Curs 3

Integrale cu parametri

3.1 Definiţie. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, fie $J \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime nevidă, fie $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in J$ şi $I \subset \mathbb{R}$ un interval a cărui extremităţi pot să depindă de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ şi fie funcţia $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$. Integrala*

$$\int_I f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}x$$

se numeşte **integrală cu parametri** $y_1, \ldots, y_n$.

Pentru existenţa acestei integrale, trebuie ca funcţia $f(\cdot, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ să fie integrabilă pe I (în sens propriu sau impropriu) pentru $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in J$ dat.

Considerând $Y \subseteq J$ mulţimea tuturor punctelor $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pentru care funcţia $f(\cdot, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este integrabilă pe I, putem defini o funcţie $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ prin

$$g(y_1, \ldots, y_n) = \int_I f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\,\mathrm{d}x.$$

3.2 Exemplu. Funcţia sinus integral definită prin $\int_a^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ sau funcţia eroare definită prin $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ sunt exemple de integrale cu un parametru real a.

Funcţia Gamma incompletă superioară $\int_a^\infty e^{-x}x^{b-1}\,\mathrm{d}x$ şi funcţia gamma incompletă inferioară $\int_0^a e^{-x}x^{b-1}\,\mathrm{d}x$ depind de doi parametri reali a, b.

3.3 Exemplu. Integrala cu parametru

$$\int_0^a \sin(ax)\,\mathrm{d}x,$$

unde $a \in \mathbb{R}$, poate fi evaluată direct.

$$\int_0^a \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax)\Big|_0^a = \frac{1-\cos a^2}{a}, \quad a \neq 0.$$

În cazul în care $a = 0$, valoarea integralei este 0.

Observăm că integrala indefinită este funcţie de x şi a, dar integrala definită este funcţie doar de a, fiindcă variabila x dispare la înlocuirea capetelor de integrală.

În multe cazuri nu se poate determina valoarea explicită a integralei. Totuşi discutarea proprietăţilor de trecere la limită sub integrală, de continuitate, derivabilitate şi integrabilitate a integralei cu parametru se poate face şi în aceste cazuri.

3.4 Teoremă. *Dacă $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ este continuă atunci integrala cu parametru*

$$g(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

este o funcţie continuă pe $[a,b]$. Putem scrie

$$\lim_{h\to 0} \int_c^d f(x+h,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \lim_{h\to 0} f(x+h,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

În plus g este integrabilă pe $[a,b]$ şi

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}y.$$

3.5 Teoremă. *Dacă $f : [a,b] \times [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în raport cu prima variabilă şi $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$ atunci $g(x) = \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$ este derivabilă având derivata continuă pe $[a,b]$. În plus,*

$$g'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

3.6 Observaţie. Dacă $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow [c,d]$ sunt funcţii derivabile şi $f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în raport cu prima variabilă şi $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă pe $[a,b]\times[c,d]$ atunci $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

este derivabilă şi

$$g'(x) = \beta'(x)\cdot f(x,\beta(x)) - \alpha'(x)\cdot f(x,\alpha(x)) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

3.7 Exemplu. Să se calculeze $I'(a)$ unde $I(a) = \displaystyle\int_2^a \frac{e^{-ax}}{x}\,\mathrm{d}x$, $a > 2$.

Avem

$$I'(a) = \frac{e^{-a^2}}{a} - \int_2^a e^{-ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{-a^2}}{a} + \left.\frac{e^{-ax}}{a}\right|_2^a = \frac{2e^{-a^2} - e^{-2a}}{a}.$$

3.8 Exemplu. Să se calculeze

$$\lim_{t\searrow 0} \int_0^1 \frac{(x+t)^3 - 1}{\ln(x+t)}\,\mathrm{d}x.$$

Folosind formula $\int a^y \,\mathrm{d}y = \frac{a^y}{\ln a}$, scriem succesiv

$$\begin{aligned}
\lim_{t\searrow 0}\int_0^1 \frac{(x+t)^3-1}{\ln(x+t)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{t\searrow 0}\int_0^1 \left.\frac{(x+t)^y}{\ln(x+t)}\right|_{y=0}^{y=3}\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\searrow 0}\int_0^1 \left(\int_0^3 (x+t)^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{t\searrow 0}\int_0^3 \left(\int_0^1 (x+t)^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\searrow 0}\int_0^3 \left.\frac{(x+t)^{y+1}}{y+1}\right|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y \\
&= \lim_{t\searrow 0}\int_0^3 \frac{(1+t)^{y+1}-t^{y+1}}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \lim_{t\searrow 0}\frac{(1+t)^{y+1}-t^{y+1}}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^3 \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \\
&= \ln 4.
\end{aligned}$$

