Curs 2

Integrale improprii

2.1 Teoremă. *Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie mărginită pe $[a,b]$ şi integrabilă pe $[a,r]$ pentru orice $a < r < b$. Atunci f este integrabilă pe $[a,b]$ şi*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ suficient de mic încât $r = b - \frac{\varepsilon}{1+4\|f\|} > a$. Pentru că f este integrabilă pe $[a,r]$, există o partiţie Δ_1 a intervalului $[a,r]$ astfel încât

$$S(f,\Delta_1) - s(f,\Delta_1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fie $\Delta = \Delta_1 \cup \{ b \}$, o diviziune a lui $[a,b]$. Funcţia f va fi integrabilă pe $[a,b]$ pentru că

$$S(f,\Delta) - s(f,\Delta) = S(f,\Delta_1) - s(f,\Delta_1) + \max_{u,v \in [r,b]} |f(u) - f(v)| \cdot (b-r) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\,\|f\|\,\varepsilon}{1+4\,\|f\|} < \varepsilon.$$

În plus,

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_r^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_r^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \le \|f\|\,(b-r),$$

ceea ce ne arată că

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{r \nearrow b} \int_a^r f(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

2.2 Definiţie. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nevid. O funcţie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte* **local integrabilă** *dacă f este integrabilă pe orice interval mărginit şi închis $[c,d] \subseteq I$.*

Tratăm separat cazul când intervalul I este mărginit şi când intervalul I este nemărginit.

2.1 Integrale improprii pe interval mărginit

Am văzut că o funcţie integrabilă Riemann este o funcţie mărginită. Să considerăm două exemple de funcţii nemărginite care ne permit să extindem noţiunea de integrabilitate.

2.3 Exemplu. Fie funcţia $f : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Se observă uşor că funcţia f este nemărginită, pentru că
$$\lim_{x\searrow 0} f(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$
Funcţia f este integrabilă pe orice interval $[t,1]$, $t>0$ şi
$$\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = 2-2\sqrt{t}.$$
În acest caz,
$$\lim_{t\searrow 0}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow 0}(2-2\sqrt{t}) = 2.$$

2.4 Exemplu. Fie funcţia $g : (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Se observă că funcţia g este nemărginită în 0, pentru că
$$\lim_{x\searrow 0} g(x) = \lim_{x\searrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$$
Funcţia g este integrabilă pe orice interval $[t,1]$, $t>0$ şi
$$\int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_t^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|\Big|_t^1 = -\ln t.$$
În acest caz,
$$\lim_{t\searrow 0}\int_t^1 g(x)\,\mathrm{d}x = -\lim_{t\searrow 0}\ln t = +\infty.$$

2.5 Definiţie. *Fie $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul a care local integrabilă. Dacă limita $\lim_{t\searrow a}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este* **integrabilă impropriu** *pe $(a,b]$. În acest caz, integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se numeşte integrala improprie a funcţiei f pe $(a,b]$ şi spunem că ea este convergentă. Prin definiţie*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2.6 Exemplu. Din exemplele anterioare f este integrabilă impropriu pe $(0,1]$, dar g nu. Spunem că $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă. În plus
$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow 0}\int_t^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2.$$
Mai general, să considerăm integrala $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Pentru $\alpha<1$,
$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\int_t^b (x-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_t^b = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
Dacă $\alpha = 1$ atunci
$$\int_a^b \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\int_t^b \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\ \ln(x-a)\Big|_t^b = +\infty.$$

Dacă $\alpha > 1$,

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\int_t^b (x-a)^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\searrow a}\left.\frac{(x-a)^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_t^b = +\infty.$$

2.7 Observaţie. Fie $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, nemărginită în punctul a. Atunci putem construi funcţia $F : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(t) = \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pentru orice $t \in (a,b]$. Integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă sau divergentă după cum limita funcţiei F în punctul $t = a$ există şi este finită sau nu. În plus,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(a+).$$

Să mai observăm că dacă f este o funcţie integrabilă pe $[a,b]$ în sens obişnuit Riemann, atunci F este o funcţie continuă pe $[a,b]$ şi deci şi în punctul a.

