Curs 13

Integrale de suprafaţă

13.1 Pânze şi suprafeţe

13.1 Definiţie. *Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ o mulţime conexă şi deschisă. O funcţie continuă $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ se numeşte* **pânză de suprafaţă**. *Mulţimea $S = \sigma(D)$ se numeşte* **imaginea** *pânzei.*

13.2 Observaţie. Pânza σ este specificată dacă sunt precizate componentele funcţiei vectoriale $\sigma(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. O altă modalitate este folosirea vectorului de poziţie $\vec{r} = \vec{r}(u,v) = x(u,v)\vec{\imath} + y(u,v)\vec{\jmath} + z(u,v)\vec{\kappa}$ sau parametrizarea

$$\sigma\colon \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \qquad (u,v) \in D.$$

13.3 Observaţie. Fie $I_v = \{\, u \mid (u,v) \in D \,\}$ şi $I_u = \{\, v \mid (u,v) \in D \,\}$. Pentru o pânză $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ şi pentru orice $(u,v) \in D$ funcţiile

$$\sigma_u : I_u \to \mathbb{R}, \quad \sigma_u(t) = \sigma(u,t) \qquad \sigma_v : I_v \to \mathbb{R}, \quad \sigma_v(t) = \sigma(t,v)$$

sunt drumuri în $\mathbb{R}^3$.

13.4 Definiţie. *O pânză $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ se numeşte* **simplă** *dacă σ este injectivă pe mulţimea D.*

13.5 Definiţie. *O pânză $\sigma : D \to \mathbb{R}^3$ se numeşte* **netedă** *dacă aplicaţia σ este de clasă C^1 pe D şi $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$, pentru orice $(u,v) \in D$, unde*

$$\vec{r}'_u = x'_u(u,v)\vec{\imath} + y'_u(u,v)\vec{\jmath} + z'_u(u,v)\vec{\kappa}, \quad \vec{r}'_v = x'_v(u,v)\vec{\imath} + y'_v(u,v)\vec{\jmath} + z'_v(u,v)\vec{\kappa}$$

13.6 Observaţie. Vectorul $\vec{r}'_u$ este tangent la curba σ_v, iar $\vec{r}'_v$ este tangent la curba σ_u. Condiţia $\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$ înseamnă că vectorii $\vec{r}'_u$ şi $\vec{r}'_v$ sunt nenuli şi liniar independenţi. În aceste condiţii ei formează vectorii directori ai planului tangent la suprafaţă. Ecuaţia planului tangent este

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ x'_u(u_0,v_0) & y'_u(u_0,v_0) & z'_u(u_0,v_0) \\ x'_v(u_0,v_0) & y'_v(u_0,v_0) & z'_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Aceeaşi condiţie

$$\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \neq 0$$

ne asigură în acelaşi timp că în fiecare punct al suprafeţei putem considera vectorul normal

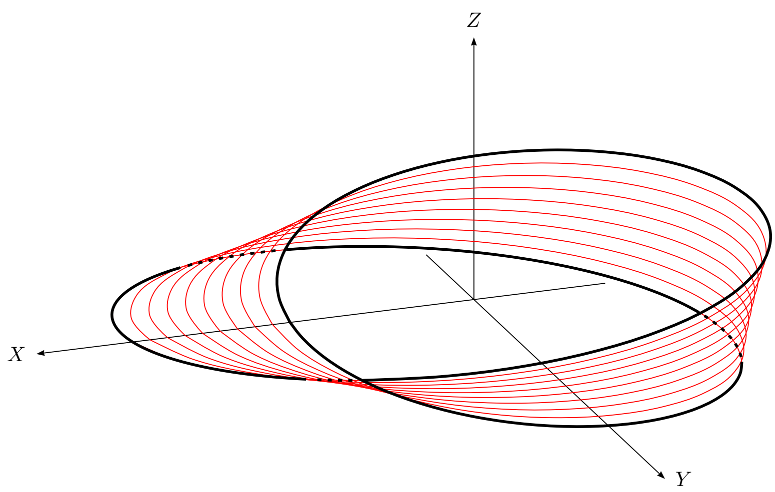
$$\vec{N} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v.$$