3.1 Integrale improprii cu parametri

Considerăm cazul unui interval nemărginit.

3.9 Definiţie. *Fie funcţia $f : [a,b]\times[c,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât pentru orice $x\in[a,b]$ integrala improprie $\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$ este convergentă. Atunci funcţia $g : [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ definită prin*

$$g(x) = \int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

se numeşte **integrală improprie cu parametru**.

3.10 Definiţie. *Integrala $\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$ este* **uniform convergentă** *dacă pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>c$ astfel încât pentru orice $d_2>d_1>\delta$ şi pentru orice $x\in[a,b]$ să avem*

$$\left|\int_{d_1}^{d_2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right| < \varepsilon.$$

3.11 Observaţie. Fie un şir strict crescător de numere reale (d_n) astfel încât $d_0 = c$ şi $d_n\to\infty$. Atunci integrala improprie cu parametru se poate scrie ca o serie de funcţii:

$$\int_c^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^\infty \int_{d_{n-1}}^{d_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^\infty z_n(x), \qquad z_n(x) = \int_{d_{n-1}}^{d_n} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Folosind Criteriul lui Cauchy pentru serii de funcţii şi uniform convergenţa integralei improprii cu parametru, din

$$|z_{n+1}(x)+\cdots+z_{n+p}(x)| = \left|\int_{d_n}^{d_{n+p}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right|$$

rezultă uniform convergenţa seriei de funcţii. Aplicând proprietăţile seriilor uniform convergente putem demonstra următoarele proprietăţi.

3.12 Teoremă. *Fie funcţia* $f : [a, b] \times [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuă astfel încât integrala improprie* $\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y$ *este uniform convergentă. Atunci funcţia* $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definită prin*

$$g(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y$$

este continuă şi în plus

$$\int_a^b \left(\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^\infty \left(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

3.13 Teoremă. *Fie funcţia* $f : [a, b] \times [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuă astfel încât integralele* $g(x) = \int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y$ *sunt convergente pentru orice* $x \in [a, b]$. *În plus* f *este derivabilă parţial în raport cu prima variabilă* x *şi integrala* $\int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y$ *este uniform convergentă. Atunci* g *este derivabilă şi*

$$g'(x) = \int_c^\infty \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Având îun vedere importanţa uniform convergenţei unei integrale improprii cu parametru să dăm următorul criteriu, care se poate demonstra folosind criteriul lui Weierstrass de uniform convergenţă a seriilor.

3.14 Teoremă. *Fie* $f : [a, b] \times [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. *Dacă există o funcţie* $M : [c, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *astfel încât* $|f(x, y)| \leq M(y)$, *pentru orice* $x \in [a, b]$ *şi orice* $y \geq c$ *şi integrala* $\int_c^\infty M(y)\,\mathrm{d}y$ *este convergentă, atunci integrala* $\int_c^\infty f(x, y)\,\mathrm{d}y$ *este uniform convergentă pe* $[a, b]$.

3.15 Exemplu. Să arătăm cum pot fi folosite teoremele de continuitate şi derivabilitate a integralei cu parametru pentru a calcula valoarea ei.

Ne propunem să calculăm valoarea integralei[1]

$$I(y) = \int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Mai întâi fie $y \in (-1, 1)$. Considerăm $f : [0, \pi] \times (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y) = \ln(1 - 2y\cos x + y^2).$$

Inegalităţile

$$0 < (1 - |y|)^2 \leq 1 - 2y\cos x + y^2 \leq (1 + |y|)^2$$

arată că f este corect definită, mărginită şi continuă pe domeniul de definiţie. Aceste condiţii ne arată că $I(y)$ este continuă pe $(-1, 1)$.