2.8 Definiţie. *Fie $f : [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul b care este integrabilă pe orice interval $[a,t]$, $t < b$. Dacă limita $\lim_{t\nearrow b}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este* **integrabilă impropriu** *pe $[a,b)$, iar integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. În acest caz notăm*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\nearrow b}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2.9 Definiţie. *Fie $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctele a şi b. Spunem că f este integrabilă impropriu pe (a,b) dacă f este integrabilă impropriu pe intervalele $(a,c]$ şi $[c,b)$, pentru orice $c \in (a,b)$. În acest caz,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.10 Definiţie. *Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul $c \in (a,b)$. Spunem că f este* **integrabilă impropriu** *pe $[a,b]$ dacă f este integrabilă impropriu pe intervalele $[a,c)$ şi $(c,b]$. În acest caz,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.11 Observaţie. Definiţia se poate extinde pentru oricâte puncte aflate în interiorul intervalului în care funcţia este nemărginită.

2.12 Definiţie. *Fie $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul $c \in (a,b)$. Dacă $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sunt divergente având valorile $\pm\infty$, atunci* **valoarea principală** *a integralei improprii $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ se defineşte prin*

$$⨍_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

2.13 Exemplu. Fie integrala improprie $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Aceasta este divergentă, deoarece $\int_{-1}^0 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ şi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ sunt divergente. Valoarea principală este

$$⨍_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\left(\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{x} + \int_\varepsilon^1 \frac{\mathrm{d}x}{x}\right) = \ln|x|\Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 = \ln\varepsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln\varepsilon = 0.$$

2.14 Exemplu. Un alt exemplu unde intervine valoarea principală a unei integrale improprii definite pe un interval mărginit este la definirea logaritmului integral

$$\mathrm{li}(x) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \right), \quad x > 1.$$

2.1.1 Criterii de convergenţă

2.15 Teoremă. ***Criteriul lui Bolzano-Cauchy***
Fie $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în punctul a, local integrabilă. Integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $0 < \eta < \delta$ şi $0 < \zeta < \delta$ să avem

$$\left| \int_{a+\eta}^{a+\zeta} f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Se foloseşte criteriul lui Bolzano-Cauchy pentru existenţa limitei funcţiei F în punctul a, unde $F : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $F(t) = \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

2.16 Definiţie. *Fie I un interval mărginit şi fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în cel puţin un punct din I care este local integrabilă pe I. Spunem că integrala $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ este* **absolut convergentă** *dacă integrala $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$ este convergentă.*

2.17 Propoziţie. ***Criteriul absolut convergenţei***
O integrală improprie absolut convergentă este convergentă.

Demonstraţie. Se foloseşte criteriul Bolzano-Cauchy şi inegalitatea

$$\left| \int_J f(x)\,\mathrm{d}x \right| \le \int_J |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

□

2.18 Observaţie. Pe baza rezultatului anterior are sens să studiem mai întâi convergenţa integralelor improprii pentru funcţii pozitive.

2.19 Teoremă. ***Criteriul primitivei mărginite***
Fie $f : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie nemărginită în a care este pozitivă şi local integrabilă pe $(a,b]$. Atunci, integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $F : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(t) = \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este mărginită pe $(a,b]$.

Demonstraţie. Fie mulţimea nevidă $M = \{\, F(t), t \in (a,b] \,\}$. Demonstrăm că $I = \sup M$ este limita funcţiei F în a. Dacă $I \in \mathbb{R}$, fie $\varepsilon > 0$. Atunci $I - \varepsilon$ nu mai este marginea superioară a lui M, deci există $c \in (a,b]$ astfel încât $I - \varepsilon < F(c)$. Fiindcă f este pozitivă pe $(a,b]$, funcţia F este descrescătoare pe $(a,b]$. Pentru orice $x \in (a,c)$ avem $I - \varepsilon < F(c) < F(x) \le I$, ceea ce ne conduce la $|F(x) - I| < \varepsilon$. Dacă $\sup M = \infty$ atunci M este nemărginită superior. Fiindcă F este descrescătoare, înseamnă că F este nemărginită în punctul a, adică limita funcţiei F în a este infinită. □