Versorul normalei este vectorul de lungime 1 pe direcţia normalei, adică

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}}{\left|\vec{N}\right|} = \pm \frac{\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|}.$$

13.7 Definiţie. *O suprafaţă se numeşte* **orientabilă** *sau* **cu două feţe** *dacă normala la suprafaţă variază continuu pe întrega suprafaţă. Pentru o astfel de suprafaţă alegerea unui semn pentru versorul normalei înseamnă alegerea unei feţe a suprafeţei.*

13.8 Observaţie. Există suprafeţe care au o singură faţă. Un exemplu este banda lui Möbius.



13.9 Definiţie. *Două pânze* $\sigma_1 : D_1 \to \mathbb{R}^3$ *şi* $\sigma_2 : D_2 \to \mathbb{R}^3$ *se numesc* **echivalente** *dacă există o funcţie* $h : D_1 \to D_2$ *de clasă* C^1*, bijectivă, cu inversa de clasă* C^1 *astfel încât jacobianul lui* h *să fie strict pozitiv în orice punct al lui* D_1*, iar* $\sigma_1 = \sigma_2 \circ h$*.*

13.10 Observaţie. Notăm prin $\sigma_1 \sim \sigma_2$ faptul că pânzele σ_1 şi σ_2 sunt echivalente. Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă. De asemenea, se verifică imediat faptul că două pânze echivalente au aceeaşi imagine, iar dacă una este simplă sau netedă şi cealaltă are aceeaşi proprietate.

13.11 Definiţie. *Se numeşte* **suprafaţă** *o clasă de pânze echivalente.*

13.12 Observaţie. O suprafaţă este mulţimea tuturor pânzelor care au o imagine dată şi o orientare precizată. O suprafaţă se poate specifica în 4 feluri:
1) forma parametrică: $\sigma(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in D$
2) forma vectorială: $\vec{r} = x(u, v)\vec{\imath} + y(u, v)\vec{\jmath} + z(u, v)\vec{\kappa}$, $(u, v) \in D$
3) forma explicită: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$
4) forma implicită: $F(x, y, z) = 0$, $(x, y, z) \in A \subset \mathbb{R}^3$, precizând orientarea aleasă.

Forma explicită nu este altceva decât o parametrizare de forma $(u, v, f(u, v))$, unde f este o funcţie de clasă C^1. Forma implicită ne conduce la forma explicită cel puţin local, în jurul unui punct dat, datorită teoremei funcţiilor implicite.

Oricare din aceste forme duce la identificarea unei suprafeţe şi de aceea vom folosi noţiunea de suprafaţă în legătură cu oricare din aceste forme.

13.13 Exemplu. Pânza descrisă de

$$\begin{cases} x = (1-u-v)x_A + ux_B + vx_C, \\ y = (1-u-v)y_A + uy_B + vy_C, \\ z = (1-u-v)z_A + uz_B + vz_C, \end{cases} \qquad D = \{\, (u,v) \mid u \in (0,1),\ v \in (0,1),\ u+v < 1 \,\}$$

are ca imagine porţiunea din planul determinat de punctele $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ şi $C(x_C, y_C, z_C)$ aflată în interiorul triunghiului ABC. Pentru $u \in (0,1)$, drumurile σ_u sunt segmente paralele cu AC care umple triunghiul. Pentru $v \in (0,1)$, drumurile σ_v sunt segmente paralele cu AB.

13.14 Exemplu. Pânza descrisă de

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos v \sin u, \\ y = y_0 + r\sin v \sin u, \\ z = z_0 + r\cos u \end{cases} \qquad u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),\ v \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

este o porţiune din sfera de ecuaţie $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$, cu centrul (x_0, y_0, z_0) şi raza r. O altă pânză echivalentă este $x = u + x_0$, $y = v + y_0$ şi $z = z_0 + \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}$, pentru $u, v > 0$, $u^2 + v^2 < r^2$. Într-adevăr, funcţia $h(u,v) = (r\cos v \sin u, r\sin v \sin u)$ cu jacobianul $J(h) = r^2 \sin u \cos u > 0$ este de clasă C^1 pe $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)^2$ şi are inversa $h^{-1}(u,v) = \left(\arcsin \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{r}, \operatorname{arctg} \frac{v}{u}\right)$ de clasă C^1.