Funcţia f este derivabilă parţial în raport cu y şi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}, \quad (x, y) \in [0, \pi] \times (-1, 1).$$

Fiindcă numitorul nu se poate anula, derivata parţială $\frac{\partial f}{\partial y}$ este continuă pe $[0, \pi] \times (-1, 1)$. Această proprietate ne arată că $I(y)$ este derivabilă pe $(-1, 1)$. În plus

$$I'(y) = \int_0^\pi \frac{2y - 2\cos x}{1 - 2y\cos x + y^2}\,\mathrm{d}x, \quad y \in (-1, 1).$$

[1]Exemplul acesta apare în F. S. Woods, Advanced Calculus: A Course Arranged with Special Reference to the Needs of Students of Applied Mathematics, Ginn, Boston, 1926.

Pentru a calcula această integrală, facem schimbarea de variabilă $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Avem $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ şi

$$I'(y) = \int_0^\infty \frac{2y - 2\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 - 2y\frac{1-t^2}{1+t^2} + y^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{y+1}\int_0^\infty \frac{t^2 - \frac{1-y}{1+y}}{t^2 + \frac{(y-1)^2}{(y+1)^2}} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Notăm $a = \frac{1-y}{1+y}$. Fiindcă $y \in (-1,1)$ rezultă $a \in (0,\infty)$. Atunci

$$I'(y) = \frac{4}{y+1}\int_0^\infty \frac{t^2 - a}{t^2 + a^2} \cdot \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Distingem două cazuri. Dacă $a \neq 1$, atunci descompunem în fracţii simple şi obţinem

$$I'(y) = \frac{4a}{(y+1)(a-1)}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{(y+1)(a-1)}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0.$$

Dacă $a = 1$, atunci grupând convenabil termenii şi aplicând formula de integrare prin părţi, obţinem

$$I'(y) = \frac{4}{y+1}\int_0^\infty \frac{t^2-1}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{y+1}\int_0^\infty \frac{2t^2}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{y+1}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = 0.$$

În ambele cazuri, derivata $I'(y)$ este nulă pe $(-1,1)$, ceea ce înseamnă că funcţia $I(y)$ este constantă. Adică $I(y) = C$, pentru orice $y \in (-1,1)$. Prin calcul direct $I(0) = 0$, deci $I(y) = 0$, pentru orice $y \in (-1,1)$.

Pentru cazul $y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$ raţionamentul este similar, cu singura diferenţă că $a = \frac{1-y}{1+y} < 0$, ceea ce ne conduce la

$$\begin{aligned} I'(y) &= \frac{4a}{(y+1)(a-1)}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t - \frac{4}{(y+1)(a-1)}\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4a}{(y+1)(a-1)} \cdot \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}\Big|_0^\infty - \frac{4}{(y+1)(a-1)} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{4}{(y+1)(a-1)} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{4}{(y+1)(a-1)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{y}. \end{aligned}$$

Se obţine $I(y) = 2\pi \ln|y| + C$, $|y| > 1$. Pentru a obţine constanta, scriem

$$C = I(y) - \pi \ln y^2 = \int_0^\pi \ln \frac{1 - 2y\cos x + y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln\left[1 - 2 \cdot \frac{1}{y}\cos x + \left(\frac{1}{y}\right)^2\right]\mathrm{d}x.$$

Fiindcă $1/y \in (-1,1)$, folosim rezultatul de la primul caz şi avem $C = I\left(\frac{1}{y}\right) = 0$. Am obţinut

$$I(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-1,1) \\ \pi \ln y^2, & y \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty). \end{cases}$$

Expresia obţinută sugerează că $I(\pm 1) = 0$.

