcal{A}ria\, \varphi(\Delta) \geq \iint_\Delta |J(\varphi)(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru că $|J(\varphi)|$ este integrabilă pe Δ, există $\delta > 0$ şi există reţeaua de pătrate $E_k \subset \Delta$ cu $\operatorname{diam}(E_k) < \delta$ şi

$$\sum_k \inf_{(u,v)\in E_k} |J(\varphi)(u, v)| \cdot \mathcal{A}ria(E_k) > \iint_\Delta |J(\varphi)(u, v)| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v - \varepsilon.$$

Fie $\mu_k = \inf_{(u,v)\in E_k} |J(\varphi)(u, v)|$. Pentru că φ este bijectivă şi continuă avem că $\mu_k > 0$.

Tot ce am demonstrat anterior se poate aplica şi funcţiei inverse φ^{-1}. Astfel că

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria(E_k) = \mathcal{A}ria\,\varphi^{-1}(\varphi(E_k)) &\leq \iint_{\varphi(E_k)} \left|J(\varphi^{-1})(u,v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \iint_{\varphi(E_k)} \frac{1}{|J(\varphi)(u,v)|}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &\leq \frac{1}{\mu_k}\cdot \mathcal{A}ria\,\varphi(E_k).\end{aligned}$$

În concluzie, $\mathcal{A}ria\,\varphi(E_k) \geq \mu_k \cdot \mathcal{A}ria(E_k)$. Va rezulta

$$\mathcal{A}ria\,\varphi(\Delta) \geq \sum_k \mathcal{A}ria\,\varphi(E_k) \geq \sum_k \mu_k \cdot \mathcal{A}ria(E_k) > \iint_\Delta |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \varepsilon.$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$, inegalitatea cerută este demonstrată.

8. Demonstrăm că

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v)\,|J(\varphi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Pentru că f este integrabilă pe $\varphi(\Delta)$, există $\delta > 0$ şi există reţeaua de pătrate $F_k \subset \varphi(\overline{F})$ cu $\mathrm{diam}(F_k) < \delta$ care acoperă pe $\varphi(\Delta)$ astfel încât $\mathcal{A}ria\,\varphi(\Delta) + \varepsilon > \sum_k \mathcal{A}ria(F_k)$ şi există reţeaua de pătrate $G_k \subset \varphi(\Delta)$ cu $\mathrm{diam}(G_k) < \delta$ astfel încât $\mathcal{A}ria\,\varphi(\Delta) - \varepsilon < \sum_k \mathcal{A}ria(G_k)$ şi în plus

$$\sum_k \sup_{P_k\in G_k} f(P_k)\cdot \mathcal{A}ria(G_k) - \varepsilon < \iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \sum_k \inf_{P_k\in F_k} f(P_k)\cdot \mathcal{A}ria(F_k) + \varepsilon.$$

Fie $D_k \subset \overline{F}$ astfel încât $F_k = \varphi(D_k)$. Atunci

$$\begin{aligned}\iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &< \sum_k \inf_{P_k\in F_k} f(P_k)\cdot \mathcal{A}ria(F_k) + \varepsilon \\ &= \sum_k \inf_{Q_k\in D_k} (f\circ\varphi)(Q_k)\cdot \mathcal{A}ria\,\varphi(D_k) + \varepsilon \\ &= \sum_k \inf_{Q_k\in D_k} (f\circ\varphi)(Q_k)\cdot \iint_{D_k} |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \varepsilon \\ &\leq \sum_k \iint_{D_k} (f\circ\varphi)(u,v)\cdot |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \varepsilon \\ &= \iint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v)\cdot |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + R_1\end{aligned}$$

unde $R_1 = \iint_{\cup D_k\setminus\Delta} (f\circ\varphi)(u,v)\cdot|J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \varepsilon$. Pentru că

$$\mathcal{A}ria\,\varphi(\cup D_k \setminus \Delta) = \mathcal{A}ria(\cup F_k \setminus \varphi(\Delta)) = \sum_k \mathcal{A}ria(F_k) - \mathcal{A}ria\,\varphi(\Delta) < \varepsilon$$

înseamnă că pentru $\varepsilon \to 0$ aria mulţimii $\cup D_k \setminus \Delta$ tinde la zero şi deci şi $R_1 \to 0$. Cu aceasta, inegalitatea

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \iint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v)\,|J(\varphi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

este demonstrată.