13.2 Aria unei suprafeţe

13.15 Definiţie. *Fie σ o pânză netedă descrisă vectorial prin $\vec{r}(u,v)$, unde $(u,v) \in D$ iar D este o mulţime deschisă şi conexă. Fie o submulţime $M \subset D$ care are arie. Numim* **arie a porţiunii de suprafaţă** *$\sigma(M)$ numărul real*

$$Aria(\sigma(M)) = \iint_M |\vec{r}\,'_u \times \vec{r}\,'_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v.$$

13.16 Observaţie. O justificare pentru această formulă este următoarea: considerăm mulţimea $M = [a,b] \times [c,d]$ şi fie o partiţie a intervalului $[a,b]$, respectiv $[c,d]$

$$u_0 = a < u_1 < \cdots < u_n = b, \quad v_0 = c < v_1 < \cdots < v_m = d.$$

Notând $M_{kj} = [u_{k-1}, u_k] \times [v_{j-1}, v_j]$ calculăm aria lui S însumând ariile imaginilor $\sigma(M_{kj})$. Aproximăm aria imaginii $\sigma(M_{kj})$ cu aria paralelogramului format de vectorii

$$\vec{r}(u_k, v_{j-1}) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}), \qquad \vec{r}(u_{k-1}, v_j) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}).$$

Dar

$$\vec{r}(u_k, v_{j-1}) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}) = \vec{r}_u'(\xi_k, v_{j-1}) \cdot (u_k - u_{k-1}), \quad \xi_k \in (u_{k-1}, u_k)$$
$$\vec{r}(u_{k-1}, v_j) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1}) = \vec{r}_v'(u_{k-1}, \eta_j) \cdot (v_j - v_{j-1}), \quad \eta_j \in (v_{j-1}, v_j).$$

Suma

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |[\vec{r}(u_k, v_{j-1}) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1})] \times [\vec{r}(u_{k-1}, v_j) - \vec{r}(u_{k-1}, v_{j-1})]| \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\,\vec{r}_u'(\xi_k, v_{j-1}) \times \vec{r}_v'(u_{k-1}, \eta_j)|\,(u_k - u_{k-1})(v_j - v_{j-1})\end{aligned}$$

aproximează suma

$$Aria(\sigma(M)) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} Aria(\sigma(M_{kj})).$$

Datorită faptului că funcţiile vectoriale $\vec{r}_u'$ şi $\vec{r}_v'$ sunt continue pe D suma Σ_1 are aceeaşi valoare la limită cu suma

$$\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\,\vec{r}_u'(\xi_k, \eta_j) \times \vec{r}_v'(\xi_k, \eta_j)|\,(u_k - u_{k-1})(v_j - v_{j-1})$$

care tinde la integrala dublă

$$\iint_M |\,\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

13.17 Observaţie. Se poate arăta că aria porţiunii suprafeţei $\sigma(M)$ nu depinde de parametrizare. Expresia

$$\mathrm{d}\sigma = |\,\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

se numeşte ***element de suprafaţă***. Vom da în continuare câteva formule de calcul pentru $\mathrm{d}\sigma$. Avem

$$\vec{r}_u' \times \vec{r}_v' = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix} = A\vec{\imath} + B\vec{\jmath} + C\vec{\kappa},$$

unde

$$A = \begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}, \qquad B = \begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}, \qquad C = \begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}.$$

Atunci

$$\mathrm{d}\sigma = |\,\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Dacă suprafaţa are reprezentarea explicită $z = z(x, y)$ atunci formula devine

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

O altă reprezentare a elementului de suprafaţă pentru pânze se poate obţine plecând de la formula

$$\begin{aligned}|\,\vec{r}_u' \times \vec{r}_v'|^2 &= |\,\vec{r}_u'|^2\,|\,\vec{r}_v'|^2 \sin^2(\,\vec{r}_u', \vec{r}_v') = |\,\vec{r}_u'|^2\,|\,\vec{r}_v'|^2 \left[1 - \cos^2(\,\vec{r}_u', \vec{r}_v')\right] \\ &= |\,\vec{r}_u'|^2\,|\,\vec{r}_v'|^2 - |\,\vec{r}_u'|^2\,|\,\vec{r}_v'|^2 \cos^2(\,\vec{r}_u', \vec{r}_v') \\ &= (\,\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_u')\,(\,\vec{r}_v' \cdot \vec{r}_v') - (\,\vec{r}_u' \cdot \vec{r}_v')^2\end{aligned}$$