Studiem continuitatea integralei $I(y)$ în $y = \pm 1$. În aceste puncte integrala este improprie. Aplicăm Teorema privitoare la limita integralei improprii cu parametru. Fie $(a,b) = (0,\pi)$, $Y = (-1,1)$ şi $f : (a,b) \times Y \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(1 - 2y\cos x + y^2)$. Pentru $\overline{y} = -1$ avem

$\varphi(x) = \ln(2 + 2\cos x) = f(x, -1)$ şi pentru $\overline{y} = 1$ avem $\varphi(x) = \ln(2 - 2\cos x) = f(x, 1)$. În ambele cazuri funcţia φ este local integrabilă pe $(0, \pi)$. Pentru a obţine funcţia dominantă K, determinăm maximul unei funcţii de gradul al doilea şi apoi

$$f(x, y) \leq \ln(\sin^2 x) = 2\ln(\sin x), \qquad \text{pentru orice } x \in (0, \pi) \text{ şi } y \in (-1, 1).$$

Funcţia $K(x) = \ln(\sin x)$, $x \in (0, \pi)$ este local integrabilă pe $(0, \pi)$. Pentru $x = 0$, limita

$$\lim_{x \searrow 0} \sqrt{x}\ln(\sin x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \searrow 0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x\sqrt{x}}} = -\lim_{x \searrow 0} \sqrt{x}\cos x \frac{x}{\sin x} = 0,$$

şi pentru $x = \pi$, limita

$$\lim_{x \nearrow \pi} \sqrt{\pi - x}\ln(\sin x) = \lim_{x \nearrow \pi} \sqrt{\pi - x}\ln(\sin(\pi - x)) = \lim_{t \searrow 0} \sqrt{t}\ln(\sin t) = 0,$$

arată că integrala $\int_0^\pi K$ este convergentă.

În concluzie, putem trece la limită în funcţia $I(y)$ când y tinde la ± 1. Rezultă

$$I(1) = \lim_{y \nearrow 1} I(y) = \lim_{y \nearrow 1} 0 = 0 \quad \text{şi} \quad I(-1) = \lim_{y \searrow -1} I(y) = \lim_{y \searrow -1} 0 = 0.$$

3.16 Exemplu. Să se calculeze[2] integrala

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Să observăm că funcţia $h(x) = \frac{x^3 - 1}{\ln x}$, $x \in (0, 1)$ este continuă pe $(0, 1)$ şi are limite finite în capetele intervalului

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{x^3 - 1}{\ln x} = 0 \quad \text{şi} \quad \lim_{x \nearrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x} = \lim_{x \nearrow 1} \frac{3x^2}{\frac{1}{x}} = 3.$$

Acest lucru arată că h este integrabilă pe $[0, 1]$.

Pentru a calcula integrala, folosim formula $\int a^y\,\mathrm{d}y = \frac{a^y}{\ln a}$ şi avem

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left.\frac{x^y}{\ln x}\right|_{y=0}^{y=3} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^3 x^y\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

Acum, schimbăm ordinea de integrare pentru funcţia f definită prin

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y, & (x, y) \in ([0, 1] \times [0, 3]) \setminus \{ (0, 0) \} \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Funcţia f este mărginită de 1 şi este integrabilă în raport cu oricare dintre cele două variabile. Avem

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(\int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_0^3 \left.\frac{x^{y+1}}{y + 1}\right|_{x=0}^{x=1} \mathrm{d}y = \int_0^3 \frac{1}{y + 1}\,\mathrm{d}y = \ln 4.$$

[2]Exemplul acesta apare în F. S. Woods, Advanced Calculus: A Course Arranged with Special Reference to the Needs of Students of Applied Mathematics, Ginn, Boston, 1926.

3.2 Funcţiile Gamma şi Beta ale lui Euler

Funcţia Gamma

3.17 Definiţie. *Funcţia* $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *este definită prin*

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x.$$

3.18 Observaţie. Să observăm că funcţia este corect definită. Scriem

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru că

$$\lim_{x \searrow 0} x^{1-a} \cdot e^{-x} x^{a-1} = 1$$

integrala $\int_0^1 e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $1 - a < 1$, adică $a > 0$.