Invers, fie $E_k \subset \Delta$ astfel încât $G_k = \varphi(E_k)$. Atunci

$$\begin{aligned}
\iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &> \sum_k \sup_{P_k \in G_k} f(P_k)\cdot \mathcal{A}ria(G_k) - \varepsilon \\
&= \sum_k \sup_{Q_k \in E_k} (f\circ\varphi)(Q_k)\cdot \mathcal{A}ria\,\varphi(E_k) - \varepsilon \\
&= \sum_k \sup_{Q_k \in E_k} (f\circ\varphi)(Q_k)\cdot \iint_{E_k} |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \varepsilon \\
&\geq \sum_k \iint_{E_k} (f\circ\varphi)(u,v)\cdot |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \varepsilon \\
&= \iint_{\cup E_k} (f\circ\varphi)(u,v)\cdot |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - \varepsilon \\
&= \iint_{\Delta} (f\circ\varphi)(u,v)\cdot |J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v - R_2
\end{aligned}$$

unde $R_2 = \iint_{\Delta\setminus\cup E_k}(f\circ\varphi)(u,v)\cdot|J(\varphi)(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \varepsilon$. Pentru că

$$\mathcal{A}ria\,\varphi(\Delta\setminus\cup E_k) = \mathcal{A}ria(\varphi(\Delta)\setminus\cup G_k) = \mathcal{A}ria\,\varphi(\Delta) - \sum_k \mathcal{A}ria(G_k) < \varepsilon,$$

deducem că aria mulţimii diferenţă $\Delta\setminus\cup E_k$ tinde la zero şi deci şi $R_2 \to 0$, când $\varepsilon\to 0$. Cu aceasta, inegalitatea inversă

$$\iint_{\varphi(\Delta)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geq \iint_{\Delta}(f\circ\varphi)(u,v)\,|J(\varphi)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

este demonstrată. □

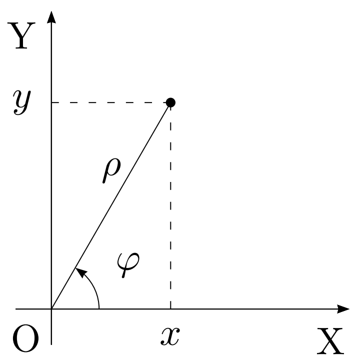
11.35 Observaţie. Când se face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \quad (u,v)\in\Delta$$

jacobianul se calculează cu formula determinantului matricii lui Jacobi $J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$. Noul domeniu Δ se obţine determinând frontiera acestuia din ecuaţiile frontierei vechiului domeniu D prin înlocuirea lui x cu $x(u,v)$ şi y cu $y(u,v)$.

În cazul în care frontiera domeniului D este cerc sau arc de cerc, este utilă folosirea coordonatelor polare ρ şi φ. Se face schimbarea de variabile

$$T: \begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho\geq 0 \\ y = \rho\sin\varphi, & \varphi\in[0,2\pi). \end{cases}$$



Jacobianul transformării este

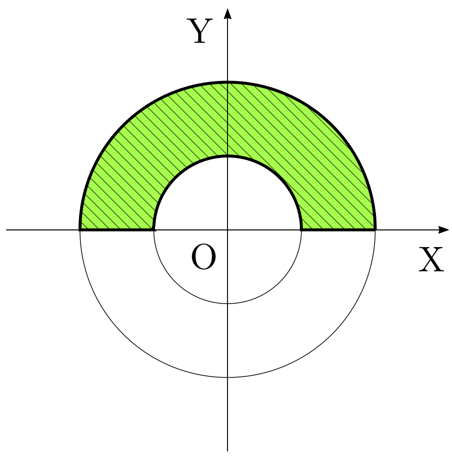
$$\begin{aligned}
J = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\varphi)} &= \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho.
\end{aligned}$$

11.36 Exemplu. Să se calculeze $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ unde D este mulţimea

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \le x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0 \right\}.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$



Din condiţia $1 \le x^2+y^2 \le 4$ obţinem $1 \le \rho^2 \le 4$, adică $\rho \in [1,2]$. Din $y \ge 0$ se obţine inegalitatea $\sin\varphi \ge 0$, adică $\varphi \in [0,\pi]$. Noul domeniu este

$$\Delta = \{ (\rho,\varphi) \,|\, 0 \le \varphi \le \pi,\ 1 \le \rho \le 2 \}.$$

Jacobianul este $|J| = \rho$. Valoarea integralei este

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \left(\int_1^2 e^{-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho \right) \mathrm{d}\varphi = \pi \left. \frac{e^{-\rho^2}}{-2} \right|_1^2 = \frac{\pi}{2e}\left(1 - \frac{1}{e^3}\right).$$

11.6 Formula lui Green

11.37 Teoremă. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu simplu în raport cu una dintre axe. Fie C curba simplă, închisă, netedă pe porţiuni, care descrie frontiera domeniului D, parcursă în sens direct (sensul în care domeniul D se găseşte la stânga). Fie $P, Q : D \to \mathbb{R}$ funcţii de clasă C^1 pe D. Atunci*

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Demonstraţie. Presupunem că D este simplu în raport cu axa OY. Atunci

$$D = \{ (x,y) |\, a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x) \}$$

unde $g_1, g_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ sunt două funcţii derivabile pe $[a,b]$ astfel încât $g_1(x) \le g_2(x)$, pentru orice $x \in [a,b]$. Fie $c = \inf_{x\in[a,b]} g_1(x)$ şi $d = \sup_{x\in[a,b]} g_2(x)$.