şi notând

$$\begin{aligned} E &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_u = x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u \\ G &= \vec{r}'_v \cdot \vec{r}'_v = x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v \\ F &= \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v. \end{aligned}$$

Rezultă

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

13.18 Exemplu. Să calculăm aria sferei de rază R.

Datorită simetriei, aria sferei va fi de 8 ori aria porţiunii din octantul pozitiv, care se parametrizează

$$\begin{cases} x = R\cos v \sin u, \\ y = R\sin v \sin u, \qquad u \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right), \ v \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right). \\ z = R\cos u, \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} E &= x'^2_u + y'^2_u + z'^2_u = (R\cos v\cos u)^2 + (R\sin v\cos u)^2 + (-R\sin u)^2 = R^2 \\ G &= x'^2_v + y'^2_v + z'^2_v = (-R\sin v\sin u)^2 + (R\cos v\sin u)^2 + 0^2 = R^2\sin^2 u \\ F &= x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v = 0 \end{aligned}$$

şi atunci

$$Aria(\text{sferei}) = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 8R^2(-\cos u)\big|_0^{\frac{\pi}{2}} v\big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi R^2.$$

13.3 Integrale de suprafaţă în raport cu aria

13.19 Definiţie. *Fie σ o pânză netedă descrisă vectorial prin $\vec{r}(u,v)$, unde $(u,v) \in D$ iar D este o mulţime deschisă şi conexă. Fie o submulţime $M \subset D$ care are arie. Fie $F : U \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă pe o mulţime deschisă $U \subset \mathbb{R}^3$ ce conţine pe $S = \sigma(M)$. Numim* **integrală de suprafaţă în raport cu aria** *(de speţa I) numărul real*

$$\iint_S F(x,y,z)\, \mathrm{d}\sigma = \iint_M F(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\, |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

13.20 Observaţie. Dacă suprafaţa S este inclusă în planul XOY atunci $z = 0$ şi vectorul de poziţie se reduce la $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$. În acest caz, $\vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = \vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{\kappa}$ şi $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$. Rezultă

$$\iint_S F(x,y,z)\, \mathrm{d}\sigma = \iint_S F(x,y,0)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Integrala de suprafaţă se reduce la o integrală dublă în cazul suprafeţelor incluse în planul XOY.

13.21 Observaţie. Aria suprafeţei S este dată de formula

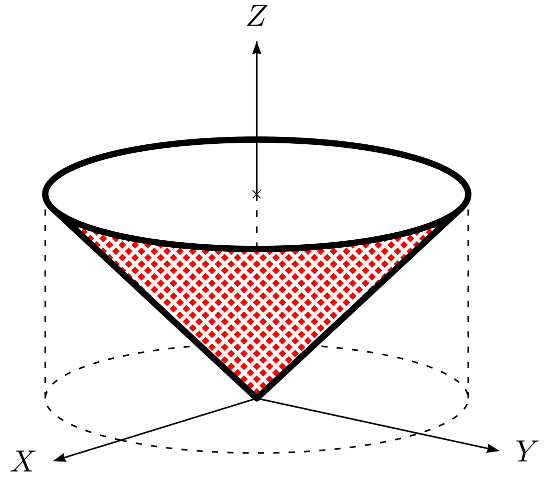
$$Aria(S) = \iint_S \mathrm{d}\sigma.$$

Masa unei plăci subţiri având forma suprafeţei S, cu densitatea punctuală dată de funcţia ρ se calculează cu formula

$$masa(S) = \iint_S \rho(x,y,z)\, \mathrm{d}\sigma.$$

13.22 Exemplu. Să se calculeze $\iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma$, unde $S:\ x^2+y^2=z^2,\ 0 \le z \le 1$.