2.20 Teoremă. ***Criteriul comparaţiei cu inegalităţi***
Fie $f, g : (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii local integrabile pe $(a,b]$ şi nemărginite în a astfel încât

$$0 \le f(x) \le C \cdot g(x), \ \textit{pentru orice } x \in (a,c], \ c \in (a,b], \ C > 0.$$

1. Dacă $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă atunci $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
2. Dacă $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ atunci $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Demonstraţie. 1. Dacă integrala $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, atunci primitiva lui g este mărginită, ceea ce implică mărginirea primitivei lui f, care este echivalentă cu convergenţa integralei $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Dacă $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$, atunci primitiva lui f este nemărginită, ceea ce implică nemărginirea primitivei lui g, care demonstrează că $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$. $\square$

2.21 Teoremă. ***Criteriul comparaţiei cu limită***
Fie $f : (a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, nemărginită în a, pozitivă pe $(a, b]$. Dacă există limita

$$\ell = \lim_{x \searrow a} (x - a)^{\alpha} \cdot f(x)$$

atunci
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \geq 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \geq 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in (a, a + \delta)$ avem

$$\ell - \varepsilon < (x - a)^{\alpha} f(x) < \ell + \varepsilon \;\; (\text{dacă } \ell \text{ este finit}) \qquad \text{sau} \qquad (x - a)^{\alpha} f(x) > \varepsilon \;\; (\text{dacă } \ell = \infty).$$

1. Alegând $\varepsilon = \ell/2 > 0$ şi $g(x) = (x - a)^{-\alpha}$ obţinem $0 < \ell g(x) < 2f(x) < 3\ell g(x)$, pentru orice $x \in (a, a + \delta)$. Aplicăm criteriul comparaţiei şi ţinem cont că pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \geq 1$ avem $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$.

2. Dacă $\ell = 0$, atunci pentru $\varepsilon = 1$ şi $g(x) = (x - a)^{-\alpha}$ obţinem $0 < f(x) < g(x)$, pentru orice $x \in (a, a + \delta)$. Aplicăm criteriul comparaţiei şi ţinem cont că pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

3. Dacă $\ell = \infty$, atunci pentru $\varepsilon = 1$ şi $g(x) = (x - a)^{-\alpha}$ obţinem $0 < g(x) < f(x)$, pentru orice $x \in (a, a + \delta)$. Aplicăm criteriul comparaţiei şi ţinem cont că pentru $\alpha \geq 1$ avem $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$. $\square$

2.22 Teoremă. *Fie $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, nemărginită în b, pozitivă pe $[a, b)$. Dacă există limita*

$$\ell = \lim_{x \nearrow b} (b - x)^{\alpha} f(x)$$

atunci
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \geq 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha < 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \geq 1$ integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Demonstraţie. Este similară cazului în care f este nemărginită în a. $\square$

2.23 Exemplu. Să studiem convergenţa integralei $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$.

Funcţia $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)}}$ este o funcţie pozitivă, local integrabilă şi nemărginită în a şi b. Studiem integrabilitatea improprie a funcţiei f pe (a,b). Conform definiţiei studiem convergenţa integralelor improprii din f pe intervalele $(a,c]$ şi $[c,b)$. Pentru că

$$\lim_{x\searrow a}(x-a)^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{|a|}{\sqrt[3]{b-a}} > 0$$

şi $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ rezultă că integrala $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

De asemenea, pentru că

$$\lim_{x\nearrow b}(b-x)^{\frac{1}{3}} \cdot f(x) = \frac{|b|}{\sqrt[3]{b-a}} > 0$$

şi $\alpha = \frac{1}{3} < 1$ rezultă că integrala $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

În concluzie, integrala $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, ceea ce arată că $\int_a^b \frac{x}{\sqrt[3]{(x-a)(b-x)}}\,\mathrm{d}x$ este absolut convergentă, deci convergentă.