Din

$$\lim_{x \to \infty} x^2 \cdot e^{-x} x^{a-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{a+1}}{e^x} = 0$$

rezultă convergenţa integralei $\int_1^\infty e^{-x} x^{a-1}\,\mathrm{d}x$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

3.19 Teoremă. ***Proprietăţile de calcul ale funcţiei Gamma***
Au loc următoarele relaţii:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a),\ a > 0$
3. $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$
4. $\displaystyle\int_0^\infty x^{a-1} e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(a)}{s^a},\ s > 0$
5. $\Gamma(a) \cdot \Gamma(1-a) = \dfrac{\pi}{\sin \pi a},\ a \in (0,1)$
6. $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$

Demonstraţie. 1. Prima proprietate rezultă prin calcul direct:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left. -e^{-x} \right|_0^\infty = 1.$$

2. Prin integrare prin părţi

$$\Gamma(a+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^a\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(-e^{-x}\right)' x^a\,\mathrm{d}x = \left. -e^{-x} x^a \right|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-x} a x^{a-1}\,\mathrm{d}x = a\Gamma(a).$$

3. Rezultă din proprietăţile 1 şi 2. Înmulţim toate egalităţile $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$ pentru k de la 1 la n. O să avem

$$\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n) \cdots \Gamma(2) = n! \cdot \Gamma(n) \cdot \Gamma(n-1) \cdots \Gamma(1).$$

După simplificare rămâne $\Gamma(n+1) = n! \cdot \Gamma(1) = n!$.

4. Cu schimbarea de variabilă $sx = u$ obţinem

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-sx}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^{a-1} e^{-u}\frac{\mathrm{d}u}{s} = \frac{1}{s^a}\Gamma(a).$$

5. Alegând $a = 1$ şi $s = 1 + t$ în proprietatea 4, avem $\frac{1}{1+t} = \int_0^\infty e^{-y(1+t)}\,\mathrm{d}y$. Înmulţind cu t^{a-1} şi integrând de la 0 la infinit deducem

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty t^{a-1}\left(\int_0^\infty e^{-y(1+t)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-y}\left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-yt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^\infty e^{-y}\frac{\Gamma(a)}{y^a}\,\mathrm{d}y = \Gamma(a)\int_0^\infty e^{-y}y^{(1-a)-1}\,\mathrm{d}y = \Gamma(a)\cdot\Gamma(1-a).\end{aligned}$$

Schimbarea ordinii de integrare este justificată de Corolarul Teoremelor de interschimbare a două integrale improprii.

Dezvoltăm funcţia $f(x) = \cos(ax)$ în serie Fourier pe $[-\pi, \pi]$, unde $a \in (0, 1)$. Avem

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos nx, \qquad \text{unde } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Calculăm coeficienţii seriei Fourier:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{2\sin a\pi}{a\pi}\\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(a+n)x + \cos(a-n)x]\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a+n)\pi}{\pi(a+n)} + \frac{\sin(a-n)\pi}{\pi(a-n)}\\ &= \frac{(-1)^n\sin a\pi}{\pi}\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right).\end{aligned}$$

Am obţinut

$$\cos ax = \frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \sin a\pi\left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right)\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Pentru $x = 0$ avem

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{n-a}\right).$$

Rămâne să demonstrăm că

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\left(\frac{1}{a+n} - \frac{1}{n-a}\right).$$

Desfacem integrala în două şi facem schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{x}$ în cea de-a doua integrală:

$$\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{t^{a-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Folosim acum seria geometrică $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^\infty (-x)^n$, $x \in (-1, 1)$ şi integralele se scriu

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{a-1}\left(1 + \sum_{n=1}^\infty (-x)^n\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{a} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{1}{a+n}\\ \int_0^1 \frac{x^{-a}}{1+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{-a}\left(\sum_{n=1}^\infty (-x)^{n-1}\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{1}{n-a}.\end{aligned}$$

Rămâne să justificăm interschimbarea integralelor cu seria. Folosim Teorema convergenţei dominate pentru şirul sumelor parţiale:

$$|S_n(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} x^{a-1}(-x)^k\right| = x^{a-1}\frac{1-(-x)^n}{1+x} < x^{a-1} \quad \text{şi} \quad \int_0^1 x^{a-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}.$$

şi

$$|T_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} x^{-a}(-x)^{k-1}\right| = x^{-a}\frac{1-(-x)^n}{1+x} < x^{-a} \quad \text{şi} \quad \int_0^1 x^{-a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-a}.$$