Suprafaţa S este un con care se poate scrie în formă explicită $z=\sqrt{x^2+y^2}$, iar $(x,y)\in M$, unde M este discul centrat în origine de rază $r=1$. Elementul de suprafaţă se calculează plecând de la



$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

şi folosind formula

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Obţinem

$$I = \iint_S (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_M (x^2+y^2+x^2+y^2)\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\sqrt{2}\iint_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Trecând la coordonate polare, se obţine

$$I = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho = 4\pi\sqrt{2}\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^1 = \pi\sqrt{2}.$$

13.4 Fluxul unui câmp vectorial printr-o suprafaţă

13.23 Definiţie. *Fie S o suprafaţă netedă orientabilă pe care fixăm o anumită orientare alegând un anumit semn pentru versorul normalei la suprafaţă. Fie un câmp vectorial continuu $\vec{v} = P(x,y,z)\vec{\imath}+Q(x,y,z)\vec{\jmath}+R(x,y,z)\vec{\kappa}$ definit pe un domeniu care conţine suprafaţa S. Se numeşte* **fluxul lui** $\vec{v}$ *prin faţa suprafeţei S determinată de $\vec{n}$, integrala de suprafaţă*

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma.$$

13.24 Observaţie. Produsul $\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ se numeşte flux elementar. Dacă $\vec{v}$ reprezintă câmpul vitezelor unui fluid în mişcare, atunci $\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ este cantitatea de fluid ce trece prin elementul de suprafaţă în unitatea de timp, în sensul indicat de $\vec{n}$. Dacă $\vec{v}$ şi $\vec{n}$ au sensuri opuse atunci produsul $\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma$ este negativ. Fluxul se schimbă printr-un semn, dacă se schimbă sensul normalei la suprafaţă.

13.25 Observaţie. Dacă notăm cu α,β şi γ unghiurile pe care le face $\vec{n}$ cu axele de coordonate OX, OY, respectiv OZ, atunci

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma.$$

Dacă notăm cu $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$ şi $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ proiecţiile elementului de suprafaţă $\mathrm{d}\sigma$ pe planele de coordonate YOZ, ZOX, respectiv XOY, obţinem

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Integrala de suprafaţă

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

se numeşte ***integrală de suprafaţă în raport cu coordonatele*** (de speţa a II-a).

13.26 Observaţie. Pentru calculul fluxului ţinem cont de expresia versorului normalei şi de expresia elementului de suprafaţă.

$$\begin{aligned}\Phi_S(\vec{v}) &= \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_M \vec{v}\cdot\frac{\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v}{|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|}\,|\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\\ &= \iint_M \vec{v}\cdot(\vec{r}'_u\times\vec{r}'_v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \iint_M \begin{vmatrix} P & Q & R\\ x'_u & y'_u & z'_u\\ x'_v & y'_v & z'_v\end{vmatrix}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

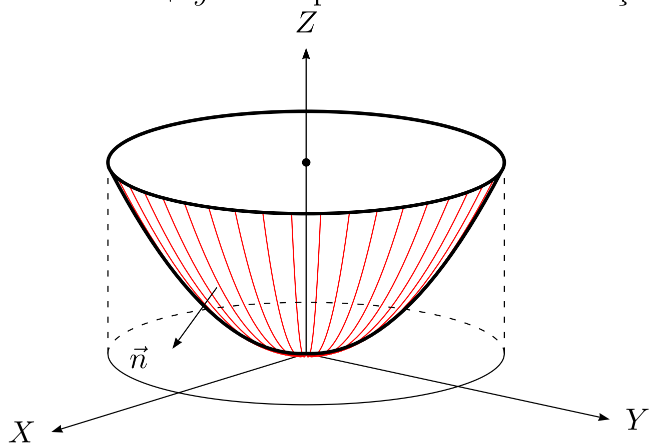
13.27 Exemplu. Să se calculeze fluxul vectorului $\vec{v} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z(x^2+y^2)\vec{\kappa}$ prin faţa exterioară a paraboloidului $z = x^2+y^2$, din interiorul cilindrului $x^2+y^2 = 1$.