2.24 Exemplu. Să se studieze convergenţa integralei improprii $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Pentru că funcţia de sub integrală este negativă, considerăm funcţia $f : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}$, care este pozitivă, local integrabilă şi nemărginită în 1. Din

$$\lim_{x\nearrow 1}(1-x)^2 \cdot f(x) = \lim_{x\nearrow 1} -\ln(1-x) = +\infty.$$

şi $\alpha = 2 > 1$ rezultă că integrala $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă, ceea ce arată că $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2.25 Exemplu. Să se studieze convergenţa integralei $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ şi în caz de convergenţă să se determine valoarea integralei.

Funcţia de sub integrală este nemărginită în punctul $x = 1$. Calculăm

$$\ell = \lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha} \cdot \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\nearrow 1}(1-x)^{\alpha} \cdot \frac{x^4}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}.$$

Alegând $\alpha = \frac{1}{2}$ limita este $\ell = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, ceea ce demonstrează convergenţa integralei considerate.

Pentru calcul, facem schimbarea de variabilă $x = \sin t$. Se obţine

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{8} - 0 + \frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = \frac{3\pi}{16}.
\end{aligned}$$

2.2 Integrale improprii pe interval nemărginit

Să considerăm două exemple de funcţii definite pe interval nemărginit care ne permit să extindem noţiunea de integrabilitate.

2.26 Exemplu. Fie funcţia $f : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Funcţia f este integrabilă pe orice interval $[0,t]$, $t > 0$ şi

$$\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x \Big|_0^t = \operatorname{arctg} t.$$

În acest caz,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \operatorname{arctg} t = \frac{\pi}{2}.$$

2.27 Exemplu. Fie funcţia $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Funcţia g este integrabilă pe orice interval $[0,t]$, $t > 0$ şi

$$\int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln|1+x| \Big|_0^t = \ln(1+t).$$

În acest caz,

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln(1+t) = +\infty.$$

2.28 Definiţie. *Fie $f : [a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Dacă $\lim\limits_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este* **integrabilă impropriu** *pe $[a,\infty)$. În acest caz, integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă şi se numeşte integrala improprie a funcţiei f pe $[a,\infty)$. Prin definiţie ea are valoarea*

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2.29 Exemplu. Din exemplele anterioare f este integrabilă impropriu pe $[0,\infty)$, dar g nu. Spunem că $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar $\int_0^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă. În plus

$$\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Mai general, să considerăm integrala $\int_a^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, pentru $a > 0$. În cazul $\alpha > 1$,

$$\int_a^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^t = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}.$$

Dacă $\alpha = 1$ atunci

$$\int_a^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln x \Big|_a^t = +\infty.$$

Dacă $\alpha < 1$ atunci

$$\int_a^\infty x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_a^t x^{-\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^t = +\infty.$$

2.30 Observaţie. Fie $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Atunci putem construi funcţia $F : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$, pentru orice $t \geq a$. Integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă sau divergentă după cum limita funcţiei F la infinit există şi este finită sau nu. În plus,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(\infty) = \lim_{t\to\infty} F(t).$$

2.31 Definiţie. *Fie $f : (-\infty, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Dacă $\lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x$ există şi este finită, atunci f este* **integrabilă impropriu** *pe $(-\infty, b]$, iar integrala $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă. În acest caz notăm*

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_t^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă limita nu există sau există dar este infinită spunem că $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2.32 Definiţie. *Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Spunem că f este integrabilă impropriu pe $\mathbb{R}$ dacă f este integrabilă impropriu pe intervalele $(-\infty, c]$ şi $[c, \infty)$, pentru orice $c \in \mathbb{R}$. În acest caz,*