Pentru fiecare $x \in [a,b]$, fie $F(x,y)$ o primitivă a funcţiei $Q(x,y)$ în raport cu variabila $y \in [c,d]$. Atunci $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$, pentru orice $x \in [a,b]$ şi $y \in [c,d]$. Pentru că Q este de clasă C^1 pe D, înseamnă că F este de clasă C^2 pe D şi $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$.

Conform formulei de calcul a integralei duble pe domenii simple, obţinem

$$\begin{aligned} &\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\quad = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y - \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &\quad = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,g_2(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,g_1(x)) - P(x,g_2(x)) + P(x,g_1(x)) \right) \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pe de altă parte, frontiera lui D este formată din patru curbe: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$. Vom calcula pe rând integrala curbilinie pe cele patru curbe.

Curba C_1 se parametrizează prin $y = g_1(x)$, $x \in [a, b]$. Atunci

$$I_1 = \int_{C_1} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b P(x, g_1(x))\,\mathrm{d}x + \int_a^b Q(x, g_1(x)) \cdot g_1'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pentru că

$$\frac{d}{dx}F(x, g_1(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, g_1(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, g_1(x)) \cdot g_1'(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, g_1(x)) + Q(x, g_1(x)) \cdot g_1'(x),$$

rezultă

$$\int_a^b Q(x, g_1(x)) \cdot g_1'(x)\,\mathrm{d}x = F(b, g_1(b)) - F(a, g_1(a)) - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, g_1(x))\,\mathrm{d}x$$

şi deci

$$I_1 = \int_a^b P(x, g_1(x))\,\mathrm{d}x + F(b, g_1(b)) - F(a, g_1(a)) - \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, g_1(x))\,\mathrm{d}x.$$

Curba C_2 se parametrizează prin $x = b$ şi $y \in [g_1(b), g_2(b)]$. Atunci

$$I_2 = \int_{C_2} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} \frac{\partial F}{\partial y}(b, y)\,\mathrm{d}y = F(b, g_2(b)) - F(b, g_1(b)).$$

Curba C_3^-, care este curba C_3 parcursă invers, este parametrizată prin $y = g_2(x)$, $x \in [a, b]$. Atunci

$$\begin{aligned} I_3 = \int_{C_3} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y &= -\int_{C_3^-} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_a^b P(x, g_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b Q(x, g_2(x)) \cdot g_2'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

La fel ca şi în cazul lui I_1 se obţine

$$I_3 = -\int_a^b P(x, g_2(x))\,\mathrm{d}x - F(b, g_2(b)) + F(a, g_2(a)) + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(x, g_2(x))\,\mathrm{d}x.$$

Curba C_4^- se parametrizează prin $x = a$ şi $y \in [g_1(a), g_2(a)]$. O să obţinem

$$I_4 = \int_{C_4} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -\int_{g_1(a)}^{g_2(a)} \frac{\partial F}{\partial y}(a, y)\,\mathrm{d}y = F(a, g_1(a)) - F(a, g_2(a)).$$

Adunând cele patru integrale se obţine

$$\begin{aligned} \int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial x}(x, g_2(x)) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, g_1(x)) - P(x, g_2(x)) + P(x, g_1(x)) \right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

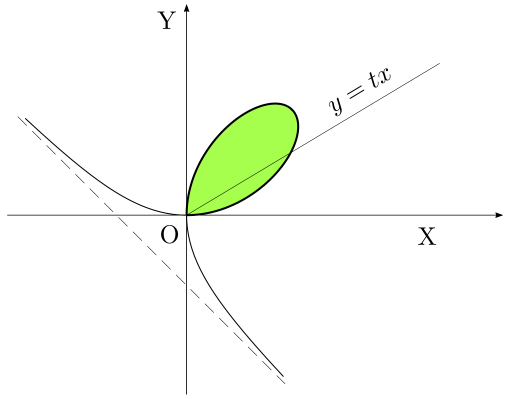
ceea ce demonstrează egalitatea cerută. □

11.38 Observaţie. Formula se poate folosi şi pentru un domeniu D care este o reuniune finită de domenii simple în raport cu una dintre axe.

11.39 Observaţie. Formula lui Green ne permite să găsim aria unui domeniu mărginit de o curbă netedă de ecuaţie dată. Se poate folosi oricare din formulele

$$\mathcal{A}ria(D) = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C x\,\mathrm{d}y = -\int_C y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

11.40 Exemplu. Să se calculeze aria buclei foliului lui Descartes: $x^3 + y^3 = 3axy$, $a > 0$. Pentru a parametriza această curbă o intersectăm cu o dreaptă $y = tx$. Curba are punct dublu în origine, iar axele OX şi OY sunt tangente buclei. Cum t este panta dreptei, rezultă că $t \in [0, \infty)$. Se obţine



$$C: \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \qquad t \in [0, \infty).$$

Aria foliului lui Descartes va fi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}ria = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{2t^2 - t^5 - t^2 + 2t^5}{(1+t^3)^3}\,\mathrm{d}t = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3a^2}{2}\cdot\left.\frac{-1}{1+t^3}\right|_0^\infty = \frac{3a^2}{2}.\end{aligned}$$