Paraboloidul $z = x^2+y^2$ intersectează cilindrul $x^2+y^2 = 1$ pentru $z = 1$. Ecuaţia suprafeţei este

$$z = x^2+y^2,\ (x,y)\in M,$$

unde $M : x^2+y^2 \le 1$. Normala la suprafaţă face cu axa OZ unghiul $\gamma > \frac{\pi}{2}$, deci $\cos\gamma < 0$. Aşadar

$$\vec{\kappa}\cdot\vec{n} = |\vec{\kappa}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos\gamma < 0.$$



Dar

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y}{|\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y|},\qquad \vec{r} = x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+(x^2+y^2)\vec{\kappa}.$$

Pentru că

$$\vec{\kappa}\cdot(\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix} = 1$$

semnul din faţa expresiei ce defineşte $\vec{n}$ se alege "-". Fluxul este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iint_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = -\iint_D \vec{v}\cdot(\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Calculăm produsul mixt. Avem

$$\vec{v}\cdot(\vec{r}'_x\times\vec{r}'_y) = \begin{vmatrix} x & y & (x^2+y^2)^2\\ 1 & 0 & 2x\\ 0 & 1 & 2y\end{vmatrix} = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2).$$

Rezultă că

$$\Phi_S(\vec{v}) = -\iint_D \left[(x^2+y^2)^2 - 2(x^2+y^2)\right]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leq 1$. Se trece la coordonate polare şi se obţine

$$\Phi_S(\vec{v}) = -\int_0^1 \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(\rho^4 - 2\rho^2\right) \rho \,\mathrm{d}\varphi = -2\pi \int_0^1 (\rho^5 - 2\rho^3)\,\mathrm{d}\rho$$
$$= -2\pi \left(\frac{\rho^6}{6} - \frac{2\rho^4}{4}\right)\Big|_0^1 = -2\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}.$$

13.5 Formula lui Gauss-Ostrogradski

13.28 Teoremă. *Fie un corp $V \subset \mathbb{R}^3$ mărginit, învelit de o suprafaţă S netedă pe porţiuni. Dacă $\vec{v} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{\kappa}$ este un câmp vectorial de clasă C^1 pe V atunci*

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V (P'_x + Q'_y + R'_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

sau

$$\iint_S \vec{v} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde $\vec{n}$ este versorul normalei îndreptat înspre exteriorul corpului V şi

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

este divergenţa lui $\vec{v}$.

13.29 Exemplu. Să se calculeze fluxul câmpului $\vec{v} = (x - z)\vec{\imath} - (3x + y)\vec{\jmath} + (z - xy^2)\vec{\kappa}$ pe faţa exterioară a suprafeţei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Aplicăm formula lui Gauss-Ostrogradski pentru bila mărginită de sfera centrată în origine de rază a. Divergenţa câmpului $\vec{v}$ este $\operatorname{div}(\vec{v}) = 1 - 1 + 1 = 1$. Fluxul lui $\vec{v}$ este

$$\Phi_S(\vec{v}) = \iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = Volumul(V) = \frac{4\pi a^3}{3}.$$

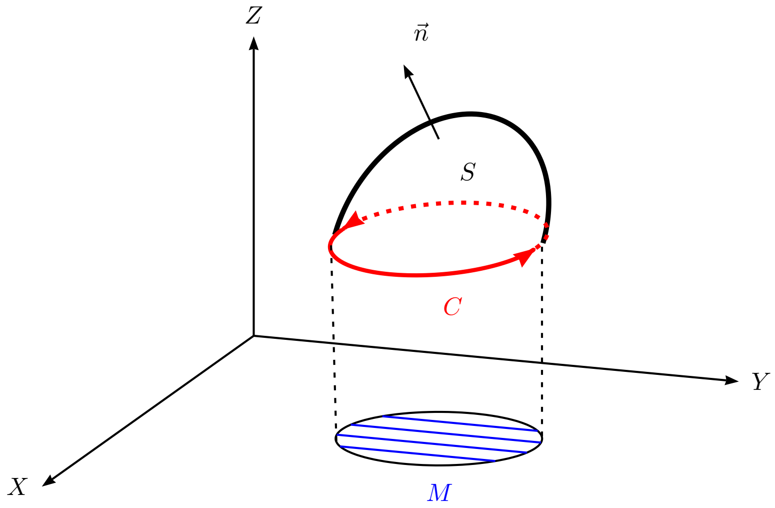
13.6 Formula lui Stokes

13.30 Teoremă. *Fie S o suprafaţă orientabilă, netedă pe porţiuni şi deschisă, având ca frontieră curba C, simplă, închisă, netedă pe porţiuni, orientată astfel încât dacă cineva parcurge curba având suprafaţa la stânga sa, versorul normalei este orientat de la picioare la cap. Fie $\vec{v} = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{\kappa}$ un câmp vectorial de clasă C^1 pe un domeniu ce include suprafaţa S. În aceste condiţii,*