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.33 Definiţie. *Fie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Dacă $\int_{-\infty}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ şi $\int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sunt divergente, atunci valoarea principală a integralei improprii $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este valoarea limitei*

$$⨍_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.34 Exemplu. Integrala $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ este divergentă, deoarece integralele $\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ şi $\int_{-\infty}^0 \sin x\,\mathrm{d}x$ sunt divergente. Într-adevăr, limita

$$\int_0^\infty \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \sin x\,\mathrm{d}x = 1 - \lim_{t\to\infty} \cos t$$

nu există. Dar, valoarea principală a integralei $\int_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x$ este

$$⨍_{-\infty}^\infty \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t \sin x\,\mathrm{d}x = 0.$$

2.2.1 Criterii de convergenţă

2.35 Teoremă. ***Criteriul lui Bolzano-Cauchy***
Fie $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă. Integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $\zeta > \delta$ şi $\eta > \delta$ să avem

$$\left| \int_\eta^\zeta f(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Se foloseşte criteriul lui Bolzano-Cauchy pentru existenţa limitei funcţiei F la infinit, unde $F : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ este definită prin $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$. □

2.36 Definiţie. *Fie I un interval nemărginit şi fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă pe I. Spunem că integrala $\int_I f(x)\,\mathrm{d}x$ este* **absolut convergentă** *dacă integrala $\int_I |f(x)|\,\mathrm{d}x$ este convergentă.*

2.37 Propoziţie. ***Criteriul absolut convergenţei***
O integrală improprie absolut convergentă este convergentă.

Demonstraţie. La fel ca şi în cazul integralelor improprii pe interval mărginit. □

2.38 Observaţie. Pe baza rezultatului anterior are sens să studiem mai întâi convergenţa integralelor improprii pentru funcţii pozitive.

2.39 Teoremă. ***Criteriul primitivei mărginite***
Fie $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie pozitivă şi local integrabilă pe $[a, \infty)$. Atunci, integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $F : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ este mărginită pe $[a, \infty)$.

Demonstraţie. Fie mulţimea nevidă $M = \{\, F(t), t \in [a, \infty) \,\}$. Demonstrăm că $\sup M$ este limita funcţiei F la infinit. Fie mai întâi $I = \sup M \in \mathbb{R}$ şi fie $\varepsilon > 0$. Atunci $I-\varepsilon$ nu mai este marginea superioară a lui M, deci există $c \geq a$ astfel încât $I-\varepsilon < F(c)$. Fiindcă f este pozitivă pe $[a, \infty)$, funcţia F este crescătoare pe $[a, \infty)$. Pentru orice $x \in (c, \infty)$ avem $I - \varepsilon < F(c) \leq F(x) \leq I$, ceea ce ne conduce la $|F(x) - I| < \varepsilon$. Dacă $\sup M = \infty$ atunci M este nemărginită superior. Fiindcă F este crescătoare, înseamnă că F este nemărginită la infinit. □

2.40 Teoremă. ***Criteriul comparaţiei cu inegalităţi***
Fie $f, g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii local integrabile pe $[a, \infty)$ cu proprietatea că

$$0 \leq f(x) \leq C \cdot g(x), \text{ pentru orice } x \in [b, \infty), \ b > a, \ C > 0.$$

1. Dacă $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă atunci $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.
2. Dacă $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ atunci $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$.

Demonstraţie. La fel ca şi în cazul integralelor improprii pe interval mărginit. □

2.41 Teoremă. ***Criteriul comparaţiei cu limită***
Fie $f : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, pozitivă pe $[a, \infty)$. Dacă există limita

$$\ell = \lim_{x\to\infty} x^\alpha \cdot f(x)$$

atunci
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \leq 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \leq 1$ integrala $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

Demonstraţie. Se aplică criteriul comparaţiei cu inegalităţi pentru $g(x) = x^{-\alpha}$. □

2.42 Observaţie. Dacă $f : (-\infty, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie local integrabilă, pozitivă pe $(-\infty, a]$, atunci considerăm limita

$$\ell = \lim_{x\to-\infty} (-x)^\alpha \cdot f(x).$$

Se poate demonstra că
1. dacă $\ell > 0$ atunci pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă, iar pentru $\alpha \leq 1$ aceeaşi integrală este divergentă;
2. dacă $\ell = 0$ atunci pentru $\alpha > 1$ integrala $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă;
3. dacă $\ell = +\infty$ atunci pentru $\alpha \leq 1$ integrala $\int_{\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ este divergentă.