6. Rezultă din proprietatea 5 pentru $a = 1/2$. □

3.20 Exemplu. Să se calculeze $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$.

Folosind relaţia de recurenţă $\Gamma(a) = (a-1)\Gamma(a-1)$ se obţine

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}.$$

3.21 Observaţie. Să observăm că folosind relaţia de recurenţă, putem extinde funcţia Gamma şi pe axa reală negativă.

Pentru $a < 0$ definim

$$\begin{aligned}
\Gamma(a) &= \frac{\Gamma(a+1)}{a}, \quad a \in (-1, 0)\\
\Gamma(a) &= \frac{\Gamma(a+2)}{a(a+1)}, \quad a \in (-2, -1)\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\Gamma(a) &= \frac{\Gamma(a+n+1)}{a(a+1)\ldots(a+n)}, \quad a \in (-n-1, -n).
\end{aligned}$$

Funcţia Beta

3.22 Definiţie. *Funcţia* $\beta : (0,\infty)\times(0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *este definită prin*

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

3.23 Observaţie. Să observăm că funcţia este corect definită. Scriem

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x.$$

Pentru că

$$\lim_{x\searrow 0} x^{1-a}\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} = 1$$

integrala $\int_0^{\frac{1}{2}} x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ este convergentă dacă şi numai dacă $1-a < 1$, adică $a > 0$.

Din

$$\lim_{x\nearrow 1} (1-x)^{1-b}\cdot x^{a-1}(1-x)^{b-1} = 1$$

rezultă convergenţa integralei $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ este asigurată dacă $1-b < 1$, adică $b > 0$.

3.24 Teoremă. ***Proprietăţile de calcul ale funcţiei beta***
Au loc următoarele relaţii:

1. $\beta(a,b)=\beta(b,a), \quad a,b>0$
2. $\beta(a,b)=\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,\mathrm{d}t, \quad a,b>0$
3. $\beta(a,b)=\dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad a,b>0$
4. $\displaystyle\int_c^d (x-c)^a(d-x)^b\,\mathrm{d}x=(d-c)^{a+b+1}\cdot\beta(a+1,b+1), \quad a,b>-1$
5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^a x\cos^b x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\beta\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+1}{2}\right), \quad a,b>-1.$

Demonstraţie. 1. Cu schimbarea de variabilă $x=1-t$, proprietatea este demonstrată.

2. În definiţia funcţiei Beta facem schimbarea de variabile $x=\frac{t}{1+t}$.

3. Cu proprietatea 4 a funcţiei Gamma putem scrie

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+t)^{a+b}}=\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x(1+t)}\,\mathrm{d}x.$$

Înmulţind relaţia cu t^{a-1} şi integrând după t de la 0 la infinit, egalitatea devine

$$\Gamma(a+b)\cdot\int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{(1+t)^{a+b}}\,\mathrm{d}t=\int_0^\infty t^{a-1}\left(\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x(1+t)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$$

Schimbând ordinea de integrare (care este justificată de Corolarul teoremelor de interschimbare a două integrale improprii), avem

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{a-1}\left(\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x(1+t)}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t&=\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x}\left(\int_0^\infty t^{a-1}e^{-xt}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x}\cdot\frac{\Gamma(a)}{x^a}\,\mathrm{d}x\\&=\Gamma(a)\cdot\int_0^\infty x^{b-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b).\end{aligned}$$

Am obţinut

$$\Gamma(a+b)\cdot\beta(a,b)=\Gamma(a)\cdot\Gamma(b),$$

ceea ce demonstrează proprietatea 3.

4. Se face schimbarea de variabile $x-c=(d-c)t$.
Atunci $d-x=d-c-(x-c)=(d-c)(1-t)$ şi $\mathrm{d}x=(d-c)\,\mathrm{d}t$.

5. Se face schimbarea de variabile $\sin^2 x=t$. Avem

$$\cos x=(1-t)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{iar} \quad \mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt{t(1-t)}}\,\mathrm{d}t.$$

□

3.25 Exemplu. Să se calculeze integrala $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$.

Facem schimbarea de variabilă $x^n=t$. Avem $\mathrm{d}x=\frac{1}{n}t^{\frac{1}{n}-1}\,\mathrm{d}t$. Atunci

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^\infty \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\cdot\beta\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\Gamma(1)}=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$