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_S \left(R'_y - Q'_z\right)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + (P'_z - R'_x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(Q'_x - P'_y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

13.31 Observaţie. În cazul unei suprafeţe plane care este inclusă în XOY, teorema lui Stokes se reduce la teorema lui Green:

$$\int_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z = \iint_S \left(Q'_x - P'_y\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



13.32 Observaţie. Formula lui Stokes se poate rescrie

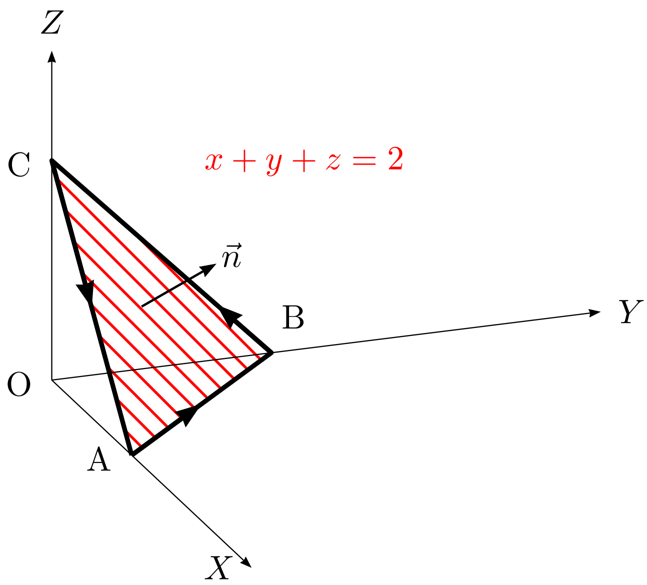
$$\int_C \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\sigma,$$

unde

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \vec{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \vec{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \vec{\kappa},$$

ceea ce înseamnă că circulaţia vectorului $\vec{v}$ de-a lungul unei curbe închise C este egală cu fluxul rotorului printr-o suprafaţă deschisă care se sprijină pe curba C.

13.33 Exemplu. Să se calculeze circulaţia vectorului $\vec{v} = y^2\vec{\imath} + z^2\vec{\jmath} + x^2\vec{\kappa}$ de-a lungul laturilor triunghiului cu vârfurile $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ şi $C(0,0,2)$, parcurse în sens orar dacă sunt privite din origine.



Aplicăm formula lui Stokes

$$\int_{\mathrm{fr}(S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}\sigma,$$

pentru suprafaţa triunghiului

$$S\colon z = 2 - x - y,\ (x,y) \in M,$$

unde M este mulţimea din planul XOY mărginită de $\Delta\, OAB$. Normala la suprafaţa triunghiului face unghi ascuţit cu axa OZ, ceea ce înseamnă că semnul lui $\vec{n}$ se alege astfel încât $\vec{n}\cdot\vec{\kappa} > 0$. Versorul normalei la o suprafaţă dată explicit are formula

$$\vec{n} = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \left(-z'_x\vec{\imath} - z'_y\vec{\jmath} + \vec{\kappa}\right).$$

În cazul nostru

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}} \left(-z'_x\vec{\imath} - z'_y\vec{\jmath} + \vec{\kappa}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{\kappa}\right).$$

Rotorul vectorului $\vec{v}$ este

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{\kappa} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2z\vec{\imath} - 2x\vec{\jmath} - 2y\vec{\kappa}.$$

Obţinem

$$\begin{aligned}
\iint_S \operatorname{rot}\vec{v}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_S (-2z\vec{\imath} - 2x\vec{\jmath} - 2y\vec{\kappa}) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{\kappa}\right)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_D 2\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= -4 \cdot \mathit{Aria}\,(M) \\
&= -8.
\end{aligned}$$