2.43 Exemplu. Să studiem convergenţa integralei $\int_1^\infty \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x$ şi în caz de convergenţă să calculăm valoarea ei.

Funcţia $f : [1, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}$ este o funcţie pozitivă şi local integrabilă pe $[1, \infty)$. Pentru că

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot f(x) = 1$$

integrala $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Pentru calcul, descompunem în fracţii simple

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+3}.$$

Eliminând numitorii, se obţine egalitatea $x = A(x^2+3) + (Bx+C)(x+1)$, adevărată pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Pentru $x = -1$ se obţine $-1 = 4A$, adică $A = -\frac{1}{4}$. Pentru $x = 0$, avem $0 = 3A + C$. Rezultă $C = \frac{3}{4}$. Fiind o egalitate de două expresii polinomiale, coeficienţii lui x^2 din ambii membri sunt egali, adică $0 = A + B$, de unde $B = \frac{1}{4}$. Folosind definiţia

$$\int_1^\infty \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x.$$

Iar

$$\begin{aligned}
\int_1^t \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x &= \int_1^t \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{x}{4}+\frac{3}{4}}{x^2+3} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{1}{4}\ln(x+1)\Big|_1^t + \frac{1}{8}\ln(x^2+3)\Big|_1^t + \frac{3}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\Big|_1^t \\
&= \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{1}{4}\ln(t+1) + \frac{1}{8}\ln(t^2+3) - \frac{1}{8}\ln 4 + \frac{\sqrt{3}}{4}\operatorname{arctg} t - \frac{\sqrt{3}\pi}{24} \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{t^2+3}}{t+1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Atunci

$$\int_1^\infty \frac{x}{(x+1)(x^2+3)}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{t^2+3}}{t+1} + \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\operatorname{arctg} t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

2.44 Teoremă. ***Criteriul lui Dirichlet***
Fie f o funcţie local integrabilă pe $[a, \infty)$ astfel încât $F(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ este mărginită pe $[a, \infty)$. Presupunem că $g : [a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ este descrescătoare, cu $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Atunci

$$\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

este convergentă.

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$. Va exista $\delta > 0$ cu proprietatea că pentru orice $x > \delta$ avem

$$|g(x)| < \frac{\varepsilon}{4\,\|F\| + 1}.$$

Fie $\eta, \zeta > \delta$. Aplicând a doua teoremă de medie pentru integrale, există un c între ζ şi η cu proprietatea

$$\int_\eta^\zeta f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(\eta)\int_\eta^c f(x)\,\mathrm{d}x + g(\zeta)\int_c^\zeta f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Va rezulta

$$\left|\int_\eta^\zeta f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le |g(\eta)|\cdot|F(c)-F(\eta)| + |g(\zeta)|\cdot|F(\zeta)-F(c)| < \varepsilon,$$

ceea ce demonstrează conform criteriului lui Bolzano-Cauchy că $\int_a^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

□

2.45 Exemplu. Integrala $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă, dar nu este absolut convergentă.

Pentru a arăta că este convergentă, aplicăm criteriul lui Dirichlet. Funcţia f definită prin $f(x) = \sin x$ este continuă pe $[1,\infty)$ având primitive mărginite

$$\int_1^t \sin x\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \cos t.$$

Funcţia $g(x) = \frac{1}{x}$ este derivabilă, descrescătoare, cu limita zero la infinit. Deci, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă.

Presupunem că integrala este absolut convergentă. Atunci, din inegalitatea

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}$$

şi din faptul că integrala $\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ este convergentă (criteriul lui Dirichlet), rezultă că integrala

$$\frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} \le \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$$

este convergentă, contradicţie cu

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln t = +\infty.$$